EMERGENCE DE LA PROBABILITE ET ENSEIGNEMENT :

définition classique, approche fréquentiste et modélisation

Michel HENRY
CII Statistique et Probabilités,
Irem de Besançon

Le nouveau programme de collège de la rentrée 2008 propose d'introduire la notion de probabilité en classe de troisième sous une double approche, classique et fréquentiste. Une version simplifiée dans sa rédaction, parue le 30 mai dernier, est prévue pour la rentrée 2009. Elle privilégie l'approche fréquentiste (voir ces programmes en fin de deuxième partie).

Cette introduction de la notion de probabilité en collège était attendue depuis des années, afin de prendre en compte une pratique sociale devenue omniprésente et pour permettre des développements plus approfondis au lycée [4], [23].

Dès l'école primaire, les élèves rencontrent des situations familières où le hasard intervient [17]. Le langage des chances leur permet de formuler des appréciations plutôt qualitatives sur les issues possibles dans le déroulement de jeux de hasard simples [26]. Ils n'ont cependant pas à leur disposition de concept élaboré permettant des évaluations plus quantitatives. Leurs déclarations sont entachées de biais psychologiques qui ont fait l'objet de nombreuses études [18], [30], [43]. Le développement de la pratique de générateurs aléatoires variés, l'introduction d'un vocabulaire spécifique et la résolution de problèmes simples de comparaisons de situations aléatoires devrait accompagner les activités de découverte tout au long du collège, afin que les élèves puissent construire le concept de probabilité dans cette dualité, avant d'accéder à une définition qui, comme on va le voir, ne va pas de soi.

Un des enjeux actuels de la formation des professeurs de collège est, me semble-t-il, de faire appréhender cette dualité de la probabilité [27] entre valeur issue d'un calcul *a priori* quand les conditions le permettent et estimation *a posteriori* par l'observation expérimentale des fréquences, quand celle-ci est possible [1]. La clarification de ce lien passe par une compréhension en profondeur de la loi des grands nombres sous sa forme élémentaire du théorème de Bernoulli.

Dans cet exposé, je me propose d'apporter quelques éclairages historiques, montrant que, comme pour beaucoup de notions mathématiques [1], l'usage opératoire de celle de probabilité au 17ème siècle, à la suite de Pascal [35] et Fermat [15], a précédé les premières définitions du 18ème par De Moivre [14], D'Alembert [12] et Condorcet [11], avant que son introduction dans le champ des objets mathématiques soit institutionnalisée par Laplace [32] au début du 19ème siècle. Historiquement, une telle définition s'est heurtée à la dualité intrinsèque de cette notion, avant qu'une synthèse puisse voir le jour dans le cadre de la modélisation des phénomènes aléatoires, au sein de la théorie mathématique fondée par Andrei Kolmogorov en 1933 [31] et développée au cours du 20ème siècle.

Comme pour la plupart des notions mathématiques, un éclairage historique permet de mieux situer les difficultés et les obstacles épistémologiques qui leur sont inhérents, même pour des notions qui nous paraissent aujourd'hui bien simples. Cet éclairage me semble indispensable pour accompagner la formation initiale et continue des enseignants. Il va de soi que si des références historiques peuvent enrichir des activités pour les élèves, il n'est pas question de fonder une didactique qui retrace les lenteurs et les troubles des élaborations historiques des connaissances mathématiques, alors que les raccourcis modernes permettent aux élèves d'en faire l'économie et d'atteindre en peu de temps des outils conceptuels qui ont demandé des siècles pour être dégagés.

Le plan de mon exposé découle très simplement de ce propos d'élucider les conditions historiques de l'émergence de la notion de probabilité dans sa dualité d'approches. Dans une première partie, je propose quelques spots qui mettent en lumière les conditions d'élaboration de la définition « classique », reprise comme premier principe par Laplace (*Essai philosophique sur les probabilités*, 1812, [32]) :

« *Le premier de ces principes est la définition même de la probabilité qui est le rapport du nombre des cas favorables à celui de tous les cas possibles* ».

Puis dans une deuxième partie, j'examine les tentatives de définitions « fréquentistes », avant de montrer ce que le point de vue de la modélisation permet comme synthèse. Je conclus par quelques remarques sur les libellés actuels des indications données dans le programme de troisième.

I. — La définition « classique »

I.1 – *La somme des points de trois dés*

La préhistoire des probabilités commence avec les jeux de hasard, notamment ce jeu très répandu au Moyen-âge qui consiste à parier sur la somme des points obtenus en lançant trois dés. Par exemple, on peut trouver une fresque du 14ème siècle représentant

1 Pensons à l'invention des imaginaires qui a permis dès le 16ème siècle de résoudre des équations algébriques, avant que les progrès des mathématiques donnent les clés de leur véritable nature et conduisent à une définition des nombres complexes au début du 19ème siècle.

quatre dames jouant avec trois dés dans les vestiges de l'ancien château d'Arco di Trento au nord du lac de Garde en Italie. Citons aussi le tableau *Les joueurs de dés* de Georges de la Tour (1593-1652) qui met en scène cinq personnages pariant sur la somme des faces de trois dés.

Les paris sur les jeux de hasard ont eu un rôle important dans la naissance du calcul des probabilités. On trouve la première trace connue d'un calcul de combinatoire effectué pour organiser ces paris dans un extrait d'un poème épique médiéval en latin, *De Vetula* (attribué à Richard de Fournival, recteur de la cathédrale d'Amiens, 1260, [2]) qui propose l'analyse des jets de trois dés, comprenant les dénombrements des configurations observables et des résultats possibles pour calculer la valeur à attribuer à chaque issue par les joueurs pariant sur la somme des trois dés. Voici une traduction des passages clés :

Peut-être cependant diras-tu que certaines [sommes] *sont **plus avantageuses** que d'autres*
*Parmi les sommes **possibles** pour les joueurs, pour la raison que*
Puisqu'un dé a six faces, avec six numéros
Avec trois dés il y en a dix-huit,
Dont trois seulement peuvent se présenter sur les dés [une fois jetés].
Ces nombres se présentent diversement, et de là
Apparaissent deux fois huit sommes [3 à 10 et 11 à 18], *qui cependant ne sont **pas également Avantageuses**, puisque la plus grande* [18] *et la plus petite* [3]
*D'entre elles **viennent rarement**, et les intermédiaires* [10 et 11] ***fréquemment.***

La démonstration se poursuit par une analyse combinatoire complète, puis conclut :

On le voit en permutant les configurations des points. Et c'est ainsi
Qu'en cinquante-six possibilités se répartissent
*Les **configurations** des faces ; et ces configurations, en deux cent*
*Seize **manières de tomber**, lesquelles donnent*
Les [16] ***sommes possibles** pour les joueurs,*
*Ainsi qu'elles doivent être **réparties** entre eux,*
*Tu connaîtras pleinement **quelle valeur** peut avoir*
L'une quelconque d'entre elles, ou quelle perte.
C'est ce que le tableau ci-dessous peut t'indiquer :

Combien de configurations des points [sur les dés] *et combien de manières de tomber correspondent à l'une quelconque des sommes* [obtenues] :

Sommes	*configurations des points sur les dés*	*manières de tomber*
3 & 18	1	1
4 & 17	1	3
5 & 16	2	6
6 & 15	3	10
7 & 14	4	15
8 & 13	5	21
9 & 12	6	25
10 & 11	6	27

Total des possibilités pour l'ensemble des configurations de points : 2 fois 108

I.2 – *Le problème du Grand Duc de Toscane*

C'est cette même situation que le Grand Duc de Toscane soumet à Galilée vers 1620, qui entre alors dans l'histoire pour avoir résolu le premier problème de probabilités [19] : comment parier sur la somme des points obtenus avec troi dés ?

« *Bien que le 9 et le 12 se composent en autant de façon que le 10 et le 11, si bien qu'ils devraient être considérés comme ayant la même chance, on voit néanmoins que la longue* *observation a fait que les joueurs estiment plus avantageux le 10 et le 11 plutôt que le 9 et le 12 ».*

Mais la publication de sa réponse a été tardive (il a fallu attendre le 18ème siècle) et n'a pas pu avoir d'influence sur la correspondance ultérieure entre Pascal et Fermat. Voici un extrait de cette réponse qui reprend quasi mot pour mot l'analyse du *De Vetula* :

« *Que dans ce jeu de dés certains points soient plus avantageux que d'autres, on en a une explication très évidente, qui consiste dans le fait que ceux-là peuvent sortir plus facilement et plus souvent que ceux-ci, ce qui dépend de leur capacité à se former avec plusieurs sortes de chiffres* »*…*

« *… Alors on voit que la somme 10 peut se faire par 27 sorties de dés différentes, mais la somme 9 par 25 seulement* »*…*

« *… Toute personne qui s'entend au jeu pourra mesurer très exactement tous les avantages, pour minimes qu'ils soient, des parties de dés, des tournois et de toute autre règle particulière que l'on observe dans le jeu* ».

I.3 - *Correspondance entre Pascal et Fermat de 1654 sur le problème des partis*

Dans l'exemple traité par Pascal et Fermat, trois joueurs jouent à un jeu de hasard à 3 issues équiprobables. Le vainqueur est le premier joueur qui gagne 3 manches. La partie est interrompue alors que le premier joueur a emporté 2 manches et les deux autres une seulement. Comment répartir les mises ?

Dans une lettre à Pascal datée du 25 septembre 1654 [16], Fermat propose d'imaginer que la partie se poursuive et étudie la combinatoire des suites possibles, dénombrant celles qui donnent la victoire à l'un ou l'autre des joueurs. Mais la partie est réellement interrompue et M. de Roberval, ami de Pascal, conteste que l'on puisse spéculer sur sa poursuite. Fermat imagine alors une autre manière de calculer ce qui doit revenir à chacun des joueurs, proportionnellement à la probabilité qu'il a de gagner :

« *Cette fiction d'étendre le jeu à un certain nombre de parties, ne sert qu'à faciliter la règle, et (suivant mon sentiment) à rendre tous les hasards égaux, ou bien, plus intelligiblement, à réduire toutes les fractions à une même dénomination…*
…Vous aviez déjà pu voir par ma précédente que je n'hésitais point à la solution véritable de la question des 3 joueurs dont je vous avais envoyé les trois nombres décisifs 17 , 5 , 5. Mais parce que M. <de> Roberval sera peut-être bien aise de voir une solution sans rien feindre, et qu'elle peut quelquefois produire des abrégés en beaucoup de cas, la voici en l'exemple proposé :
le premier joueur peut gagner, ou en une seule partie, ou en deux, ou en trois.
S'il gagne en une seule partie, il faut qu'avec un dé qui a trois faces il rencontre la favorable du coup. Un seul dé produit 3 hasards ; ce joueur a donc pour lui 1/3 des hasards, lorsqu'on ne joue qu'une partie ».
Si on en joue deux, il peut gagner de deux façons, ou lorsque le second joueur gagne la première et lui la seconde, ou lorsque le troisième gagne la première et lui la seconde. Or, deux dés produisent 9 hasards : ce joueur a donc pour lui 2/9 des hasards lorsqu'on joue deux parties.
Si on en joue trois, il ne peut gagner que de deux façons, ou lorsque le second gagne la première, le troisième la seconde et lui la troisième, ou lorsque le troisième gagne la première, le second la seconde, et lui la troisième ; car, si le second ou le troisiè-

me joueur gagnait les deux premières, il gagnerait le jeu, et non pas le premier joueur. Or, trois dés ont 27 hasards ; donc ce premier joueur a 2/27 de hasards lorsqu'on joue trois parties.
La somme des hasards qui font gagner ce premier joueur, est par conséquent 1/3, 2/9 et 2/27 ce qui fait en tout 17/27.
Et la règle est bonne et générale en tous les cas ; de sorte que, sans recourir à la feinte, les combinaisons véritables en chaque nombre des parties portent leur solution, et font voir ce que j'ai dit au commencement, que l'extension à un certain nombre de parties n'est autre chose que la réduction de diverses fractions à une même dénomination. Voilà en peu de mots tout le mystère, qui nous remettra sans doute en bonne intelligence puisque nous ne cherchons l'un et l'autre que la raison et la vérité ».

Pascal a rapidement compris l'importance de cette découverte. Voici un extrait de l'*Adresse à l'illustre Académie parisienne de mathématiques* (novembre 1654, [36]), dans laquelle il annonce :

« *… Une recherche toute nouvelle et portant sur une matière entièrement inexplorée, savoir sur les* ***combinaisons du hasard dans les jeux qui lui sont soumis****… par l'union ainsi réalisée entre les démonstrations des mathématiques et l'incertitude du hasard, et par la conciliation entre les contraires apparents, [cette recherche] peut tirer son nom de part et d'autre et s'arroger à bon droit ce titre étonnant :* ***Géométrie du hasard. …*** ».

I.4 – *Le premier manuel de probabilités*

Christian Huygens (1629-1695) s'est intéressé aux jeux de hasard et a suscité une reprise des échanges entre Pascal et Fermat en 1656-1657 [6]. Il publia en 1657 un petit opuscule : *De Ratiociniis in ludo aleae* (Du calcul dans les jeux de hasard, [29]). Il y pose comme principe :

« *Quoique dans les jeux de hasard pur les résultats soient incertains, la chance qu'un joueur a de gagner ou de perdre a cependant une valeur déterminée* ».

Huygens définit alors l'espérance mathématique (proposition 2) :

« *Avoir p chances d'obtenir a et q chances d'obtenir b, les chances étant équivalentes, me vaut* $\dfrac{pa+qb}{p+q}$ ».

I.5 – *Jacques Bernoulli et son Ars Conjectandi (1713)*

A mon sens le véritable créateur de la notion de probabilité, lui conférant d'emblée son double visage, fut Jacques Bernoulli. Partant des cinq problèmes posés par Huygens à la fin de son manuel, il conçoit en une vingtaine d'années une œuvre magistrale, *Ars Conjectandi*, [3] qui tente de cerner cette double approche de la probabilité, en vue des applications aux questions issues de la réalité.

Les extraits suivants sont significatifs de cette avancée historique. La quatrième partie débute sur l'exposé d'une conception déterministe :

« *Tout ce qui bénéficie sous le soleil de l'être ou du devenir, passé, présent ou futur, possède toujours en soi et objectivement une certitude totale. C'est évident du présent et du passé, ce qui est ou a été ne peut pas ne pas être ou avoir été. Sur le futur il n'y a pas à discuter ; cependant ce n'est pas par la néces-*

sité de quelque destin qu'il ne peut pas ne pas advenir, mais en raison soit de la prescience soit de la prédétermination divine ; car si n'arrivait pas avec certitude tout ce qui est futur, on ne voit pas comment le Créateur suprême pourrait conserver entière la gloire de son omniscience et de son omnipotence ».

Cette quatrième partie comporte cinq chapitres qui montrent bien la progression de l'appréhension élémentaire de la probabilité vers son évaluation expérimentale qui s'avère nécessaire pour la plupart des applications. Cette évaluation par la fréquence observée est justifiée par le théorème que Bernoulli démontre rigoureusement dans son dernier chapitre.

Quatrième partie (1689) : *De l'usage et l'application de la doctrine précédente aux affaires civiles, morales et économiques*

Chapitre I : *Préliminaires : la certitude, la probabilité, la nécessité, la contingence.*
« ***la probabilité est un degré de la certitude et en diffère comme la partie diffère du tout*** ».

Chapitre II : *Science et conjecture. L'art de conjecturer. Les arguments des conjectures. Axiomes généraux touchant ces points.*
« ***Conjecturer quelque chose, c'est mesurer sa probabilité*** *: ainsi l'art de conjecturer ou la stochastique se définit pour nous comme l'art de mesurer aussi exactement que possible les probabilités des choses…* ».

Chapitre III : *Les diverses espèces d'arguments, et comment estimer leur poids pour supputer les probabilités.*

« *Posons que le nombre des cas, dans lesquels un argument quelconque peut exister est b ; le nombre de ceux dans lesquels il peut arriver qu'il n'existe pas est c, (…). Or* ***je pose que tous les cas sont également possibles****, ou qu'ils peuvent survenir avec une égale facilité ; (…) en sorte qu'un tel argument prouve b/(b+c) de la chose ou de la certitude de la chose* ».

Chapitre IV : *La double manière de chercher les nombres de cas. Ce qu'il faut penser de celui qui est établi par des expériences.*
« *On en est ainsi venu à ce point que pour former selon les règles des conjectures sur n'importe quelle chose, il est seulement requis d'une part que* ***les nombres de cas soient soigneusement déterminés****, et d'autre part que* ***soit défini combien les uns peuvent arriver plus facilement que les autres*** ».

Bernoulli juge ces hypothèses trop restrictives :

« *Mais c'est ici enfin que surgit une difficulté, nous semble-t-il : cela peut se voir à peine dans quelques très rares cas et* ***ne se produit presque pas en dehors des jeux de hasard*** *que leurs premiers inventeurs ont pris soin d'organiser en vue de se ménager l'équité.*
(…) Mais qui donc parmi les mortels définira par exemple ***le nombre de maladies****, (…) qui encore recensera* ***les cas innombrables des changements auxquels l'air est soumis*** *chaque jour ? (…) Il serait donc absolument d'un insensé de vouloir connaître quelque chose de cette matière* ».

Réponse de Bernoulli : l'estimation fréquentiste :

(…) « *Mais à la vérité ici s'offre à nous un autre chemin pour obtenir ce que nous cherchons.* »
« *Ce qu'il n'est pas donné d'obtenir* ***a priori*** *l'est du moins* ***a posteriori****, c'est-à-dire qu'****il sera possible de l'extraire en observant l'issue de nombreux exemples semblables,*** *car on doit présumer que, par la suite, chaque fait peut arriver et ne pas arri-*

ver dans le même nombre de cas qu'il avait été constaté auparavant, dans un état de choses semblables, qu'il arrivait ou n'arrivait pas ».

Mais il reste à démontrer que la fréquence observée d'un événement « *issu de nombreux exemples semblables* » est aussi proche que l'on veut de la probabilité de cet événement, supposé réalisé par une multitude de cas équiprobables inaccessibles.

Chapitre V : le théorème « de Bernoulli »

Ce théorème rend compte du phénomène de stabilisation des fréquences et justifie l'approximation de la probabilité par les fréquences observées. D'une urne de Bernoulli contenant t boules dont r blanches (fertiles) et s noires (stériles), on tire nt boules avec remises, n pouvant être très grand, et on compte les boules blanches obtenues (schéma binomial). Bernoulli formule ainsi son théorème :

« *On peut concevoir des expériences en un nombre tel qu'il soit plus vraisemblable d'autant de fois que l'on veut que le nombre des observations fertiles soit au nombre de toutes les observations dans un rapport ni plus grand que* $(r + 1)/t$ *, ni plus petit que* $(r - 1)/t$ *»*.

Nous reprendrons cet énoncé dans la deuxième partie pour l'interpréter en termes d'estimation de la probabilité par un intervalle de confiance centré sur la fréquence observée.

I.6 – *La probabilité comme objet de recherches en mathématiques et les premières définitions*

Dans *Les nouveaux essais sur l'entendement humain* (1704), **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646-1716) donne des orientations de recherches :

« *J'ai dit plus d'une fois qu 'il faudrait une nouvelle espèce de logique, qui traiterait des degrés de probabilité. Il serait bon que celui qui voudrait traiter cette matière poursuivît l'examen des jeux de hasard ; et généralement je souhaiterais qu'un habile mathématicien voulût faire un ample ouvrage bien circonstancié et bien raisonné sur toute sorte de jeux, ce serait de grand usage pour perfectionner l'art d'inventer, l'esprit humain paraissant mieux dans les jeux que dans les matières plus sérieuses.* »

Pierre Raymond de Montmort (1678-1719), *Essay d'analyse sur les jeux de hasard*, 1708 :

« *Le sort de Pierre est* ***le rapport de tous les coups qui lui sont favorables au nombre de tous les coups possibles***. … *Dans une gageure égale, les mises des deux joueurs doivent avoir le même rapport que les divers degrés de probabilité ou d'espérance que chacun des joueurs a de gagner* ».

Abraham De Moivre, (1667-1754) publie en 1718 la première édition de *The doctrine of chances*, l'édition de référence est la troisième, publiée en 1756 [14]. Elle débute ainsi :

1. La Probabilité d'un Événement est plus ou moins grande suivant le nombre de Chances par lesquelles il peut arriver, rapporté au nombre total des Chances par lesquelles il peut ou ne peut pas arriver.

2. *Ainsi, si on forme une* ***Fraction dont le Numérateur est le nombre de Chances par lesquelles un Événement peut arriver, et le Dénominateur le nombre de toutes les Chances par lesquelles il peut arriver ou ne pas arriver****, cette Fraction sera une* ***véritable définition*** *de la probabilité que se produise cet Événement.*

Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783) rédige les articles sur les probabilités dans la *Grande Encyclopédie* coordonnée par Diderot.

Voici le début de l'article « Probabilité » de l'Encyclopédie Méthodique, datée de 1784, publié en 2 colonnes sur 23 pages [12]. Dans cette présentation, D'Alembert considère que la notion de probabilité concerne a priori nos affirmations dont la vérité est relative à nos connaissances. Il y révèle une approche déterministe et subjectiviste :

> *PROBABILITÉ, Philosoph. Logiq. Math. Toute proposition considérée en elle-même est vraie ou fausse ; mais relativement à nous, elle peut être certaine ; nous pouvons apercevoir plus ou moins les relations qui peuvent être entre deux idées, ou la convenance de l'une avec l'autre, fondée sur certaines conditions qui les lient, & qui, lorsqu'elles nous sont toutes connues, nous donnent la certitude de cette vérité, ou de cette proposition ; mais si nous n'en connaissons qu'une partie, nous n'avons alors qu'une simple* probabilité, *qui a d'autant plus de vraisemblance, que nous sommes assurés d'un plus grand nombre de ces conditions. Ce sont elles qui forment les degrés de* probabilité, *dont une juste estime & une exacte mesure seraient le comble de la sagacité & de la prudence.*

Pour conclure son introduction, le Secrétaire de l'Académie Royale des Sciences donne une définition maladroite :

> *PROBABILITÉ. Nous nous bornerons à donner ici les principes généraux du calcul des* probabilités, *dont on trouve des applications à divers articles.*
> *I. Le principe fondamental de ce calcul peut s'exprimer ainsi.*
> *Soit A un événement, & N un autre événement contradictoire au premier (c'est-à-dire, qui, dans l'hypothèse, ne peut exister en même temps) ; que n exprime le nombre total des combinaisons également possibles, m celui des combinaisons qui donnent l'événement A, m' celui des combinaisons qui donnent l'événement N. m / n exprimera la probabilité de l'événement A, & m' / n celle de l'événement N. n = m + m'.*

Marie Jean Antoine-Nicolas Caritat (1743-1794), Marquis de Condorcet

Condorcet avait une vision plus claire des probabilités que son Maître D'Alembert. Ses écrits n'ont été publiés *post mortem* qu'en 1805 [11], sous le titre :

ÉLÉMENS DU CALCUL DES PROBABILITÉS,
ET SON APPLICATION AUX JEUX DE HASARD,
À LA LOTERIE, ET AUX JUGEMENTS DES HOMMES ;
PAR FEU M. DE CONDORCET,
AVEC UN DISCOURS SUR LES AVANTAGES DES
MATHÉMATIQUES SOCIALES

Dans cet ouvrage, Condorcet introduit la définition de la probabilité dans l'Article III, *Des principes fondamentaux du calcul des probabilités :*

> *Le calcul des probabilités a pour objet les faits dont la réalité est inconnue. On cherche d'abord à déterminer le nombre de tous les événemens également possibles, et il est absolument nécessaire de remonter à ceux auxquels il est permis de supposer cette égale possibilité, sans quoi le calcul deviendrait absolument hypothétique. On cherche ensuite, dans ce nombre d'événements également possibles, quel est le nombre de ceux qui remplissent une certains condition, et on dit que la probabilité d'avoir un événement qui remplisse cette condition, est exprimé par le second de ces nombres divisé par le premier.*

Condorcet termine ses *Élémens* par des remarques sur les risques, essentielles pour les applications :

Article VI.
De la manière d'établir des termes de comparaison entre les différens risques auxquels on peut se livrer avec prudence, dans l'espoir d'obtenir des avantages d'une valeur donnée.

Les résultats du calcul des probabilités pouvant servir de règle pour notre conduite dans les spéculations qui intéressent notre vie et notre fortune, il est de la plus grande importance de les comparer à des objets qui fassent sur nous une impression appréciable, et sur laquelle nous puissions asseoir notre jugement. En effet, après avoir déterminé la probabilité mathématique qu'un événement qui nous intéresse arrivera ou n'arrivera pas, il faut avoir des moyens de connaître si elle est suffisante pour nous déterminer à courir les risques auxquels nous serons exposés dans ces entreprises. On ne peut arriver à ce but qu'en comparant ces risques avec ceux que nous éprouvons tous les jours, et auxquels nous attachons une importance plus ou moins grande, mais déterminée relativement à notre conduite.

I.7 – *Laplace et la théorie analytique des probabilités*

Je dis souvent que Laplace a joué pour les probabilités le rôle d'Euclide pour la géométrie. A partir de principes clairement énoncés et de définitions abstraites, il a construit une théorie mathématique dans laquelle il démontre les théorèmes les plus importants pour les applications, comme le théorème de De Moivre-Laplace qui résout entièrement le problème de Bernoulli. Ce théorème fut précurseur du théorème limite central obtenu à la fin du 19ème siècle, sans lequel l'inférence statistique n'atteindrait pas les performances remarquables actuelles.

La théorie analytique de Laplace, publiée en 1812, est précédée par son célèbre *Essai philosophique sur les probabilités,* continuellement remanié depuis son exposé en 1795 devant les élèves de l'École Normale, et dont la cinquième édition de 1825 atteint la perfection dans la concision des formulations des dix principes fondant le calcul des probabilités [32]. Pierre-Simon de Laplace, 1749-1827, Bourgeois, professeur, académicien, citoyen, comte d'Empire, puis marquis, professe un déterminisme absolu. Citons entre autres cet avis précurseur :

« *Le hasard n'a donc aucune réalité en lui-même : ce n'est qu'un terme propre à désigner notre ignorance…* » (*Mémoires de mathématiques et de physique présentés par divers savants*, 1773-1776).

Dans l'introduction à l'*Essai philosophique sur les probabilités*, rédigé de 1795 à 1825, il cerne la notion de probabilité :

« *La probabilité est relative en partie à cette ignorance, en partie à nos connaissances* ». Il précise : « *La théorie des hasards consiste à réduire tous les événements du même genre à un certain nombre de cas également possibles, c'est-à-dire tels que nous soyons également indécis sur leur existence, et à déterminer le nombre de cas favorables à l'événement dont on cherche la probabilité* ».

Dans son premier chapitre, il énonce dix principes pour fonder le calcul des probabilités, dont voici les quatre premiers :

PREMIER PRINCIPE. « *Le premier de ces principes est la définition même de la probabilité qui, comme on l'a vu est* ***le rapport***

du nombre des cas favorables à celui de tous les cas possibles ».

DEUXIÈME PRINCIPE. « ***Mais cela suppose les divers cas également possibles****. S'ils ne le sont pas, on déterminera d'abord leurs possibilités respectives dont la juste appréciation est un des points les plus délicats de la théorie des hasards.* ***Alors la probabilité sera la somme des possibilités de chaque cas favorable*** ».

TROISIEME PRINCIPE : conjonctions d'événements indépendants. « *Un des points les plus importants de la Théorie des Probabilités, et celui qui prête le plus aux illusions, est la manière dont les probabilités augmentent ou diminuent par leurs combinaisons mutuelles.*
Si les événements sont indépendants les uns des autres, ***la probabilité de l'existence de leur ensemble est le produit de leurs probabilités particulières*** ».

QUATRIÈME PRINCIPE : probabilités composées. « *Quand deux événements dépendent l'un de l'autre, la probabilité de l'événement composé est le produit de la probabilité du premier événement, par la probabilité que cet événement étant arrivé l'autre arrivera* ». P(A et B) = P(A) × P(B/A).

Conclusion de *l'Essai philosophique :*

« ***Il est remarquable qu'une science qui a commencé par la considération des jeux se soit élevée aux plus importants objets des connaissances humaines****. J'ai rassemblé toutes ces méthodes dans ma* Théorie analytique des Probabilités… »

« … On voit par cet Essai que ***la théorie des probabilités n'est au fond que le bon sens réduit au calcul*** *: elle fait apprécier avec exactitude, ce que les esprits justes sentent par une sorte d'instinct, sans qu'ils puissent souvent s'en rendre compte. Elle ne laisse rien d'arbitraire dans le choix des opinions et des partis à prendre, toutes les fois que l'on peut, à son moyen, déterminer le choix le plus avantageux. Par là, elle devient le supplément le plus heureux à l'ignorance et à la faiblesse de l'esprit humain.*

*Si l'on considère les méthodes analytiques auxquelles cette théorie a donné naissance, la vérité des principes qui lui servent de base, la logique fine et délicate qu'exige leur emploi dans la solution des problèmes, les établissements d'utilité publique qui s'appuient sur elle, et l'extension qu'elle a reçue et qu'elle peut recevoir encore par son application aux questions les plus importantes de la Philosophie naturelle et des sciences morales ; si l'on observe ensuite que dans les choses mêmes qui ne peuvent être soumises au calcul, elle donne les aperçus les plus sûrs qui puissent nous guider dans nos jugements, et qu'elle apprend à se garantir des illusions qui souvent nous égarent, on verra qu'****il n'est point de science plus digne de nos méditations, et qu'il soit plus utile de faire entrer dans le système de l'instruction publique.*** »

I.8 - *Remarques sur la définition « classique »*

La probabilité d'un événement dû au hasard est le rapport du nombre des cas favorables qui réalisent cet événement à celui de tous les cas possibles. « *Mais cela suppose les divers cas également possibles* ». L'équiprobabilité des cas possibles doit donc être postulée. La probabilité pour être définie passe par la notion d'équiprobabilité. Cercle vicieux ? « *S'ils ne le sont pas, on déterminera d'abord leurs possibilités respectives... Alors la probabilité sera la somme des possibilités de chaque cas favorable* ». Quelle définition pour la « *possibilité* » ?

On peut distinguer trois positions épistémologiques :

— Option objectiviste : les symétries du système générateur du hasard considéré engendrent l'équiprobabilité. Urne de Bernoulli.

— Option subjectiviste : dans l'ignorance absolue des conditions de réalisation des issues de l'expérience, *c'est-à-dire telles que nous soyons également indécis sur leur existence* (Laplace dixit), le plus raisonnable est de postuler l'équiprobabilité (principe de raison insuffisante).

— Option de la modélisation : les conditions de l'expérience permettent de proposer un modèle d'équiprobabilité dont la pertinence devra être contrôlée.

La définition « classique » correspond à une approche dite « épistémique » de la probabilité (Ian Hacking [27]).

— Elle met en jeu une *appréciation personnelle* ou interpersonnelle sur les effets du hasard concernant des événements à venir. C'est une sorte de *spéculation sur l'avenir* à partir des éléments connus ou supposés, constitutifs du présent.

— La notion de « probabilité » est associée aux notions de « chances », « possibilités », « espérance », « croyance », « crédibilité », « confiance ».

— La définition « classique » repose sur un *postulat ou principe* : *Les événements que l'on peut observer à l'issue d'un processus où le hasard intervient* (expérience aléatoire) *sont tous réductibles à un système de « cas »* (les issues possibles) *de mêmes possibilités, ou jugés comme tels* (équiprobabilité postulée).

Cette dernière hypothèse dépend des capacités du sujet à analyser les différents cas et à les considérer comme équivalents du point de vue de leurs possibilités. *Démarche fondamentalement relative aux connaissances du sujet* (épistémique).

Ces remarques montrent la nécessité d'une approche élargie. La définition « classique » ne peut s'appliquer dans la plupart des situations:

> « *… il est seulement requis d'une part que les nombres de cas soient soigneusement déterminés, et d'autre part que soit défini combien les uns peuvent arriver plus facilement que les autres… Cela peut se voir à peine dans quelques très rares cas* ***et ne se produit presque pas en dehors des jeux de hasard.***
>
> *(…) Mais qui donc parmi les mortels définira par exemple le nombre de maladies, (…) qui encore recensera les cas innombrables des changements auxquels l'air est soumis chaque jour ?* » Jacques Bernoulli, *Ars Conjectandi*, 1713.

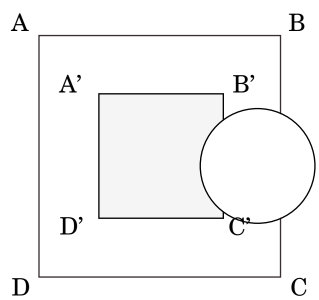
Autres exemples de situations non « classiques » :

— Jets d'une punaise, pendule chaotique[2], générateur de chiffres aléatoires non uniformes…
— Modèles infini pour représenter les issues possibles…
— Jeu du franc-carreau.
— Paradoxe de Bertrand.

Avec le jeu du franc-carreau, Buffon (1707-1788, [5]) introduit une nouvelle notion de probabilité, appelée « probabilité géométrique ». Le jeu consiste à jeter un écu sur un carrelage. Si l'écu ne rencontre aucune rainure entre carreaux, il est à « franc-carreau ». Quelle est la probabilité de cet événement ?

2 Signalons un intéressant article de Pierre Boissel : La bille qui rebondit : une expérience simple pour aborder la physique du chaos, paru dans le *Bulletin de l'Union des Physiciens* n° 741 pp. 217-252, 1992.

Si on désigne par ABCD le carreau dans lequel le centre O de l'écu est tombé, la condition « franc-carreau » est géométriquement élémentaire : elle est réalisée si et seulement si le centre du disque tombe à l'intérieur du carré A'B'C'D', homothétique du carré ABCD par rapport à son centre.

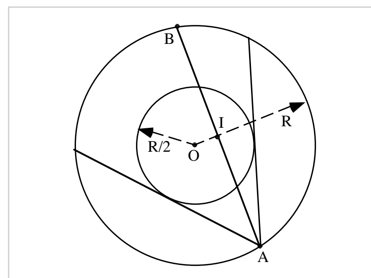


Buffon considère comme évident que *la probabilité* de faire « franc-carreau » est égale au rapport des aires des carrés A'B'C'D' et ABCD. Il fait donc appel implicitement à la loi uniforme sur le carré ABCD. Quel lien peut-on faire avec la définition classique de la probabilité héritée de De Moivre ?

Dans les situations où interviennent des variables continues, le choix explicite d'une loi de probabilité devient incontournable pour modéliser un choix « au hasard ». Le paradoxe de Bertrand (1899) en est un bel exemple. Il posait le problème en ces termes :

> *Soit un cercle de rayon R. J'en prends une corde au hasard. Quelle est la probabilité pour que sa longueur soit supérieure à celle du côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle ?* (événement A)

Bertrand proposait au moins trois solutions, suivant l'interprétation que l'on peut donner du « *choix au hasard* » d'une corde parmi l'infinité de celles-ci :



1) Choisir une corde réalisant A, c'est choisir sa distance au centre inférieure à R/2. La répartition uniforme de la probabilité sur [0, R], qu'induit le « *choix au hasard* », conduit à la probabilité P(A) = 1/2.

2) Choisir une corde réalisant A, c'est fixer l'une de ses extrémités, puis, à partir de ce point, partageant le cercle en trois arcs égaux, c'est choisir l'autre extrémité sur l'arc opposé. Le « *choix au hasard* » de cette deuxième extrémité induit la répartition uniforme sur le cercle et conduit à la probabilité P(A) = 1/3.

3) Choisir une corde réalisant A, c'est choisir son milieu à l'intérieur du disque (d) concentrique de rayon R/2. Le choix de ce point « *au hasard* » dans le disque (D) de rayon R induit la répartition uniforme de la probabilité sur tout le disque; les aires des deux disques sont dans le rapport 1/4, d'où P(A) = 1/4.

Pour ponctuer cette première partie, voici deux questions de nature didactique :
— Peut-on se limiter au collège et au lycée aux situations où il y a de l'équiprobabilité quelque part ?
— Comment élargir cette définition pour atteindre toute la dimension du concept de probabilité ?

II – L'approche fréquentiste et la modélisation au collège et au lycée

La conception fréquentiste est dite « objectiviste », elle est liée aux notions de « fréquence », « tendance », « loi des grands nombres », la probabilité serait une mesure objective de l'incertitude.

II.1 – *La loi des grands nombres comme fondement de la probabilité*

Reprenons le théorème de Bernoulli, dont l'énoncé originel a été donné dans la partie I. En voici une traduction moderne : une même expérience aléatoire est répétée un nombre n de fois suffisamment grand. On s'intéresse à la fréquence F_n des issues réalisant un événement donné de probabilité p. Cette situation peut être décrite par le schéma binomial de l'énoncé de Bernoulli, où $p = r/t$; on note $\varepsilon = 1/t$, la précision de l'approximation. Alors, d'après le théorème de Bernoulli *:*

Pourvu que n soit assez grand, il y a une probabilité aussi voisine de 1 que l'on veut que l'écart entre la fréquence F_n des issues réalisant l'événement et sa probabilité p soit plus petit que tout ε donné.

Cette fréquence observée F_n peut donc être prise pour estimer la probabilité p, et cet énoncé explicite la condition de confiance :

$$P(F_n - \varepsilon < p < F_n + \varepsilon) > 1 - \alpha$$

($1-\alpha$ est le niveau de confiance).

Alfred Renyi (calcul des probabilités, Dunod, 1966, [40]), en tire la définition suivante : « *Nous appellerons probabilité d'un événement le nombre autour duquel oscille la fréquence relative de l'événement considéré…* »

Cette « définition » appelle quelques remarques : ce nombre existe-t-il ? Est-il donné de manière unique ? Peut-on toujours le déterminer ? Renyi ajoute cependant :

*« … la **théorie mathématique** des probabilités ne s'occupe pas de jugements subjectifs ; elle concerne les probabilités objectives, qui peuvent être mesurées comme des grandeurs physiques ».*

La grandeur en question serait une sorte de degré d'incertitude et l'instrument de mesure, la répétition un grand nombre n de fois de la même expérience aléatoire. Le résultat de la mesure est donné par la fréquence observée F_n de l'événement qui peut donc être prise comme « mesure » à ε près pour estimer la probabilité p de cet événement par l'encadrement de confiance indiqué par le théorème de Bernoulli, avec un risque inférieur à α de se tromper.

II.2 - *Problèmes didactiques posés par cet énoncé*

Dans la formule $P(F_n - \varepsilon < p < F_n + \varepsilon) > 1 - \alpha$, il y a deux sortes de probabilités :

— p qui est introduite à partir d'un modèle d'urne par la définition « classique ».

— P qui traduit un risque (celui de se tromper en disant que p est dans l'intervalle de confiance). Cette probabilité n'est pas de même nature que la probabilité « objective » p. Relève-t-elle aussi d'une approche fréquentiste ?

— Combien faut-il faire d'expériences réellement pour garantir cette mesure ?

— Comment faire fonctionner cette définition fréquentiste dans un problème ?

— La définition de Renyi repose sur l'énoncé de Bernoulli qui sera ensuite démontré comme théorème. Cercle vicieux ?

La définition « fréquentiste » confond deux domaines qu'il faut pourtant bien séparer :

— le domaine de la réalité où l'on observe les fréquences F_n de réalisations d'un événement au cours de n répétitions d'une même expérience aléatoire,

— le domaine théorique (mathématique) où les objets sont définis abstraitement.

Renyi explique :

> « *La «définition» de la probabilité comme valeur autour de laquelle oscille la fréquence relative n'est pas une définition mathématique mais une description du substrat concret du concept de probabilité.* »

Alors, quelle est la « définition mathématique » ?

II.3 - *La loi des grands nombres et l'adaptation fréquentiste des programmes des lycées*

La loi des grands nombres joue donc un rôle essentiel pour relier la définition élémentaire *a priori* de la probabilité (nombre de cas favorables / nombre de cas possibles) à l'observation de la stabilisation des fréquences qui, justifiant expérimentalement les inférences, permet les applications à la statistique.

Le programme de première de 1990 proposait d'introduire la notion de probabilité sur cette observation. La probabilité d'un événement est alors définie comme *la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.*

Le programme de première de 2001 propose d'introduire le concept de (loi) de probabilité par ses propriétés théoriques, calquées sur les propriétés des (distributions) de fréquences : *famille de nombres compris entre 0 et 1, de somme 1.*

On se rapproche ainsi de la « définition mathématique », dans le cas discret fini et on relie ce concept à l'observation expérimentale (les fluctuations d'échantillonnage) par un énoncé « vulgarisé » de la loi des grands nombres proposé en classe de première [21] :

> « *Pour une expérience aléatoire donnée, dans le modèle défini par une loi de probabilité P, les distributions des fréquences obtenues sur des séries de taille n sont proches de P quand n est grand* ».

Cet énoncé vulgarisé peut sembler insuffisant à première vue. Les termes « *sont proches de* » et « *quand n est grand* » sont trop vagues pour permettre une utilisation opératoire.

L'énoncé du théorème de Bernoulli, forme élémentaire de la loi « faible » des grands nombres, pose des problèmes de statut des probabilités considérées et, de plus, il introduit une notion nouvelle de convergence en probabilité.

Au début du 20ème siècle, Borel a obtenu un résultat plus fin, connu sous le nom de « loi forte des grands nombres ». Quitte à proposer un énoncé vulgarisé en classe de première, pourquoi ne pas admettre un énoncé s'appuyant sur la loi « forte » suivante :

> *Si* $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *est une suite de v.a. définies sur* Ω*, indépendantes, d'espérances m et de mêmes variances finies, alors la suite* M_n *des moyennes arithmétiques des* X_i (i de 1 à n) *converge presque sûrement vers* m. (i.e. $P(\{\omega\in \Omega \mid M_n(\omega) \longrightarrow m\}) = 1$).

Autrement dit : sous ces hypothèses, on n'a aucune chance de tomber sur une série d'observations dont la suite des moyennes arithmétiques ne converge pas vers m. D'où un autre énoncé « vulgarisé » qui pourrait aussi être donné, se référant à la notion élémentaire de limite d'une suite :

Si A est un événement de probabilité p issue possible d'une expérience aléatoire E, *et si l'on reproduit dans les mêmes conditions un grand nombre de fois cette expérience* E, *alors on peut considérer que la suite observée des fréquences F_n des réalisations de A au cours des n premières expériences tend vers p quand n tend vers l'infini, car il n'y a aucune chance d'observer le contraire.*

II.4 - *Gestion didactique du point de vue fréquentiste*

Avec Hélène Ventsel (1971) [44], on peut souligner l'intérêt didactique d'introduire la notion de probabilité par l'équiprobabilité. Le concept peut ensuite être étendu à toutes les situations aléatoires dans lesquelles l'équiprobabilité n'a pas de sens, moyennant un postulat d'existence :

« *Si la pratique montre que, au fur et à mesure de l'augmentation du nombre d'expériences, la fréquence de l'événement a tendance à se stabiliser, s'approchant rigoureusement d'un nombre constant, il est naturel d'admettre que ce nombre est la probabilité de cet événement.*
Il est clair que l'on peut vérifier cette hypothèse seulement pour des événements dont les probabilités sont susceptibles d'être calculées directement, c'est à dire pour les événements se réduisant à un système de cas, car ce n'est qu'alors qu'il existe une méthode permettant de calculer la probabilité mathématique.
De nombreuses expériences réalisées depuis la naissance du calcul des probabilités confirment effectivement cette hypothèse. Il est tout naturel d'admettre que pour les événements ne se réduisant pas à un système de cas, la même loi reste vraie et que le nombre constant vers lequel tend la fréquence d'un événement, lorsque le nombre d'expériences augmente, n'est rien d'autre que la probabilité de l'événement.
On peut alors prendre la fréquence d'un événement, observée sur un nombre suffisamment grand d'expériences, pour la valeur approchée de la probabilité. »

II.5 - *Dualité de la notion de probabilité* [27]

Cette notion a donc deux visages :

— Une valeur *a priori* correspondant à l'idée de « chance », calculable quand il y a de l'équiprobabilité « quelque part »,

— Une mesure expérimentale obtenue par l'observation d'une fréquence stabilisée.

Ces deux visages sont inséparables si l'on veut maîtriser cette notion au niveau de ses applications concrètes. S'en tenir à la première approche conduit au biais cardinaliste et à l'abus de la combinatoire (échec massif de cet enseignement). La seconde, par sa nature empirique, est, à elle seule, impropre pour développer une théorie scientifique (tentative avortée d'axiomatisation de Von Mises [45]).

Que faire ? La question est d'autant plus épineuse que les subjectivistes du 20ème siècle en rajoutent, développant les méthodes bayésiennes selon lesquelles le choix d'une loi de probabilités *a priori* est arbitraire, quitte à le faire évoluer en fonction des observations. Un des chefs de file de cette orientation (obédience ?), De Finetti [13], ouvre son manuel de probabilités des années 70 par cette déclaration péremptoire : « *La probabilité n'existe pas !* ». Il précise :

« *L'abandon de croyances superstitieuses sur l'existence du phlogistique, de l'éther, de l'espace et du temps absolu... ou des fées, a été une étape essentielle dans la pensée scientifique. La probabilité, considérée comme quelque chose ayant une existence objective est également une conception erronée et dangereuse, une tentative d'extérioriser ou de matérialiser nos véritables conceptions probabilistes!* ».

II.6 - *Le point de vue de la modélisation*

Procédant d'une démarche scientifique, le point de vue de la modélisation renvoie le débat entre subjectivistes et objectivistes au niveau du choix du modèle probabiliste le plus adéquat possible. La probabilité y est axiomatiquement définie comme un objet théorique, quantifiant idéalement la possibilité d'un événement calculée a priori ou estimée expérimentalement.

Tout en proposant une approche fréquentiste, le projet de programme de première L de 1993 plaçait la modélisation comme objectif, anticipant sur la réforme des années 2000 :

« *Il s'agit, comme dans les autres programmes, d'aborder la notion de probabilité à partir de la fréquence, mais on a choisi dans cette série d'affiner l'explicitation du processus de modélisation. L'objet de cette partie de la formation est donc de faire découvrir, en s'appuyant sur l'expérimentation numérique, quelques notions qualitatives et quantitatives liées à la modélisation mathématique des phénomènes aléatoires.... On abordera ensuite une analyse plus quantitative permettant de dégager à partir de l'étude des fréquences et en relation avec les travaux effectués en statistique, la notion de probabilité* ».

Les programmes actuels ont donc adopté le point de vue de la modélisation, comme le souligne le GEPS dans le document d'accompagnement des programmes de première en 2001 [21]. En voici quelques extraits significatifs :

« *Modéliser une expérience aléatoire, c'est lui associer une loi de probabilité.*
Une fréquence est empirique : elle est calculée à partir de données expérimentales, alors que la probabilité d'un événement est un nombre théorique ».
« *Les distributions de fréquences issues de la répétition d'expériences identiques et indépendantes varient (fluctuent), alors que la loi de probabilité est un invariant associé à l'expérience* ».
« *L'objectif est que les élèves comprennent à l'aide d'exemples que modéliser, c'est ici choisir une loi de probabilité…* »
« *Ce choix est en général délicat, sauf dans certains cas où des considérations propres au protocole expérimental conduisent à proposer a priori un modèle. Il en est ainsi des lancers de pièces ou de dés, pour lesquels des considérations de symétrie conduisent au choix d'un modèle où la loi de probabilité est équirépartie* ».
« *Sans faire une liste de conventions terminologiques, on indiquera clairement que les termes "équilibré" et "hasard" indiquent un choix du modèle de l'expérience où intervient "quelque part" une probabilité équirépartie…* »
« *On se contentera, pour certains exercices, de fournir un modèle en indiquant dans un premier temps que des techniques statis-*

tiques ont permis de le déterminer et de le valider à partir de nombreuses données expérimentales ».
« *Pour déterminer et/ou valider un modèle probabiliste, le premier outil dont on dispose est un théorème de mathématiques appelé* ***loi des grands nombres*** ».

Il convient donc de clarifier cette notion de modèle, largement mobilisée dans l'enseignement scientifique actuel [28]. Voici la définition donnée dans les années 40 par John Von Neumann, précurseur en la matière :

« *Les sciences n'essayent pas d'expliquer, c'est tout juste si elles tentent d'interpréter, elles font essentiellement des modèles. Par modèle, on entend une construction mathématique qui, à l'aide de certaines interprétations verbales, décrit les phénomènes observés. La justification d'une telle construction mathématique réside uniquement et précisément dans le fait qu'elle est censée fonctionner* ».

Citons aussi David Ruelle [41] :

« *Un modèle consiste à coller une théorie mathématique sur un morceau de réalité* ».

Retenons qu'un modèle est une représentation simplifiée et idéalisée de la réalité. Un modèle peut être présenté dans un vocabulaire courant renvoyant à des objets réels, mais qui dans le modèle sont doués de propriétés caractéristiques idéales et abstraites (que j'appelle modèle pseudo-concret [28]). Ainsi une urne de Bernoulli est une abstraction d'une urne réelle, dans laquelle les boules sont de deux couleurs, mais pour le reste parfaitement identiques. Elles sont supposées rigoureusement équiprobables (hypothèse de modèle) dans un tirage « *au hasard* ».

Les programmes des années 2000 font largement appel à la simulation informatique permettant de traiter de véritables séries statistiques de grandes dimensions et de visualiser concrètement les effets de la loi des grands nombres [24], [42]. On trouve une définition de la simulation dans *l'Encyclopédie Universalis* :

« *La simulation est l'expérimentation sur un modèle. C'est une procédure de recherche scientifique qui consiste à réaliser une reproduction artificielle (modèle) du phénomène que l'on désire étudier, à observer le comportement de cette reproduction lorsque l'on fait varier expérimentalement les actions que l'on peut exercer sur celle-ci, et à en induire ce qui se passerait dans la réalité sous l'influence d'actions analogues* ».

Le document du GEPS d'accompagnement des programmes de première précise pour sa part :

« *Modéliser consiste à associer un modèle à des données expérimentales, alors que simuler consiste à produire des données à partir d'un modèle prédéfini. Pour simuler une expérience, on associe d'abord un modèle à l'expérience en cours, puis on simule la loi du modèle* ».

Il convient donc de faire d'abord le choix d'un modèle. Remarquons que les situations aléatoires considérées en classe sont en principe toutes à base d'équiprobabilité. Les modèles utilisés pour les simulations proposées sont donc souvent implicites quand ils se réduisent à la loi uniforme discrète, produite par le générateur aléatoire de l'ordinateur ou de la calculette qui fournissent des chiffres pseudo-aléatoires supposés équirépartis.

II.7 – *La définition de la probabilité dans le modèle de Kolmogorov (1933) [31]*

La probabilité est un ***concept mathématique*** dont la définition a du sens au sein d'un modèle théorique :

> Ω est une ensemble représentant les issues possibles d'une expérience aléatoire.
>
> Les parties de Ω représentent les événements associés à cette expérience.
>
> On distingue une famille ***B*** de parties de Ω représentant les événements susceptibles d'une description, fermée pour les opérations ensemblistes de base (tribu).
>
> Une probabilité P est une mesure (au sens de Borel) sur ***B*** comprise entre 0 et 1, vérifiant :
>
> *i*- $P(\Omega) = 1$,
>
> *ii*- $P(\emptyset) = 0$,
>
> *iii*- pour tout événement A de ***B*** on a $P(\Omega \setminus A) = 1 - P(A)$,
>
> *iv*- et pour toute famille dénombrable d'événements A_i incompatibles deux à deux (i.e. pour tout $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \Delta$), $P(\cup A_i) = \sum P(A_i)$.

Cette définition suppose une bonne dose de théorie de la mesure… Alors, comment fait-on dans l'enseignement secondaire ?

II.8 - *Les programmes des lycées et collèges à la rentrée 2008*

Intéressons-nous à la progression encore en vigueur de la classe de seconde à la terminale scientifique.
— Classe de seconde [20] : expérimentations numériques, observations des fluctuations d'échantillonnage, simulation et distributions de fréquences
— Classes de première [21] : expérience aléatoire, vocabulaire des événements, loi de probabilité sur un ensemble fini d'issues, probabilité d'un événement, loi des grands nombres, modèle d'équiprobabilité.
— Classe de terminale S [22] : probabilités conditionnelles, indépendance, formule des probabilités totales, lois discrètes (Bernoulli, binomiale), lois continues (uniforme, exponentielle), adéquation de données à une loi équirépartie.

Dans cette progression, la définition (scolaire) de la probabilité synthétise les deux approches dans le cadre de la modélisation :

— Une *expérience aléatoire* donne lieu à *n issues possibles* notées x_i. Un *événement* est représenté par un ensemble de ces issues.

— On *modélise* cette expérience par une *loi de probabilité P* : aux x_i on fait correspondre les p_i tels que $0 \leq p_i \leq 1$ et $\sum p_i = 1$. Si $p_i = 1/n$, la loi est *équirépartie.*

— La *probabilité d'un événement* est la somme des p_i associées aux issues constituant cet événement (deuxième principe de Laplace).

— On en déduit les propriétés de base :

$P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$, $P(A^c) = 1 - P(A)$,

et $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Le programme de troisième (rentrée 2008), partie probabilités, paru au BO spécial du 21 avril 2007, est présenté ainsi que l'indique le premier tableau ci-contre, en desous duquel on trouvera la nouvelle rédaction du 30 mai 2008, prévue pour la rentrée 2009.

Où est donc passé le caractère dual de cette notion ? Comment faire croire à un élève de troisième qu'il faut lancer un dé de nombreuses fois pour pouvoir dire qu'il y a une chance sur 6 de sortir une face donnée ? Le document d'accompagnement du programme de

1.4. Notion de probabilité [Thèmes de convergence]	- Comprendre et utiliser des notions élémentaires de probabilité. - Calculer des probabilités dans des contextes familiers.	La notion de probabilité est abordée à partir de situations familières (pièces de monnaie, dés, roues de loteries, urnes). Certaines de ces situations permettent de rencontrer des cas pour lesquels les probabilités ne sont pas définies à partir de considérations intuitives de symétrie ou de comparaison mais sont approximativement évaluées par les fréquences observées expérimentalement (approche fréquentiste des probabilités). La notion de probabilité est utilisée pour traiter des situations de la vie courante pouvant être modélisées simplement à partir des situations précédentes. Les situations étudiées concernent les expériences aléatoires à une ou *à deux épreuves*.

1.4. Notion de probabilité [Thèmes de convergence]	- Comprendre et utiliser des notions élémentaires de probabilité. - Calculer des probabilités dans des contextes familiers.	La notion de probabilité est abordée à partir d'expérimentations qui permettent d'observer les fréquences des issues dans des situations familières (pièces de monnaie, dés, roues de loteries, urnes, etc.). La notion de probabilité est utilisée pour modéliser des situations simples de la vie courante. Les situations étudiées concernent les expériences aléatoires à une ou *à deux épreuves*.

troisième, projet publié en mars 2008 rappelle dans son introduction :

« *Le langage élémentaire de la statistique (avec ses mots tels que moyenne, dispersion, estimation, fourchette de sondage, différence significative, corrections saisonnières, espérance de vie, risque, etc.) est, dans tous les pays, nécessaire à la participation aux débats publics : il convient donc d'apprendre ce langage, ses règles, sa syntaxe, sa sémantique ; l'enseignement de la statistique étant, par nature, associé à celui des probabilités, il s'agit en fait d'une 'formation à l'aléatoire'* ». (Citation du chapitre Statistique dans *L'enseignement des sciences mathématiques*, Commission de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques, Rapport au Ministre, ed. Odile Jacob, 2002).

Le document indique d'abord les « *choix du programme* », les différentes interprétations de la probabilité, considérations de symétries et approche fréquentiste :

« *Les justifications solliciteront l'une quelconque des interprétations de la probabilité : interprétation fréquentiste dans sa variante 'propension' ; mais certains élèves feront certainement appel à l'interprétation épistémique, dans sa variante personnelle ou interpersonnelle ; la variante logique conduisant à faire appel au principe d'indifférence (ou de raison insuffisante)* ».

Pour conclure voici quelques points pour réfléchir à une progression en collège :

— Qu'est-ce que le hasard ?

— Peut-on le quantifier ?

— Des générateurs de hasard familiers : pièces, dés, roulettes, urnes…

— La probabilité pour évaluer le poids des cas favorables par rapport à tous les cas possibles.

— L'équiprobabilité comme hypothèse de modèle

— Fluctuations des fréquences et stabilisation. Usage du tableur

— Caractère théorique de la probabilité : un nombre pour évaluer les « chances », approximativement mesuré par une fréquence stabilisée. Distinction entre modèle et réalité.

— Mesure expérimentale approximative d'une probabilité par la fréquence stabilisée. Punaises…

Mais laissons le dernier mot à Pierre-Simon Laplace :

« *Il est remarquable qu'une science qui a commencé par la considération des jeux se soit élevée aux plus importants objets des connaissances humaines… On voit par cet Essai que la théorie des probabilités n'est au fond que le bon sens réduit au calcul… On verra qu'il n'est point de science plus digne de nos méditations, et qu'il soit plus utile de faire entrer dans le système de l'instruction publique.* » (Conclusion de l'*Essai Philosophique* de 1812, [32]).

Références bibliographiques

[1] BATANERO Carmen, HENRY, Michel & PARZYSZ Bernard (2004). The nature of chance and probability, in Graham A. Jones (ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning,* 20-42. © 2008 Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.

[2] BELLHOUSE, D. R. (2000). *De Vetula* : a medieval manuscript containing probability calculations. *International Statistical Review* vol. **68-2**, 123-136.

[3] BERNOULLI, Jakob (1713). *Ars Conjectandi,* 4ème partie. Traduit du latin par Norbert MEUSNIER dans *Jacques Bernoulli et l'Ars Conjectandi,* IREM de Rouen, 1987.

[4] BOROVCNIK, M., BENTZ, H. J., & KAPADIA, R. (1991). A probabilistic perspective. In R. Kapadia & M. Borovcnik (Eds.), *Chance Encounters: Probability in Education* (pp. 27-73). Dordrecht : Kluwer.

[5] BUFFON, Georges Louis LECLERC de (1777). *Essai d'arithmétique morale*, dans *Œuvres Complètes*, tome **12**, Ed. Garnier, 1855. Reproduit dans *Un autre Buffon*, Binet, J.L. et Roger, J., Hermann, 1977.

[6] Cercle d'Histoire des Sciences de l'IREM de Basse-Normandie (2006). *L'espérance du Hollandais ou Le premier traité de calcul du hasard.* Ellipses, Paris.

[7] Commission Inter-IREM Statistique et Probabilités (2001). *Autour de la modélisation en probabilités.* Michel Henry, éd. Presses Universitaires de Franche-Comté, Besançon (diff. CiD).

[8] Commission Inter-IREM Statistique et Probabilités (2003). *Probabilités au lycée*. Brigitte Chaput et Michel Henry, éds. Brochure **143**. APMEP, Paris
[9] Commission Inter-IREM Statistique et Probabilités (2005). *Statistique au lycée,* vol. 1. Brigitte Chaput et Michel Henry, éds. Brochure **156**. APMEP, Paris.
[10] Commission Inter-IREM Statistique et Probabilités (2007). *Statistique au lycée,* vol.2. Brigitte Chaput et Michel Henry, éds. Brochure **163**. APMEP, Paris.
[11] CONDORCET Jean Nicolas de Caritat, Marquis de. *Elémens du calcul des probabilités et son application aux jeux de hasard, à la loterie et aux jugemens des hommes. Avec un discours sur les avantages des mathématiques sociales,* A Paris, chez Royez, libraire, An XIII.
[12] D'ALEMBERT, Jean, Le Rond. Article *Probabilité*, *Encyclopédie Méthodique, Mathématiques*, extraite de La Grande Encyclopédie de Diderot et D'Alembert eds.
[13] DE FINETTI, Bruno (1974). *Theory of probability.* London: John Wiley.
[14] DE MOIVRE, Abraham (1718). *The Doctrine of Chances* (1e éd., 1718 ; 2e éd., 1738 ; 3e éd., 1756). Reproduit : 1967, 2000, New York, Chelsea.
[15] FERMAT, Pierre (1989). *Précis des œuvres mathématiques*. Paris: Jacques Gabay (Ouvrage original publié en 1853).
[16] FERMAT, Pierre (1654) : Lettre de Fermat à Pascal du 29 août 1654, in *PASCAL : Œuvres complètes,* tome II, deuxième partie : *Œuvres diverses,* volume I, (1623-1654), Correspondance avec FERMAT, pp. 1155-1158.
[17] FISCHBEIN, Ephraïm. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children.* Dordrecht : Reidel.
[18] FISCHBEIN, E., NELLO, M. S., & MARINO, M. S. (1991). Factors affecting probabilistic judgments in children in adolescence. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 523-549.
[19] GALILEI, Galileo (vers 1620). Considerazione sopra il Giuco dei Dadi, *Opere de Galileo Galilei*, Firenze, 1855, t. **xiv**, p. 293-296 ; 1$^{\text{ère}}$ publication des *Opera*, Florence, 1718.
[20] GEPS, Direction de l'Enseignement Scolaire (2000), *Document d'accompagnement des programmes de mathématiques de la classe de seconde.* CNDP, Paris.
[21] GEPS, Direction de l'Enseignement Scolaire (2001), *Document d'accompagnement des programmes de mathématiques, classe de première des séries générales.* CNDP, Paris.
[22] GEPS, Direction de l'Enseignement Scolaire (2002). Annexe « Probabilités et statistique » du *Document d'accompagnement des programmes de mathématiques des classes terminales de la série scientifique et de la série économique et sociale*. CNDP, Paris.
[23] GIRARD, Jean Claude, HENRY, Michel, PARSYSZ, Bernard, PICHARD,

Jean-François (2001). Quelle place pour l'aléatoire au collège ? *Repères-IREM* **42**, (pp. 27-43), Topiques Editions, Metz.
[24] GIRARD, Jean Claude & HENRY, Michel (2005). Modélisation et simulation en classe : quel statut didactique ?. *Statistique au lycée* vol. 1, brochure **156**. APMEP, Paris, 147-160.
[25] GRANGÉ, Jean-Pierre (2003). Arbres et tableaux en probabilités conditionnelles. *Probabilités au lycée.* Commission Inter-IREM Statistique et Probabilités. Brochure **143.** APMEP, Paris, 91-124.
[26] GROUPE ÉLÉMENTAIRE IREM DE BESANÇON (2008). Qui peut le plus ? Introduction de l'aléatoire en cycle 3, *Repères-IREM* n° 70, janvier 2008, Topiques éditions, Metz.
[27] HACKING, Ian (2002). *L'émergence de la probabilité*, (1ère éd.: The emergence of probability, Cambridge, MA: Cambridge University Press, 1975), Le Seuil, Paris.
[28] HENRY, Michel (2001). Notion d'expérience aléatoire, vocabulaire et modèle probabiliste. *Autour de la modélisation en probabilités.* Commission Inter-IREM Statistique et Probabilités. Presses Universitaires de Franche-Comté, Besançon.
[29] HUYGENS, Christiaan (1657). *De ratiociniis in Ludo aleae* ; trad. «Du calcul dans les jeux de hasard» in tome 14, *Œuvres complètes* **22,** vol. 1888-1950, La Haye.
[30] KAHNEMAN, D., SLOVIC, P. & TVERSKY, A. (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases.* New York: Cambridge University Press.
[31] KOLMOGOROV, Andrei (1950). *Foundations of probability's calculation.* New York: Chelsea Publishing Company. Ouvrage original : Grundbegriffe der wahrscheinlichkeitsrechnung, publié en 1933.
[32] LAPLACE, Pierre-Simon (1825). *Essai philosophique sur les probabilités.* (1814, 5e édition, 1825). Préface de René THOM, postface et notes de Bernard BRU, Bourgois, Paris 1986. Rééd. in LAPLACE, Pierre-Simon (1812). *Théorie analytique des probabilités* (1re édition 1812, 3e édition 1820, *O. C.* tome 7). Rééd. en 2 vol. Jacques Gabay, Paris 1995.
[33] PARZYSZ, Bernard (1993). Des statistiques aux probabilités : exploitons les arbres, *Repères-IREM* **10** (pp. 91-104), Topiques Editions, Metz.
[34] PARZYSZ, Bernard (2005). Quelques questions à propos des tables et des générateurs aléatoires. *Statistique au Lycée* vol. 1, Commission Inter-IREM Statistique et Probabilités. Brochure **156.** APMEP, Paris, 181-200.
[35] PASCAL, Blaise (1654). Correspondance avec Fermat. In *Oeuvres Complètes* (1963a, pp. 43-49). París: ed. Seuil.
[36] PASCAL, Blaise (1654). *Adresse à l'illustre académie parisienne de mathématiques*. In Jean Mesnard : *Blaise Pascal, œuvres complètes,* ed. Desclée de Brouwer, Bibliothèque Européenne, édition du tricentenaire.

Voir aussi : PASCAL : *Œuvres complètes,* tome II, deuxième partie : *Œuvres diverses,* volume I, (1623-1654), pp. 1021-1035.
[37] PICHARD, Jean-François (1998). Approche épistémologique et diverses conceptions de la probabilité, *Repères-IREM* **32** (pp. 5-24), Topiques Editions, Metz.
[38] PICHARD, Jean-François (2001). Les probabilités au tournant du XVIII[e] siècle, *Enseigner les probabilités au lycée*, Commission Inter-IREM Statistique et Probabilités, IREM de Reims, 1997, Rééd. dans *Autour de la modélisation en probabilités*, ouv. cité.
[39] POINCARÉ, Henri (1987). *Calcul des probabilités* [Probability calculus]. París: Jacques Gabay (Ouvrage original publié en 1912).
[40] RENYI, Alfred (1966). *Calcul des probabilités.* Dunod, Paris. Rééd. Jacques Gabay, Paris 1992.
[41] RUELLE, David, (1991). *Hasard et chaos*, Odile Jacob, Paris.
[42] SCHWARTZ, Claudine (2006). Pratiques de la statistique. Expérimenter, modéliser et simuler. Vuibert, Paris.
[43] SHAUGHNESSY, J. M. (1983). Misconceptions of probability, systematic and otherwise: Teaching probability and statistics so as to overcome some misconceptions. In D. R. Grey, P. Holmes, V. Barnett, & G. M. Constable (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (pp. 784-801). Sheffield, UK: Teaching Statistics Trust.
[44] VENTSEL, Hélène (1973). *Théorie des probabilités*. Moscou: Mir.
[45] VON MISES, R. (1952). *Probability, statistics and truth* (J. Neyman, O. Scholl, & E. Rabinovitch, Trans.). London: William Hodge and company. (Ouvrage original publié en 1928).