LES METHODES EXPERIMENTALES EN GEOMETRIE

Philippe LOMBARD
Irem de Lorraine

« *Les mathématiques font partie de la physique. La physique est une science expérimentale, une des sciences naturelles. Les mathématiques, ce sont la partie de la physique où les expériences ne coûtent pas cher.* »

Vladimir Igorevitch ARNOLD, *Gazette de la SMF*, n° 78, octobre 1998

La création d'une épreuve pratique de mathématiques au baccalauréat permettra-t-elle d'enrayer la chute dramatique de notre spécialité ? Les compétences inscrites dans les programmes sur l'utilisation de logiciels en mathématiques sont-elles susceptibles d'être correctement évaluées ? Trouvera-t-on suffisamment de sujets à proposer pour lesquels l'utilisation des TICE intervienne de manière significative dans la résolution du problème posé ?

Autant de questions cruciales qui taraudent aujourd'hui les Décideurs et l'Institution, et qui nous ont amenés ici (*) pour réfléchir sur l'aspect expérimental des sciences en général et des mathématiques en particulier. Si nous savons déjà, grâce aux exposés précédents, à quel point les sciences physiques ou même les statistiques sont des sciences réellement expérimentales, si nous avons vu comment les logiciels de calcul ou les tableurs peuvent être investis efficacement dans la résolution de problèmes qui présentent un caractère algorithmique plus ou moins marqué, il nous faut nous pencher désormais sur le rôle exact de *l'expérimentation* et des *logiciels* dans l'enseignement de la géométrie…

Il ne peut certes échapper à personne, d'entrée de jeu, que cette association entre expérimentation et utilisation des logiciels — ou, si l'on préfère, entre *démarches d'investigation* et *logiciels de géométrie dynamique* — constitue une manière peut-être très artificielle de lier deux problèmes qui n'ont pas forcément de parenté nécessaire et évidente.

(*) Ce texte a été rédigé à partir d'un exposé effectué à l'Université d'été de Saint Flour d'août 2007 intitulée : « *Expérimentation et démarches d'investigation en mathématiques* ». On trouvera le texte et le fichier du diaporama à l'adresse des actes : http://www3.ac-clermont.fr/pedago/maths/pages/UE2007/UE_2007_Internet.htm)

Mais il ne faut pas s'y tromper : même si ses motivations sont souvent tarabiscotées, l'Institution (je veux dire évidemment l'Inspection Générale) a un réel talent pour poser de *bonnes questions*. Des questions difficiles. Des questions qui associent forcément un aspect pragmatique, un aspect didactique et un aspect épistémologique. Des questions, surtout, qui n'ont pratiquement jamais de réponses vraiment satisfaisantes, et pour lesquelles il n'est pas rare, malheureusement, de se contenter *in fine* de quelques idées superficielles… en attendant de pouvoir passer à la question suivante…

Quoi qu'il en soit, je voudrais vous convaincre de l'intérêt du problème de *l'expérimentation en géométrie* et, sans prétendre y apporter des réponses définitives, analyser avec vous quelques facettes de celui-ci.

Bien entendu je m'intéresserai surtout ici au côté *démarche d'investigation* en géométrie, indépendamment de l'usage des TICE, mais sans négliger pour autant une réflexion sur l'appel aux logiciels de géométrie. Il est vrai qu'aujourd'hui les "investigations" — du moins pour le grand public — font essentiellement référence à des *experts* armés de coton-tiges, de pipettes et de pincettes, qui passent leur temps à consulter des bases de données ou les écrans de spectrographes de toutes sortes ; mais je suis plutôt d'une génération pour laquelle ce mot désignait principalement les réflexions subtiles de quelque commissaire génial et bourru, voire à la grande rigueur les mystérieuses et sublimes déductions de l'éclaireur indien capable de scruter une touffe d'herbe, quelques crottes et des traces dans la poussière pour conclure qu'une demi-douzaine de bandits venant de l'ouest venaient de dévaliser la diligence…

Mais le grand public se laisse fasciner par le savoir, l'intuition et la perspicacité, il ne s'intéresse guère à l'apprentissage et — pour tout dire — à la *formation* d'enquêteurs aussi merveilleux ! C'est pourtant, comme vous le savez, le seul problème qui nous occupe. C'est donc sous cet angle que nous allons appréhender la notion d'expérimentation en mathématiques. Sans vraiment chercher à savoir dans quelle mesure la géométrie est une "science expérimentale" — ce qui serait une question pour philosophes — je vais tenter de voir *pourquoi* et *comment* expérimenter dans l'enseignement, dans le but de dégager, si possible, quelques éléments permettant de comprendre ce que pourrait être une *méthode expérimentale* pour l'apprentissage de la géométrie.

1. Expérimenter, pourquoi ?

Pour être franc, je me suis beaucoup demandé, avant de venir, par quel bout j'allais prendre le problème de l'expérimentation ! J'ai longtemps hésité entre deux extrêmes…

Une première illustration de l'utilisation des TICE en la matière m'a été apportée fortuitement par un stagiaire auquel son tuteur avait fourni toute une séquence *d'introduction du parallélogramme* en cinquième. Après la définition et la construction fondatrice (à partir évidemment de "l'outil symétrie centrale") l'élève devait passer en revue les propriétés classiques sur le mode de l'exemple ci-contre.

Peut-être ne parviendrez-vous que difficilement à imaginer l'espèce de pincement nostalgique que peut ressentir devant ce type d'activités quelqu'un qui aurait appris les mathématiques à l'époque des maths modernes ou même de Winnetou (l'homme de la prairie,

IV- Une propriété des angles opposés

Quelle propriété semblent vérifier les angles opposés du parallélogramme ABCD ?
. . . .

Nous allons le vérifier à l'aide du logiciel.

➢ A l'aide de l'outil **MESURER UN ANGLE**, afficher la mesure des angles opposés du parallélogramme ABCD.

On a alors : $\widehat{ABC}$ = ... $\widehat{CDA}$ = ...

$\widehat{DAB}$ = ... $\widehat{BCD}$ = ...

Que remarque-t-on ? . . . .

➢ **DEPLACER** les points A, B, C et D. Que remarque-t-on ? . . . .
. . . .

Compléter le cadre ci-dessous :

Propriété : Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses angles opposés . . . .

Fig. 1

l'éclaireur apache…). Mais vous pouvez partager sans peine avec moi le souvenir de l'effroi qu'une telle séquence aurait suscité naguère encore chez tout Inspecteur pédagogique régional…

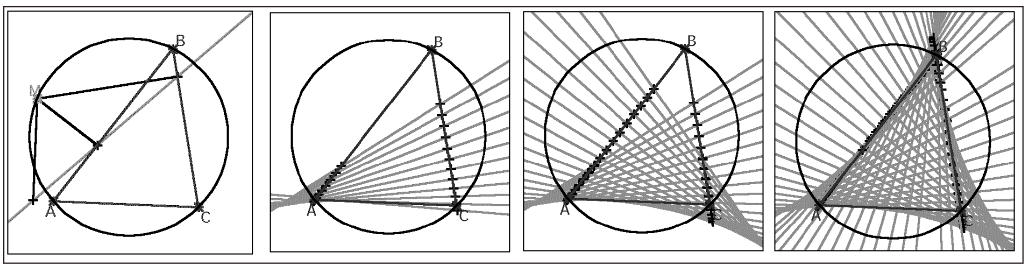
Les temps changent, en effet. Et si je cite cela en exemple de premier usage des TICE en matière de “vérifications expérimentales”, c'est d'abord parce qu'il y a fort à parier que c'est là le plus clair de l'utilisation pratiquée au quotidien.

Il ne s'agit d'ailleurs pas pour moi de fustiger ce genre de séquence : les définitions et l'étude du parallélogramme en cinquième — qu'il s'agisse d'une version rigoureuse qui s'attacherait à préciser pas à pas ce que l'on démontre et ce que l'on ne démontre pas, ou qu'il s'agisse d'une liste de définitions et de propriétés — me semble largement de nature rhétorique… Et je ne pense pas que la méthode choisie puisse hypothéquer énormément l'apprentissage des élèves. L'important ici est essentiellement dans les exercices d'application qui seront proposés à la suite de la leçon.

A l'inverse, évidemment, mon second exemple “extrême” dans l'appel à l'ordinateur tient dans une utilisation beaucoup plus orthodoxe. Elle fait usage de sa puissance de calcul et (pour peu que les ressources du logiciel utilisé soient suffisamment sophistiquées) à sa capacité inégalable de visualisation : comment diable les géomètres du XIXème siècle ont-ils bien pu découvrir l'enveloppe des droites de Simson d'un triangle sans recours au moindre ordinateur ?… (cf. figure 2 page suivante)

Mais bref. J'ai trouvé entre temps sur le site d'un IUFM — Marseille peut-être ? — les compte-rendu d'un séminaire destiné à la formation des stagiaires… Celui-ci ne pouvait guère éviter de traiter le sujet et il y revenait effec-

Fig. 2



tivement à deux reprises. Dans le premier exemple, sous le titre enthousiaste « Ce que l'on doit donc apprendre, c'est à *"faire confiance" à l'expérimentation* ! », on disait :

« Considérons le programme suivant de construction de la parallèle à une droite d qui passe par un point $P \notin d$:

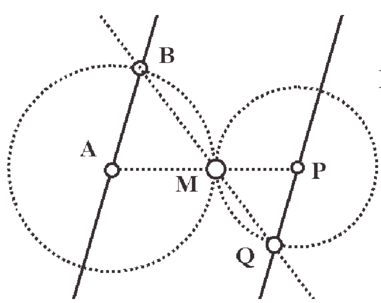


Fig. 3

- marquer un point A de d ;
- tracer le segment [AP] ;
- marquer un point M situé entre A et P ;
- marquer un point B à l'intersection de d et du cercle de centre A passant par M ;
- marquer le point Q, second point d'intersection de la droite (BM) avec le cercle de centre P passant par M ;
- tracer la droite (PQ). »

Puis la description de cette construction était suivie d'un série de réalisations dans une foule de cas particuliers, assorties du commentaire : « [ces réalisations] ne laissent pas de doute sur la *vérité* de la propriété de parallélisme des deux droites. »

Bien sûr on peut sans peine comprendre ce que pouvait vouloir dire l'auteur de ce texte, mais comment ne pas s'interroger sur la profondeur des problèmes soulevés par cet emploi de l'expression "ne laissent pas de doute sur la vérité…" ? La notion de parallélisme est-elle donc devenue si simple ? La vérification effectuée est-elle à comprendre dans le contexte de la géométrie euclidienne qui gouverne le logiciel ? La vérité ainsi révélée supprime-t-elle les questions plus ou moins métaphysiques qui ont, de toute éternité, interpellé les philosophes, les physiciens et les mathématiciens à propos des parallèles ? Sans être un zélateur fanatique de la révélation du postulat d'Euclide aux élèves de collège, on peut se prendre à rêver sur cette puissance des TICE à déplacer les problèmes… et supprimer ainsi nombre de questions de justifications qui empoisonnaient, jusqu'à présent, la vie du professeur de mathématiques.

Le deuxième exemple "didactique" était d'une nature un peu différente : il avait trait à un résultat connu sous le nom de "théorème de Thébault" : « A titre d'illustration complémentaire, demandons-nous si les propriétés ci-contre sont *vraies*…

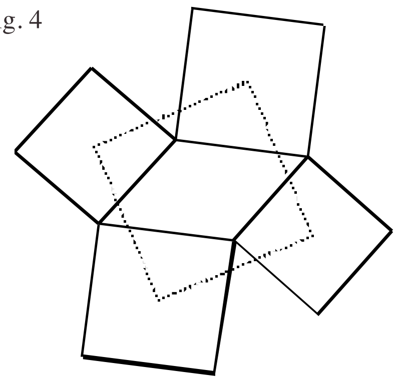
Inutile, je pense, de dire en quoi va consister la *vérification expérimentale*… Et l'auteur ajoute : « Croire en la véracité de l'expérimentation devrait être facilité — et devient *crucial* — à partir du moment où l'on dispose de *logiciels de géométrie dynamique*. Un tel logiciel permettra de s'assurer qu'en fait les deux assertions A_1 et A_2 sont bien *vraies* […]. Bien entendu, on pourra alors vouloir s'assurer que ces assertions se laissent *déduire* de la [théorie], *ce qui est une autre question* : même si l'on ne parvenait pas à établir que [la théorie permet de les prouver], cela n'altérerait nullement la certitude où l'on est que A_1 et A_2 sont des propriétés *vraies dans l'espace sensible E*. »

Est-il donc si important que telle ou telle propriété soit "vraie dans l'espace sensible" ? Et que peut bien vouloir dire la position selon laquelle, "même si on ne parvenait pas à l'établir, la propriété resterait vraie dans l'espace sensible" ? Ne pourrait-on pas se contenter de penser — sans faire appel à une pseudo-vérification "physique" — que les modifications opérées sur les cas de figure grâce au logiciel de géométrie dynamique laissent espérer que la propriété est vraie "dans le modèle euclidien" ?…

La question n'est nullement "ontologique" (comme disent les philosophes), elle est simplement de deux ordres beaucoup plus familiers pour le professeur de mathéma-tiques :

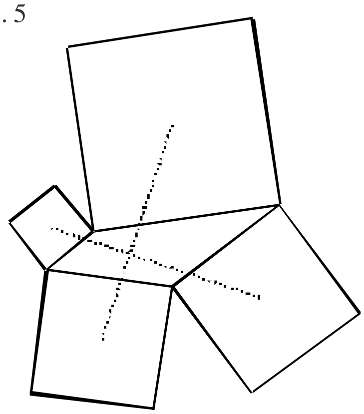
1. le fait d'avoir fait bouger les éléments de la figure suffit-il à se convaincre que le résultat observé est vrai dans tous les cas ?
2. comment pouvait-on avoir l'idée *d'imaginer à l'avance* qu'une telle propriété est vraie ou fausse ?…

Fig. 4



A1. Soit un parallélogramme ABCD. Sur chacun de ses côtés on construit, vers l'extérieur, le carré s'appuyant sur ce côté.
Les centres des carrés forment un carré.

Fig. 5



A2. Soit un quadrilatère convexe ABCD. Sur chacun de ses côtés on construit, vers l'extérieur, le carré s'appuyant sur ce côté.
Les segments de droites joignant les centres de carrés opposés sont perpendiculaires et de même longueur. »

Essayons de comprendre d'où pourrait provenir un tel résultat…

La légende attribue à Napoléon un "théorème" devenu très classique aujourd'hui : si l'on part d'un triangle quelconque ABC et que l'on construit sur les côtés des triangles équilatéraux comme sur la figure ci-contre, alors les centres de ces triangles sont les sommets d'un triangle équilatéral ; de plus les segments AA', BB', CC' sont égaux et font entre eux des angles de 60°.

Ce résultat "miraculeux" — dans la mesure où il permet d'obtenir une figure particulièrement symétrique à partir d'une figure quelconque — n'est pas dû au génie d'un empereur providentiel, mais date en réalité de 1869 et a été "découvert" par un mathématicien nommé Lionnet à propos d'un problème qui n'avait pas grand chose à voir…

Mais il est donc parfaitement concevable que certains géomètres se soient posés la question de savoir si le résultat pouvait être encore intéressant en partant d'un quadrilatère quelconque et en construisant des carrés à la place des triangles équilatéraux.

Constructions symétriques… résultat symétrique ?

Comme le montrent les figures 4 et 5, le résultat n'est pas tout à fait aussi miraculeux avec un quadrilatère ABCD quelconque : les centres des carrés forment un carré seulement dans le cas où le quadrilatère initial est un *parallélogramme*. Toutefois, on a en général un résultat partiel : les "diagonales" du quadrilatère obtenu sont toujours égales et perpendiculaires… Cela étant, on peut donc encore obtenir un véritable gain de symétrie en utilisant un résultat classique intermédiaire : comme les milieux des côtés d'un quadrilatère déterminent toujours un parallélogramme, il suffit de réaliser la construction en deux temps : d'abord le *parallélogramme des milieux* et ensuite les carrés sur les côtés du parallélogramme…

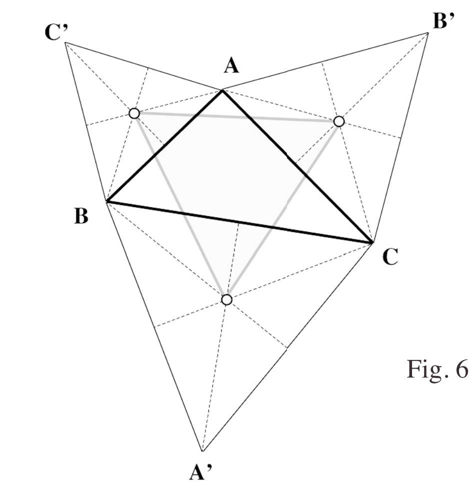


Fig. 6

A moins que l'on ne préfère opérer à l'inverse : d'abord les carrés sur les côtés… et ensuite le parallélogramme des milieux… Quand on se rappelle de la raison pour laquelle les milieux déterminent un parallélogramme et quand on fait appel à la propriété A2 précédente, on voit aisément que ce parallélogramme final sera un carré.

Est-ce le même ? Si vous vous posez ce problème, c'est que vous êtes précisément dans l'état d'esprit de *faire l'expérience* ! Pourquoi pas avec un logiciel de construction ?… Je ne doute pas que vous obtiendrez la réponse à la question… et que vous essaierez peut-être ensuite de comprendre *pourquoi*...

Mais ne serions-nous pas ici dans le creuset où se fondent les conjectures ? Le cas qui nous occupe est une piste particulièrement fascinante : celle des “chaînes de théorèmes”. Une induction généralisante semble très plausible (si l’on croit un tant soit peu à la providence) et, même si l’analogie ne se poursuit pas totalement, il n’est pas interdit de penser que l’on est en train de suivre un fil prometteur !

Malheureusement les “chaînes de théorèmes”, lorsqu’elles existent, cachent forcément des phénomènes très profonds. Certains sont devenus essentiels dans des pans importants des mathématiques — pensez par exemple aux propriétés “récursives” des constructions barycentriques ou aux empilements de dimensions en algèbre linéaire — mais d’autres restent au fond plus mystérieux.

Un exemple classique tourne autour des “théorèmes de Miquel et de Clifford”. En 1838, Miquel s’était aperçu que, lorsque l’on considérait quatre droites quelconques, les quatre cercles circonscrits aux quatre triangles obtenus passaient par un *même point* (Fig. 7).

Mais il s’était aussi rendu compte que, si l’on considérait cinq droites… alors les cinq points qui résultent de la construction précédente lorsqu’on la restreint à chacun des groupes possibles de quatre droites étaient sur un *même cercle* (Fig. 8).

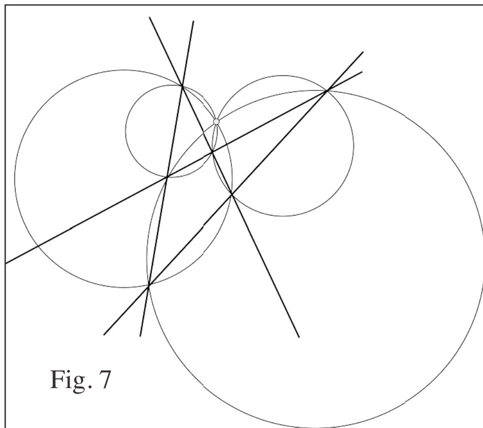


Fig. 7

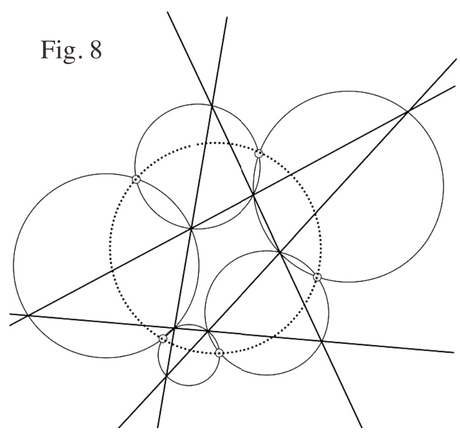


Fig. 8

En 1870 Clifford prouva le résultat étendu, non seulement au cas de six droites, mais à un nombre quelconque de droites ! Il avait compris de quelle manière “faire marcher les calculs” — et aussi, en vérité, *comment ne pas les faire…* — pour établir que, dans le cas de six droites, les six cercles trouvés par Miquel (associés aux six groupements possibles de cinq droites), passaient de nouveau par un même point… Qu’avec sept droites les sept points ainsi définis étaient de nouveau sur un même cercle… Etc., etc.

L’histoire compte ainsi quelques familles de “chaînes de théorèmes” — par exemple, dans un registre assez semblable, les théorèmes de Gohierre de Longchamps (*) — et il est clair

(*) A Note on the "Morley-Pesci-de Longchamps" Chain of Theorems Richmond J. London Math. Soc..1939; s1-14: 78-80 que cette idée peut être le moteur de nombre de conjectures.

D'ailleurs plus ou moins vouées à l'échec !

Un cas intéressant à cet égard tourne autour du fameux théorème de Morley qui dit que les trisectrices d'un triangle déterminent un triangle équilatéral (Fig 9).

Curieusement, le mathématicien Franck Morley, autour des années 1900, cherchait une chaîne de théorèmes dans la ligne du théorème de Clifford. Non pas en compliquant les configurations entre droites et cercles, mais en compliquant la nature des courbes mises en jeu. Ainsi, comme il travaillait (de manière assez originale pour l'époque) avec des nombres complexes, le cercle pouvait se ramener à des paramétrages du type :

$$t \to z = a + b.e^{it}.$$

Il chercha à voir ce que l'on pouvait obtenir avec des courbes de degré supérieur à un, et la plus simple étant du type :

$$t \to z = a + b.e^{it} + c.e^{2it}$$

— qui exprime en fait que le "cercle" $c.e^{2it}$ tourne sur le cercle $b.e^{it}$ (fig. 10) — il fut conduit à s'intéresser aux *cardioïdes*.

Et c'est apparemment ainsi qu'il fut amené à chercher *le lieu des foyers des cardioïdes tangentes aux trois côtés d'un triangle…*

Comme on le voit sur la figure 11, ce lieu est assez compliqué : il est composé de *neuf droites* ; et ces droites peuvent être groupées en trois groupes de trois droites parallèles, qui

Fig 9

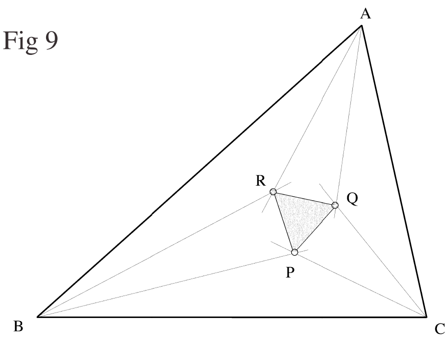


Fig 10

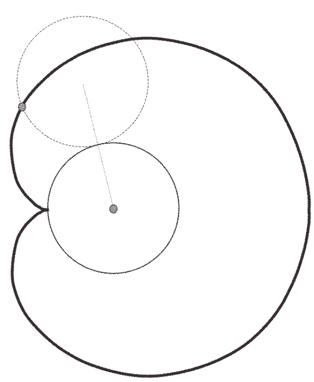
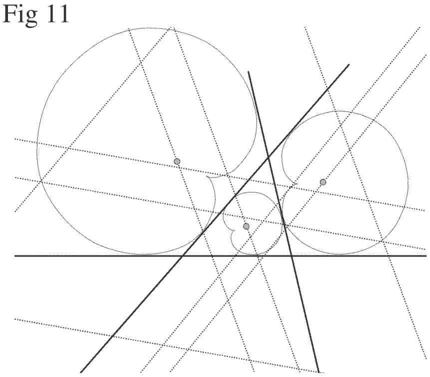


Fig 11



déterminent trois directions inclinées entre elles de 60°... et donc une foule de triangles équilatéraux...

Il est important — et à vrai dire presque suffisant… — de comprendre ce qu'il se passe exactement au niveau des intersections entre les droites, c'est-à-dire aux points singuliers du lieu qui nous occupe. Comme on le voit sur la figure 12, il est naturel de penser qu'un arc du lieu va correspondre à la famille de cardioïdes tangentes aux trois côtés.

Mais il est clair aussi que, lorsque cette famille de cardioïdes passe par la position où le côté du triangle est *doublement tangent*, il est possible de "bifurquer" et de poursuivre la variation des cardioïdes de manière à échanger les points de contact sur le côté horizontal.

Ceci permet évidemment de comprendre *a posteriori* les intersections des droites composant le lieu, mais ceci a surtout une conséquence complétement inattendue : un résultat de Laguerre précisant une propriété des tangentes issues d'un même point à la cardioïde stipule que la *tangente double* — c'est-à-dire ici le côté BC du triangle dans la figure 14 — est telle que la droite joignant le point d'intersection B avec le foyer n'est autre que la *trisectrice* de l'angle ABC formé par les deux tangentes issues de B !

Et voilà pourquoi... la figure 14 formée par les trisectrices fait apparaître — à partir des trois droites du lieu et de leurs intersections — un *triangle équilatéral*...

Ainsi le "théorème de Morley" est devenu célèbre pour une propriété qui n'était nullement *conjecturée* (comme on dit aujourd'hui) et, pour conclure, je vous ferai observer que

Fig 12

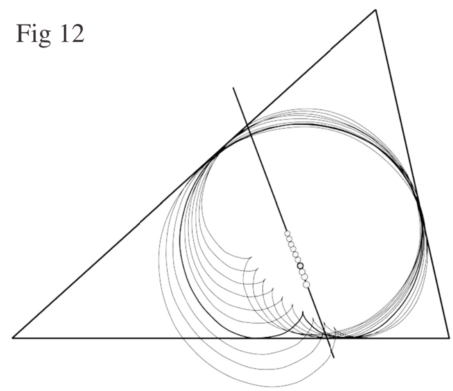


Fig 13

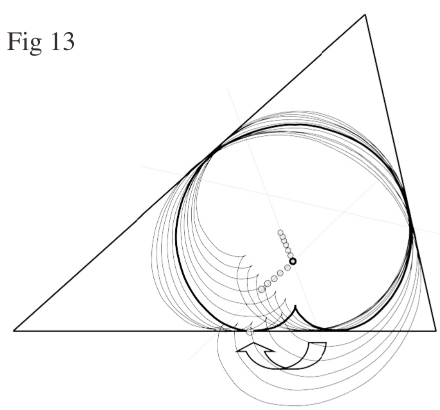
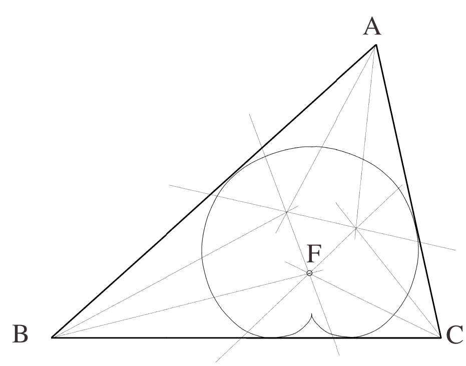


Fig 14



personne — depuis des millénaires — n'avait jamais eu la moindre idée d'expérimenter dans l'espoir de découvrir ce que pouvaient bien cacher les trisectrices d'un triangle.

Mais il n'y a bien entendu aucune raison de se décourager : même lorsqu'elles ne donnent pas des résultats particulièrement enthousiasmants, les “chaînes de théorèmes” sont susceptibles de dégager des pépites. Rien ne vous interdit donc de tenter — par exemple — de voir à l'aide de votre logiciel préféré si vous pouvez poursuivre la chaîne à partir de la figure 6 et de la figure :

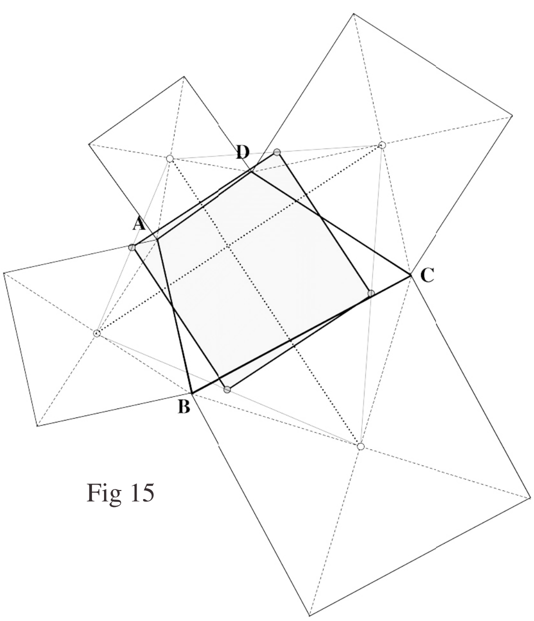


Fig 15

Fig 18

en cherchant ce que l'on pourrait bien obtenir avec des pentagones...

Faute de réussites immédiates et tangibles, vous pourrez toujours faire comme Victor Thébault... qui a énormément cherché à étendre les propriétés des triangles aux tétraèdres...

2. Expérimenter, comment ?

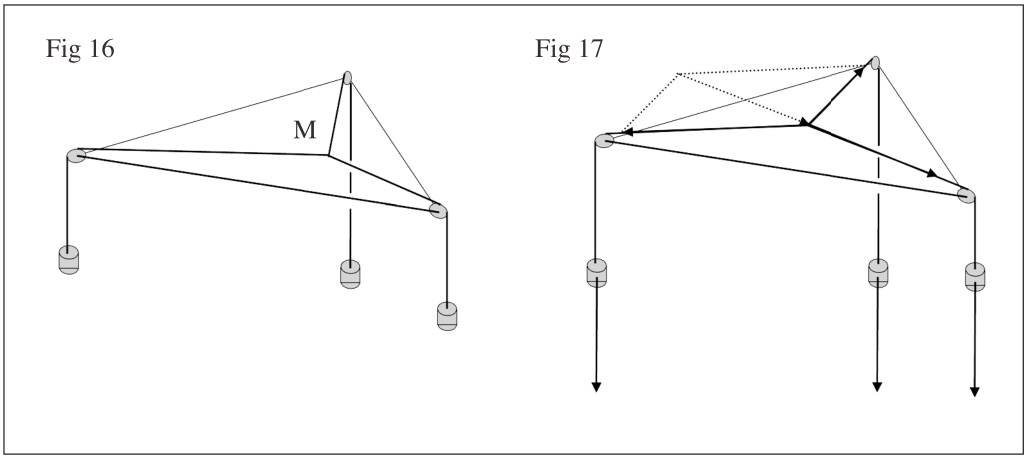
Si tout ce qui vient d'être évoqué est intéressant au niveau de la découverte et de la vérification, le problème qui nous intéresse plus particulièrement ici est celui de l'apprentissage et celui de l'*investigation*.

En quoi peut-on tirer parti de l'expérimentation lors de la résolution d'un problème de géométrie ?

Un exemple classique d'illustration de l'appel à l'expérience concerne généralement une des propriétés que nous avons rencontrées précédemment à propos du “théorème de Napoléon” et de la figure 6 : les segments AA', BB' et CC' se coupent, comme nous l'avons dit, selon des angles de 60°... et ils déterminent ce que l'on appelle le “point de Torricelli” du triangle. Ce point est en fait — dans le cas où les angles du triangle sont inférieurs à 120° — la solution du “problème de Fermat”, qui consiste à trouver le point M du plan tel que la somme MA + MB + MC des distances aux trois sommets soit *minimale*.

L'expérimentation “physique” est intéressante, non pas tant par son caractère véritablement “expérimental”, mais par les arguments auxquels le raisonnement fait appel.

Considérons en effet le montage représenté sur la figure 16, dans laquelle les trois masses



utilisées sont identiques et où l'on cherche la *figure d'équilibre* du système...

D'après le *principe de l'énergie minimum*, cet équilibre sera réalisé lorsque les trois masses occuperont globalement la position la plus basse possible. Cela correspondra donc à la *plus courte longueur* de cordelette située dans le plan horizontal... donc à la position où M fournira une *somme des distances minimale* par rapport aux sommets du triangle.

Or, *comme l'on sait*, cet équilibre correspond aussi à la position de M qui fournira une *résultante nulle* pour les forces qui lui sont appliquées. Un coup d'œil sur la figure 17 montre alors que chacun des "brins" attachés à M est sur la bissectrice de l'angle formé par les deux autres : il en résulte aisément que les angles entre les segments valent bien 120°.

Inutile de dire que cet intermède est relativement passionnant... Il éclaire d'une manière particulièrement intéressante — me semble-t-il — la question de l'expérimentation en géométrie, dans la mesure où nous sommes ici manifestement confrontés à une situation de *modélisation* (comme l'on dit aujourd'hui) et que la "posture" vis-à-vis de cette notion de modélisation est devenue un peu plus sensée que celle à laquelle nous ont habitués les instructions sur les programmes de terminale S.

En effet, si l'exemple précédent est une expérimentation en géométrie, il faut bien constater que c'est la situation physique qui vient *éclairer le modèle mathématique*... et partant, que ce n'est plus simplement le "miracle mathématique" qui viendrait systématiquement au secours des autres sciences !

On ne peut que se réjouir de cette mise en perspective plus raisonnable des rapports entre maths et physique. Toutefois, il n'est pas interdit de se demander en quoi un tel exemple constitue vraiment une *aide à la découverte* de quoi que ce soit...

Si l'on se pose concrètement la question de trouver le point réalisant le minimum, quel élève est capable de "voir la situation", de faire le lien entre les deux principes physiques invoqués pour l'occasion (principe du minimum et résultante des forces)... et enfin de ne pas plutôt conclure que c'est — à l'inverse — ce genre d'illustration qui permet de *se convaincre que les principes sont réellement équivalents* ?

En vérité, nous touchons là aux limites de ce qu'il faudrait envisager comme lien entre physique et géométrie sous l'angle expérimental : *qui explique qui* ?

Je reviendrai partiellement sur cette question dans la troisième partie, et je me contenterai pour l'instant de souligner une autre leçon particulièrement importante de l'exemple : comme je l'ai signalé au passage, le "problème de Fermat" — c'est-à-dire celui de trouver le minimum de la somme des distances aux sommets du triangle — n'admet comme solution le "point de Torricelli" que dans le cas où le triangle n'est pas trop aplati.

Nous avons donc là un exemple où la vérification expérimentale — je veux dire évidemment, la vérification "à la souris" à l'aide d'un logiciel de construction... — risque fort de ne pas être concluante. On peut certes vérifier le résultat sur une (quasi-)infinité de cas de figures possibles, et même sur toute une partie très importante de l'ensemble des valeurs possibles prises par les données initiales, sans s'apercevoir qu'il y a aussi *une foule de cas qui ne marchent pas* !

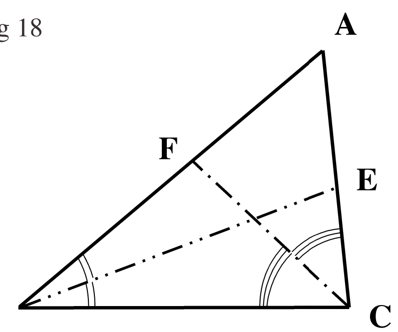
En d'autres termes, informatique ou pas, la vérification sur la figure, dynamique ou pas, reste une vérification sur *certains cas* de figures.

Elle ne permet jamais de *conclure*,... elle ne devrait jamais *entraîner la conviction*...

Mais revenons au cœur de notre sujet, et intéressons-nous à une véritable démarche de recherche dans un problème précis, pour voir comment l'expérimentation se joint au raisonnement afin d'avancer vers une solution.

Je m'intéresserai désormais à la question suivante, connue sous le nom de "théorème de Lehmus Steiner" (1840) :

Fig 18



Si les bissectrices intérieures BE *et* CF *d'un triangle sont égales, alors ce triangle est isocèle en* A.

Le problème est plus difficile qu'il n'en a l'air, et en tout cas beaucoup plus difficle que le problème analogue pour les médianes : *Si deux médianes sont égales, le triangle est isocèle* (Fig. 19) ou pour les hauteurs : *Si deux hauteurs sont égales le triangle est isocèle* (Fig. 20). Pourquoi ?

Je ne m'étendrai pas ici sur des généralités inutiles à propos de la mise en place d'un raisonnement, mais chacun sait que l'on envisage classiquement deux types de démarches, l'*analyse* et la *synthèse*, qui sont respectivement censées permettre de "remonter" de la conclusion cherchée aux hypothèses et de

Fig 19

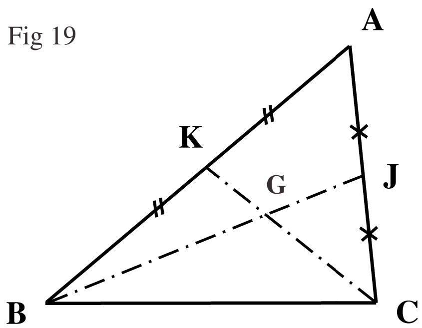
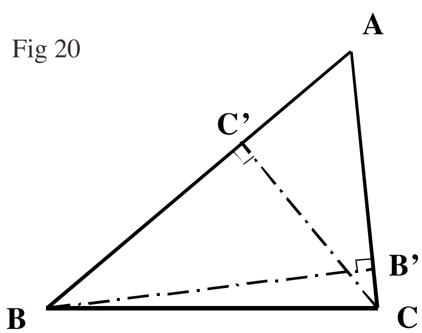


Fig 20

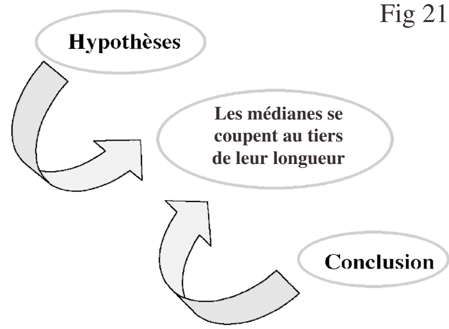


“déduire” la conclusion à partir des hypothèses.

En vérité les choses se passent le plus souvent de manière beaucoup plus subtile : il s'agit bien de construire un cheminement logique permettant de partir des hypothèses et de parvenir à la conclusion, mais la vraie difficulté est de trouver les étapes de ce chemin... et donc “d'avoir des idées” !

Un peu de métier doit donc amener à sentir les étapes — ou si l'on préfère : les propriétés intermédiaires — et pour cela il convient en fait de tenir compte aussi bien des indices contenus dans les hypothèses que dans la conclusion... Ainsi, dans le cas de la figure 19 nous serons dans un schéma du type :

Fig 21



et le fait que les médianes sont égales va entraîner que le triangle BCG est isocèle... puis il suffira de se laisser porter par la symétrie par rapport à la médiatrice de BC.

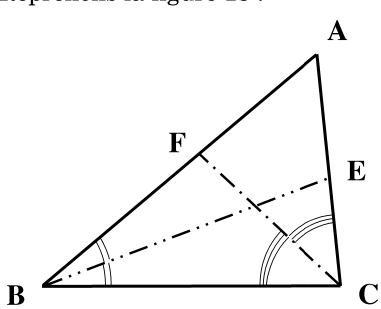
De façon analogue, dans le cas de la figure 20, la propriété intermédiaire pourrait être : “l'aire se calcule à l'aide des hauteurs et des bases correspondantes”... et il suffira de penser à calculer l'aire du triangle des deux manières possibles...

La difficulté du problème de Lehmus Steiner réside donc tout bonnement dans un fait : comment trouver une “propriété intermédiaire” pertinente ?

Evidemment, je n'ai pas choisi la question tout à fait au hasard ! D'abord l'idée intermédiaire *ne peut pas être évidente* car le résultat est faux avec les bissectrices extérieures... ce qui montre que les seules idées qui tournent autour de l'égalité des angles ne peuvent suffire et qu'il s'agit d'injecter aussi des arguments qui prennent en compte la "topologie" (intérieur-extérieur) du triangle. Ensuite parce que le problème est tout simplement célèbre par le fait que l'on n'a pas réussi jusqu'ici à le résoudre par un cheminement logique *direct*, mais que toutes les solutions connues reposent peu ou prou sur un raisonnement par l'absurde.

Ceci ne doit évidemment pas nous empêcher d'explorer la figure pour trouver des idées qui seront susceptibles de servir d'intermédiaires dans le raisonnement...

Reprenons la figure 18 :



et posons-nous la question sous la forme : « que peut-on obtenir d'autre qu'un triangle isocèle si les bissectrices BE et CF sont égales ? ». Nous serons donc immédiatement amenés au problème suivant : *construire un triangle* ABC *dont les longueurs des bissectrices* BE *et* CF *sont données*.

Donnons-nous alors un segment BC et une longueur commune à BE et CF et analysons les constructions possibles de l'ensemble de la figure. Une fois placé BE, le reste doit suivre : la droite BA est obtenue par la condition sur l'angle en B, le troisième côté est fixé puisque CA n'est autre que CE et il nous restera à construire la bissectrice de l'angle en C pour obtenir la direction de CF, puis à reporter la distance CF sur cette droite.

Reste à savoir, évidemment, si ce point F voudra bien être non seulement sur la droite BA, mais encore sur le côté BA... ou si l'on préfère, si le point F veut bien coïncider avec le point d'intersection F' entre les droites BA et CF...

Il me semble que c'est précisément à propos de ce genre de questions que peut intervenir de manière constructive l'expérimentation et, surtout, l'expérimentation à l'aide de logiciels de constructions dynamiques. En effet je ne connais pas de meilleur outil aisément accessible pour déterminer des lieux, et il se trouve qu'une partie intéressante de la réponse cherchée réside justement dans la *visualisation d'un lieu géométrique*.

Nous ne sommes devant rien d'autre que devant la question de savoir *comment varie le point* F' *en fonction des choix initiaux* (points B et C "fixés" et point E mobile) et dans quelle mesure ce point veut bien *appartenir au cercle de centre* C *et de rayon* BE = CF.

Demandons (Fig. 22) à un logiciel le *lieu du point* F', il nous montrera la figure "compliquée" (et manifestement de degré au moins quatre) qui coupe (ici) le cercle de centre C en quatre points...

Il est ensuite assez facile de faire varier les conditions initiales pour se donner l'impression de simplifier le problème, mais ce qu'il faut conclure de cette *expérience* (au sens fort du terme), c'est que cette idée ne pourrait déboucher sur une piste intéressante qu'avec beaucoup de travail permettant de réduire les cas de figures parasites. C'est possible, mais cela devient vite sans intérêt...

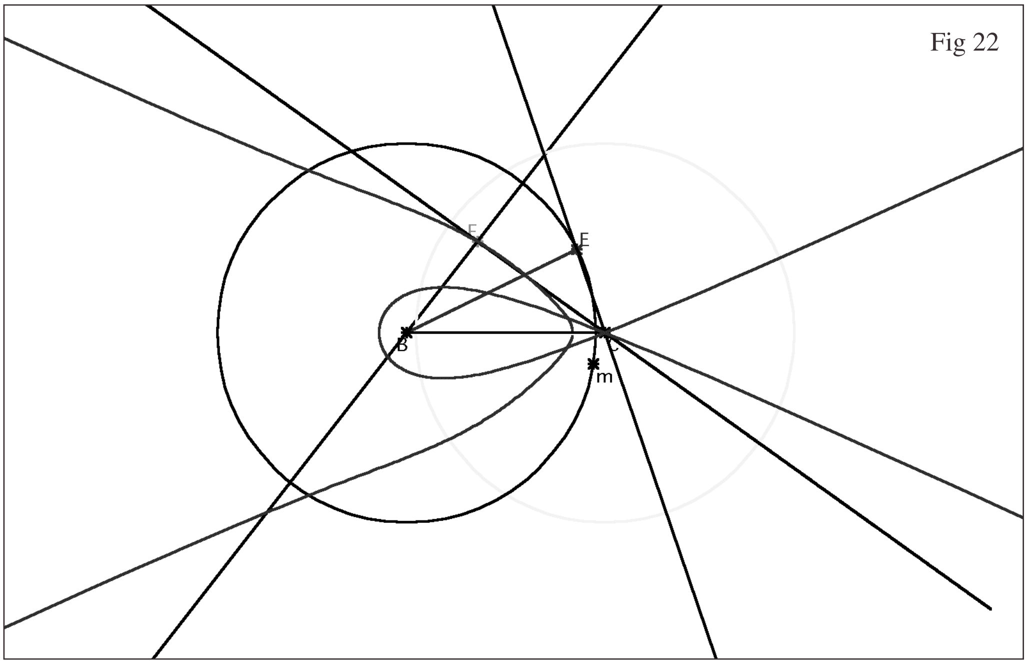


Fig 22

Dans une situation semblable, mieux vaut — la plupart du temps — chercher une autre idée et voir si d'autres lieux pourraient être susceptibles de nous convaincre que la seule construction possible est bien celle du triangle isocèle. Une autre piste (par exemple) consisterait à reprendre la construction précédente en définissant le point f sur la droite BA et en cherchant à quelles conditions le point C' qui est situé à la distance BE de f sur la droite Cf est effectivement confondu avec le sommet C. Nous chercherions alors le lieu du point C' (Fig. 23) obtenu sous ces conditions. Mais une analyse rapide vous montrera que des cas comme ceux de la figure 24 rendent délicate une conclusion élémentaire.

Bref. Vous pourrez naturellement explorer toutes les pistes que vous souhaitez et voir si elles vous permettent d'aboutir ! Je résume simplement ici cet aspect de l'expérimentation dans la démarche de recherche : elle permet de se faire une opinion sur la validité d'une piste ou d'une idée et, essentiellement, elle fait appel à *l'analyse* au sens où il s'agit de prendre en compte la variation de certains éléments de la figure en fonction de ceux auxquels on a décidé d'accorder certains degrés de liberté.

On notera au passage qu'il s'agit bien là, *au sens le plus physique du terme*, d'expérimenter pour savoir *comment certaines grandeurs varient en fonction d'autres grandeurs*. Je dois dire que c'est — de mon point de vue — la seule manière constructive et non criticable d'aborder *le problème de l'expérimentation en géométrie*. Et il ne me semble

Fig 23

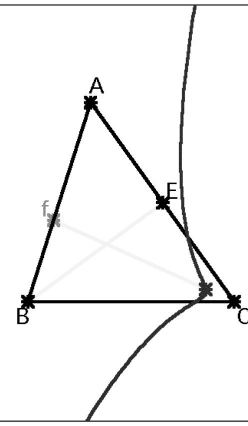
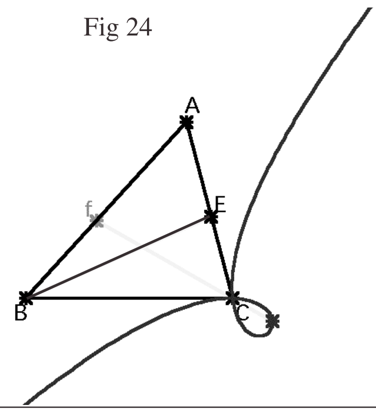


Fig 24



pas que sous cet angle, on puisse faire la moindre réserve sur l'aspect didactique des logiciels de géométrie dynamique. Que demander de plus à un élève s'il sait décortiquer un problème de manière à le ramener à l'observation de variations pertinentes et susceptibles de lui donner les étapes d'une construction ? S'il sait tirer profit des fonctions observées ? S'il a su, au demeurant, effectuer les constructions de manière à ce que le logiciel puisse répondre aux questions qu'il se pose ? Je terminerai simplement l'étude de cet exemple par une dernière illustration — sans doute la plus naturelle et la plus élémentaire — de ce que l'on peut attendre d'un logiciel.

Lorsque l'on ne sait plus très bien raisonner simplement sur une figure, il est souvent salvateur de se pencher vers les calculs (et inversement, d'ailleurs...). Nous pouvons donc chercher à nous mettre en état de calculer sur la figure. Nous poserons BE = CF = d et nous désignerons par a le demi-angle en B (cf. figure 25). Avec les notations habituelles pour désigner les longueurs des côtés de ABC, nous obtiendrons alors, en calculant l'aire du triangle de deux façons :

$$\mathcal{A} = a.\delta.\sin\alpha + c.\delta.\sin\alpha = c.a.\sin 2\alpha,$$

d'où l'on tire :

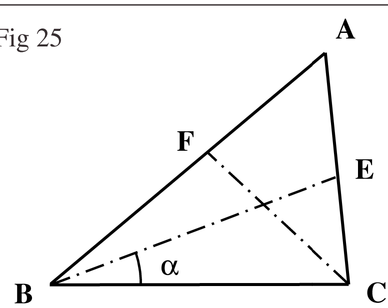
$$(a + c).\delta.\sin\alpha = c.a.\sin 2\alpha = 2c.a.\sin\alpha.\cos\alpha,$$

et donc : $(a + c).\delta = 2c.a.\cos\alpha$.

Ce qui nous permet d'exprimer c à partir des données a, α et δ : $c = \dfrac{a\delta}{2a\cos\alpha - \delta}$ puis, en considérant a et δ fixés, d'étudier l'aire $\mathcal{A}$ du triangle en fonction de α :

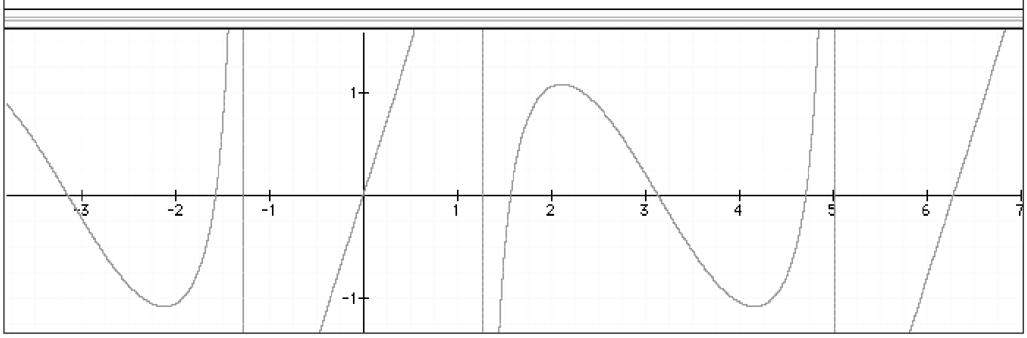
$$\mathcal{A} = \frac{a\delta}{2a\cos\alpha - \delta}\, a.\sin 2\alpha = \frac{a^2\delta\sin 2\alpha}{2a\cos\alpha - \delta}.$$

Fig 25



$$y = \frac{\sin 2x}{\cos x - 0{,}3}$$

Fig 26



Il nous reste à constater que, dans les limites raisonnables, la donnée de l'angle α *détermine de manière univoque l'aire du triangle* ABC ... Si bien que, en échangeant les rôles de B et C (sans modifier les données a et δ), il apparaît par exemple que l'angle en C est nécessairement le même que l'angle en B...

Rien n'interdit alors, évidemment, de faire appel à un "traceur de courbes" pour constater ce fait expérimentalement. Il ne restera plus qu'à chercher à le *justifier* analytiquement par l'étude de la fonction explicite !

3. La *méthode expérimentale ...*

Evidemment, il n'est pas difficile de tomber d'accord sur le fait que les mathématiques ne constituent pas une science essentiellement *expérimentale*. Plus précisément : la *réflexion* mathématique interroge rarement la *réalité* pour établir ses théorèmes et le plus clair du temps passé à faire des mathématiques fait visiblement plus appel à la logique déductive qu'à l'expérimentation telle que la conçoivent les sciences physiques… D'ailleurs les grands problèmes qui préoccupent les mathématiciens, même s'ils découlent pour une grande part des activités concrètes de la mesure ou de la prédiction des phénomènes physiques, ne s'attachent plus qu'à un monde idéal, abstrait — pour ne pas dire tout simplement, platonicien — et la plupart de ces problèmes consiste précisément à se prouver que tel ou tel résultat, telle ou telle proposition est "logiquement" impossible.

Il n'y a pas en effet (du moins *a priori…*) un grand *intérêt physique* à dépenser de l'énergie pour démontrer que la racine carrée de deux ne saurait être une fraction ou bien pour se convaincre qu'il n'y a que cinq polyèdres réguliers théoriquement réalisables. Mais au-delà de ces problèmes emblématiques qui suffisent à distinguer les préoccupations des géomètres de celles des "expérimentateurs" au sens physique du terme, il faut bien comprendre que la démarche même des mathématiques a toujours entretenu avec notre "expérience" des rapports particulièrement complexes.

Il suffit pour s'en convaincre à un niveau des plus élémentaires de réfléchir à l'introduction par les géomètres grecs de la notion apparemment naturelle "d'égalité" entre les figures. Que signifiait exactement pour eux cette idée que nous ramenons aujourd'hui au concept *d'isométrie* — quelque peu pédant au niveau du primaire ou du collège… — et pour laquelle ils semblaient bien s'en tenir à des "cas" ou à des "définitions" ? Qu'y a-t-il, au fond, de commun entre des constatations pratiques ou intuitives qui font apparaître que des triangles qui ont (par exemple) des côtés égaux auront nécessairement les mêmes angles,… des considérations pragmatiques qui obligent à admettre que l'on ne pourra guère construire "qu'un seul triangle" si on s'est donné la longueur de ses côtés,… et l'idée bien idéalisée qu'il s'agit là, en définitive, d'un problème qui amène à prendre en compte des *transformations géométriques* n'engageant plus seulement la *figure* considérée, mais qui doivent être pensées comme agissant sur le plan tout entier…

Un peu d'habitude, sans doute, permet de se retrouver dans ces détours de la pensée et dans les choix qui ont prévalu, à chaque époque, entre les directions possibles ; mais il vous suffira d'étendre le problème à la notion d'égalité entre "solides" (comme disaient les grecs) pour vous rendre compte que des problèmes apparemment simples n'en cachent pas moins d'indéniables difficultés. Que pensaient-ils exactement, en effet, lorsqu'ils *définissaient* les solides égaux par *l'égalité de leurs faces* respectives… alors qu'il a fallu attendre 1813 pour que Cauchy *démontre* — ce qui est d'ailleurs loin d'être immédiat — que des polyèdres convexes ayant les mêmes faces sont effectivement isométriques ?

La vérité est que, même au niveau des définitions, les mathématiques ne sont jamais simples et que leur rapport à l'expérience est quelque chose de fort mystérieux… Poincaré l'expliquait il y a bien longtemps (*) : « Prenons par exemple l'idée de fonction continue. Ce n'est d'abord qu'une image sensible, un trait tracé à la craie sur le tableau noir. Peu à peu elle s'épure ; on s'en sert pour construire un système compliqué d'inégalités, qui reproduit toutes les lignes de l'image primitive ; quand tout a été terminé, on a *décintré*, comme après la construction d'une voûte ; cette représentation grossière, appui désormais inutile, a disparu et il n'est resté que l'édifice lui-même, irréprochable aux yeux du logicien. »

Il y a naturellement une foule d'exemples analogues… Mais si ces considérations éclairent d'abord les difficultés épistémologiques propres aux mathématiques, elles deviennent d'une importance capitale en matière d'apprentissage.

Evidemment, le rôle du maître, comme le dit plus loin Poincaré, est — au moins momentanément — de rétablir les *cintres* indispensables à la compréhension. Bien sûr, au plan des définitions, mais surtout, et notamment aux niveaux d'enseignement qui nous occupent ici, en faisant appel à l'*expérience*. Et je veux dire évidemment à l'expérience sous toutes ses formes et en particulier aux différents aspects des "expériences" que j'ai évoquées précédemment. Ecoutons encore un peu Poincaré :

(*) dans *Science et méthode*.

« […] le professeur dicte : le cercle est le lieu des points du plan qui sont à la même distance d'un point intérieur appelé centre. Le bon élève écrit cette phrase sur son cahier ; le mauvais élève y dessine des bonshommes ; mais ni l'un ni l'autre n'ont compris ; alors le professeur prend la craie et trace un cercle sur le tableau. « Ah ! pensent les élèves, que ne disait-il tout de suite : un cercle c'est un rond, nous aurions compris. » Sans doute, c'est le professeur qui a raison. La définition des élèves n'aurait rien valu, puisqu'elle n'aurait pu servir à aucune démonstration, et surtout puisqu'elle n'aurait pu leur donner la salutaire habitude d'analyser leurs conceptions. »

Quel enseignant pourrait ne pas souscrire à une telle profession de foi ? Et qui ne souscrirait encore au conseil qui suit : « Mais il faudrait leur montrer qu'ils ne comprennent pas ce qu'ils croient comprendre, les amener à se rendre compte de la grossièreté de leur concept primitif, à désirer d'eux-mêmes qu'on l'épure et le dégrossisse. »

Aurez-vous reconnu au passage l'éternelle ambition des cours de mathématiques ? N'aurait-on pas déjà donné — et combien de fois depuis un siècle — en matière d'enseignement magistral dogmatique… auquel il conviendrait de réagir enfin de manière pragmatique, en aidant vraiment l'enfant à construire son savoir ?… Poincaré me pardonnera, je l'espère, de m'être placé à un niveau bien moins ambitieux.

La présente réflexion n'ose pas vraiment se fixer comme but explicite que les élèves acquièrent la “salutaire habitude d'analyser leurs conceptions” ou se mettent dès maintenant à “désirer d'eux-mêmes qu'on [les] épure et [les] dégrossisse”. On l'aura sans doute compris aussi, elle ne se fixe pas même comme objectif immédiat que les enfants soient capables d'élaborer des “démonstrations”… En amont, en effet, des *démonstrations* — et notamment pour l'exemple de la définition du cercle à laquelle Poincaré fait allusion —, en amont des raisonnements structurés, en amont des *discours*, il y a la prise en main *expérimentale* du cercle au travers des constructions au compas et à la règle. Et il me semble bien clair que la différence entre un “rond” et un “cercle”, l'idée même — ou la conception, si l'on préfère — de cercle, passe par son usage “physique” et par sa mise en œuvre plus ou moins empirique dans la résolution de problèmes.

Comme je l'ai dit au début de cet exposé, il y a toujours un peu de “pensée magique” dans les tentatives pédagogiques destinées à contourner le formalisme inhérent à l'apprentissage des mathématiques.

Le sujet d'aujourd'hui n'échappe pas vraiment à cette tendance en mêlant tout à la fois “expérimentation”, “investigation” et *utilisation de l'ordinateur* ! Et à n'en pas douter, la raison fondamentale de l'espoir attaché à ces thèmes et à l'usage des logiciels (quand ce n'est pas un simple prétexte pour développer la pratique des technologies modernes…) est plus à lire comme une nouvelle tentative pour limiter l'emprise du formalisme et du dogmatisme que comme une confiance aveugle dans l'intérêt effectif de telles démarches.

Je ne suis évidemment pas compétent pour entrer dans une analyse sérieuse des avantages et des inconvénients des pédagogies fondées plus ou moins exclusivement sur le "tâtonnement expérimental". Je ne pourrais guère, d'autre part, faire autre chose que défendre mes goûts personnels s'il s'agissait simplement de dire dans quelle mesure les constructions à la règle et au compas, ou les méthodes "papier – crayon", sont plus ou moins formatrices que les constructions effectuées à l'aide des logiciels de géométrie dynamique… Je voudrais donc uniquement, pour terminer, rappeler quelques éléments de réflexion qui me semblent ne pas devoir être négligés dans la problématique qui nous occupe.

Expérience et langage

Si *l'expérimentation* fait appel à la vérification ou à l'observation du *réel* — qu'il s'agisse ici du réel "physique" ou du réel d'une "figure géométrique" —, les *démonstrations* auxquelles aspirent en définitive toutes les démarches mathématiques n'ont essentiellement d'existence que dans l'univers du *langage*.

Indépendamment de tout le reste, c'est autour des rapports entre ce (ou ces) langage(s) mathématique(s) et la (ou les…) réalité(s) que se cristallisent une grande part des obstacles rencontrés dans l'enseignement. D'une certaine manière un des exercices emblématiques des évaluations auxquelles les élèves français sont (semble-t-il) assez peu préparés est celui de la figure 27.

Il illustre bien, effectivement, l'écart entre un apprentissage formel et un certain idéal d'apprentissage "pragmatique" auquel seraient plus habitués les enfants d'autres pays. On ne peut d'ailleurs pas nier que les mathématiques enseignées en France sont nettement plus tournées vers l'abstraction et la diffusion d'outils généraux que les enfants — qu'ils recopient proprement les définitions ou qu'ils se contentent de dessiner des bonshommes… — ont bien peu l'occasion de mettre en application.

Il est clair que le mot d'ordre actuel fondé sur la démarche expérimentale est en

Vous voyez ci-dessous une carte de l'Antarctique.

Fig 27

Estimez l'aire de l'Antarctique en utilisant l'échelle de cette carte. Montrez votre travail et expliquez comment vous avez fait votre estimation. (Vous pouvez dessiner sur la carte si cela vous aide pour votre estimation).

grande partie justifié par ce type d'observations, mais il me semble que l'on aurait tort de s'imaginer trop vite qu'une quelconque panacée soit susceptible de résider dans l'idéalisation excessive du "concret"… Je n'en prendrai qu'un seul exemple (cf. figure 28), glané sur le site de l'indépassable Irem de Lyon, et qui illustre bien la façon dont beaucoup de réponses aux questions géométriques ne sauraient résulter de vérifications sur une figure, numérisée ou non…

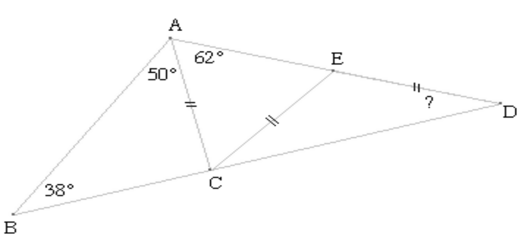
Ce n'est pas trahir un grand secret de rappeler que le rêve de bon nombre de ceux qui programment des "résolveurs" est de pouvoir travailler avec des *figures fausses*… Mais la vérité est tout bonnement que l'apprentissage de la géométrie suppose l'apprentissage de *langages*, et que parmi ces langages celui de la *figure* a toujours occupé une place éminente. Il comporte de multiples facettes : il est support de mesures, de calculs, de constructions, de raisonnements, de vérifications dynamiques, etc., etc. Et l'on sait par exemple depuis longtemps qu'une foule d'activités autour des figures est particulièrement formatrice.

Et si le temps n'est certes plus à l'apprentissage systématique de la géo-

30 = 31 = 32 !!! Voici l'énoncé d'un problème et les réponses de trois élèves.

Tracer un triangle ABC tel que l'angle B mesure 38° et l'angle A mesure 50°.
Construire le point E, sachant que
– l'angle CAE est adjacent à l'angle BAC et mesure 62°
– AC= CE
Sur la demi-droite [AE), placer le point D tel que EC = ED.

Calculer la mesure de l'angle D



Jules	**Julie**	**Julot**
Dans le triangle BAD :	Le triangle CAE est isocèle en C,	Dans le triangle ABC,
< BAD = 112° et < ABD = 38°	donc < AEC = 62°	< ACB = 180° – (50° + 38°) = 82°
donc < D =180° – (112° + 38°)	< CED = 180° - 62° = 118°	Dans le triangle ACE, isocèle en C,
< D = 30°	Le triangle CED est isocèle en E,	< ACE = 180° – (62° + 62°) = 56°
	donc < D = (180° -118°)/2	D'où < ECD = 180° – (56° + 32°) = 32°
	< D = 31°	ECD est isocèle en E, donc **< D = 32°**

Qu'est-ce qui cloche ?

Fig 28

métrie descriptive, il est clair que des exercices comme celui qui consiste (par exemple) à tracer sur une figure telle que la figure 29 l'intersection du cube avec le plan passant par trois points donnés sur les faces visibles vaut largement tous les problèmes de démonstrations géométriques… Même si le langage utilisé est essentiellement celui de la figure.

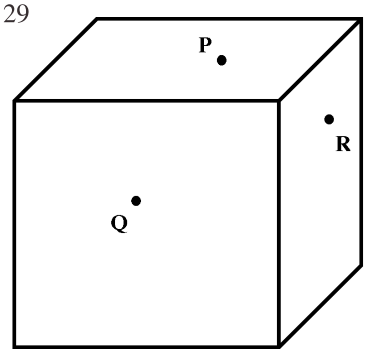
Il ne faut pas — bien sûr — se faire d'illusions sur les remèdes miracles propres à faciliter cet apprentissage. En revanche, l'aspect indiscutablement positif de la tendance actuelle est d'abord — et peut-être surtout — dans le fait que l'encouragement à l'utilisation des logiciels de géométrie dynamique constitue un engagement profond en faveur de l'importance des *figures* en géométrie… Ce qui, malheureusement, ne va pas de soi pour tout le monde !

Expérience et heuristiques

Plus concrètement, au delà du côté un peu incantatoire de l'appel à *l'expérience* et du côté un tantinet “tendance” de la promotion systématique de *l'outil informatique*, la vraie question réside essentiellement dans l'importance de la place donnée à l'aspect *investigation*, c'est-à-dire au fond — comme on l'a vu précédemment — aux *démarches heuristiques*.

Plus qu'à n'importe quelle autre époque, les *maths modernes* ont mis l'accent sur la *rigueur* et sur les *démonstrations*. L'élève était censé construire son propre savoir mais, confronté à de perpétuelles nouveautés plus abstraites (et absconses) les unes que les autres, il n'avait sans doute jamais autant été soumis à une discipline aussi formaliste et dogmatique. L'essentiel de la réaction à cette tendance a résidé dans un retour à la *résolution de problèmes*. Problèmes ouverts,

Fig 29



problèmes concrets, activités de toutes sortes sont devenus “incontournables”… et la démarche classique tournée vers l'apprentissage du “raisonnement” et de “la” démonstration, tout en cédant apparemment du terrain, s'est recentrée vers des didactiques fondées sur le credo : « On observe, on conjecture, on démontre ».

Que peut-on rêver de mieux ? Le travail du mathématicien n'est-il pas de *résoudre des problèmes* ? De *faire des conjectures*… et parfois même de passer des siècles à les démontrer ? L'apprentissage consistera donc désormais à “faire” des mathématiques et à *faire des mathématiques* comme les fait le spécialiste !

Admettons. Admettons, pour être plus précis, que l'apprentissage gagne fondamentalement à cette imitation systématisée de ce que l'on pense être le travail de l'expert. Est-on si sûr que cela du fait que l'expert *observe*, *conjecture*, puis *démontre* ?

Certes le mot conjecture condense à lui seul ce qu'un certain grand public peut rapporter au mythe des mathématiques : conjecture de Riemann, conjecture de Fermat, conjecture de Golbach, etc. Mais ne serait-ce pas là, précisément, l'exceptionnel du métier de mathématicien et le triptyque rituel fonctionne-t-il vraiment de cette manière au quotidien ?

Qu'on le dise ou non, le retour à l'expérience dans la démarche d'apprentissage en général et de résolution de problèmes en particulier amène à une forme nouvelle de réflexion didactique, car ce que ne dit pas le "on observe, on conjecture, on démontre", c'est *comment on observe* et *ce que l'on observe*… Et il dit encore moins où il faudrait placer *l'expérimentation* dans ce schéma…

En effet, aucun scientifique ne saurait sérieusement assimiler *observation* et *expérience*. Chacun sait au contraire que les expérimentations sont le plus souvent faites pour vérifier des hypothèses, et que les observations fortuites sont des exceptions, d'ailleurs généralement effectuées lorsqu'une expérience n'aboutit pas vraiment à ce qui avait été conjecturé au départ…

En réalité le travail du scientifique se résume plutôt dans la boutade de René Thom :

1. Avoir une idée (si possible bonne),
2. Vérifier expérimentalement si elle marche.

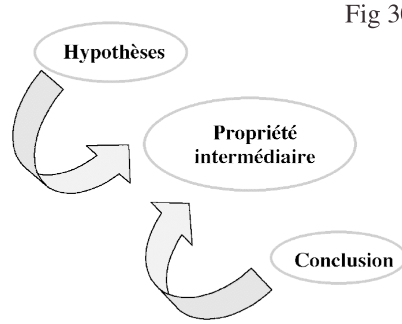
C'est en ce sens qu'il faut modifier le fameux triptyque : on *se pose une question*, on *expérimente pour chercher à savoir si c'est vrai*, on *démontre*. Et encore : la question ultime serait de savoir *pourquoi* on démontre ; ce n'est heureusement pas notre sujet ici… Pour ma part, je dirai simplement avec Henri Poincaré que c'est essentiellement pour « se donner l'illusion qu'on aurait pu prévoir le résultat (*) » …

(*) Sur la dynamique de l'électron, *juillet 1905*.

Mais revenons à la question de l'expérimentation. On aura sans doute compris que les exercices du type : « 1. construisez telle figure avec tel logiciel de géométrie dynamique, 2. conjecturez…, 3. Enoncez la propriété et démontrez-la. », ne me semblent pas vraiment naturels !

Au risque de paraître iconoclaste, il me semble nettement moins artificiel, soit de poser carrément une question sans faire semblant de la faire découvrir à l'élève après un simulacre d'observation, soit de donner des exercices qui puissent conduire les élèves à *se poser des questions intermédiaires*. Ils pourront alors se tourner de façon intéressante vers un logiciel pour se faire une opinion qu'ils ne parviendraient pas à trancher avec le seul "papier – crayon".

Fig 30



Comme j'ai tenté de le montrer au cours de cette conférence, le moteur principal des raisonnements en mathématique n'est pas tant de démontrer dans une démarche "synthétique", que de trouver des étapes intermédiaires susceptibles d'étayer les diverses étapes du cheminement logique à découvrir.

Nous touchons là à l'idée même *d'heuristique* et la question essentielle devient la suivante : partant des hypothèses et des conclusions proposées par l'énoncé, bâtir des propriétés intermédiaires… « si possible bonnes » au sens de René Thom.

Vu sous cet angle, le métier de mathématicien (ou d'élève) n'est rien d'autre que de disposer d'un éventail efficace d'idées, d'intuitions, de directions, qui lui permettent de mettre le doigt sur des propriétés intermédiaires qui se révèleront non seulement justes, mais aussi pertinentes pour aider à échafauder un raisonnement ou une démonstration.

L'exemple type en la matière est celui de la *mise en équations* qui permet de résoudre, comme on le sait, un grand nombre de problèmes concrets sans avoir véritablement recours au raisonnement nécessité par ce que l'on appelait autrefois la "solution arithmétique". Je n'y reviendrai pas ici, mais il est clair que le recours à l'algèbre illustre parfaitement le schéma précédent. De manière un peu différente, ce qui nous intéresse ici, autour de l'idée *d'expérimentation* en géométrie, se rapproche le plus souvent de l'appel à *l'analyse*, dans la mesure où, comme on l'a vu, il s'agit de faire varier quelque chose et d'étudier la variation concomitante des autres éléments du problème. Et en prenant le mot *analyse* au sens le plus large possible, c'est peut-être finalement à cela que l'on aboutit le plus nettement…

Expérience et constructions

Reprenons par exemple le problème évoqué tout à l'heure qui consisterait à rechercher le point du plan qui réalise le minimum de la somme des distances aux trois sommets d'un triangle : une des démarches expérimentales les plus élémentaires pourrait reposer sur l'idée de supposer que M réalise le minimum cherché, puis de *faire bouger* M de manière à ce que la somme des distances MB et MC soit constante… M décrit alors une courbe [dont les savants savent qu'il s'agit d'une ellipse de foyers B et C] et la distance MA ne doit pouvoir qu'augmenter dans la modification, puisqu'on s'est placé au minimum de la somme. Mais c'est alors dire que la tangente en M à la courbe observée doit être perpendiculaire à la droite AM… donc que AM est la normale en M à cette courbe…

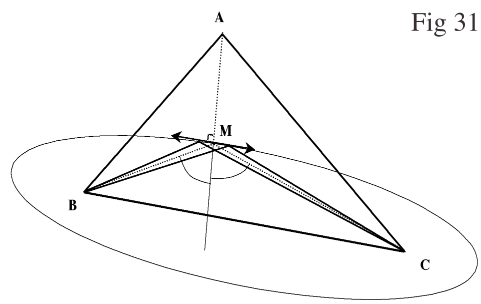


Fig 31

Les savants concluront… Et, par symétrie, ils en déduiront aisément que les trois angles entre MA, MB et MC sont nécessairement égaux… Mais on voit surtout par là que l'utilisation de lieux intermédiaires — de courbes et de fonctions, si l'on préfère — aide à comprendre le *fonctionnement* d'une figure et peut apporter des pistes vers la solution.

Cela étant, il est clair que cette compréhension des situations et des figures passe autant (sinon plus…) par l'imagination que par des réalisations dynamiques, quelles soient effectuées par l'intermédiaire de logiciels ou par d'autres instruments. Il n'empêche que les progrès en la matière sont susceptibles d'apporter de véritables aides à l'apprentissage et à la découverte.

A côté des aspects que nous avons rencontrés ou côtoyés jusqu'ici — que l'on pense par exemple à la possibilité de faire tourner une figure pour aider à *sentir* l'intersection d'un cube avec un plan, ou que l'on pense à l'extraordinaire facilité de visualiser les lieux géométriques — je voudrais insister sur le "fonds" même de l'outil informatique : le travail de *construction géométrique*.

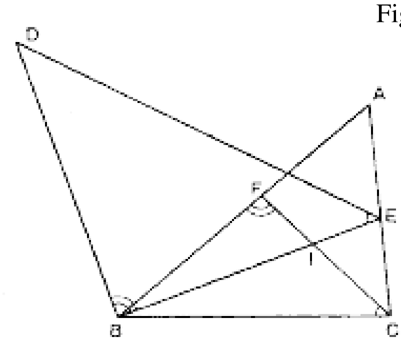
La période des maths modernes avait fait oublier en effet tout un pan des problèmes de géométrie proposés au collège et au lycée, qui consistaient à construire une figure répondant à des conditions et des contraintes données. Et ce n'est un secret pour personne que la mise au point des logiciels de géométrie dynamique a largement accompagné une réaction assez saine contre la disparition de la géométrie qui a marqué les années soixante-dix. Cependant, au delà de la mise au point d'outils axés — comme leur nom l'indique — vers les *constructions* de type géométrique, nous en sommes en quelque sorte aujourd'hui à une phase de maturité dans l'utilisation de ces outils en matière d'enseignement. C'est-à-dire que leur but n'est plus simplement de *construire* pour construire, mais d'être mis en jeu dans les investigations susceptibles de résoudre des problèmes.

On l'aura sans doute compris : je voudrais essentiellement défendre ici l'idée que, en elle-même, la démarche de résolution, dans la mesure où elle peut être rapportée à ce que l'on peut désigner sous le nom *d'expérimentation*, fait appel de manière indispensable aux problématiques des *constructions géométriques*.

C'est là, d'une certaine façon en effet, l'essentiel du *métier* de mathématicien. On l'a d'abord vu au passage, évidemment, puisque tous les exemples que j'ai étudiés nécessitaient forcément la capacité de construire les figures dynamiques qui pouvaient être utiles dans les démarches de recherche. Mais on l'a ensuite senti — je l'espère — dans le type même d'explorations que j'ai engagées pour avancer dans la compréhension du problème : chacun des *lieux géométriques* rencontrés illustrait en définitive une partie des contraintes internes au problème et tentait — en les isolant — de hiérarchiser les données et de structurer un chemin possible vers la solution…

Terminons, pour conclure sur une dernière illustration de ce phénomène. Dans les années trente, Victor Thébault (le même qu'au début…) proposait une solution au problème des bissectrices (le même que celui de la deuxième partie…) et cette solution donnait (presque) l'impression de constituer une approche synthétique "directe" du problème. Elle reposait sur l'idée suivante :

Fig 32



Etant donné un triangle ABC, supposons que les bissectrices intérieures BE et CF se coupent en un point I. Alors en construisant le triangle BDE de manière à obéir aux égalités d'angles indiquées sur la figure, on a BIC = IEC + C/2 (dans le triangle ICE) et donc BIC = DEC, par construction. Mais on a aussi BIC = BFI + B/2 (dans le triangle BFI), et donc, toujours par construction :

BIC = CBD.

Le quadrilatère BCED a donc *ses deux angles opposés* CBD et CED égaux et *ces angles sont obtus* puisque BIC = $\pi/2$ + A/2. Mais si on suppose maintenant que les bissectrices BE et CF sont égales, on voit aisément que BC = DE (triangles BDE et FBC égaux) et on est en présence d'un quadrilatère BCED dont *deux côtés opposés sont égaux* ainsi que deux angles opposés *obtus égaux*…

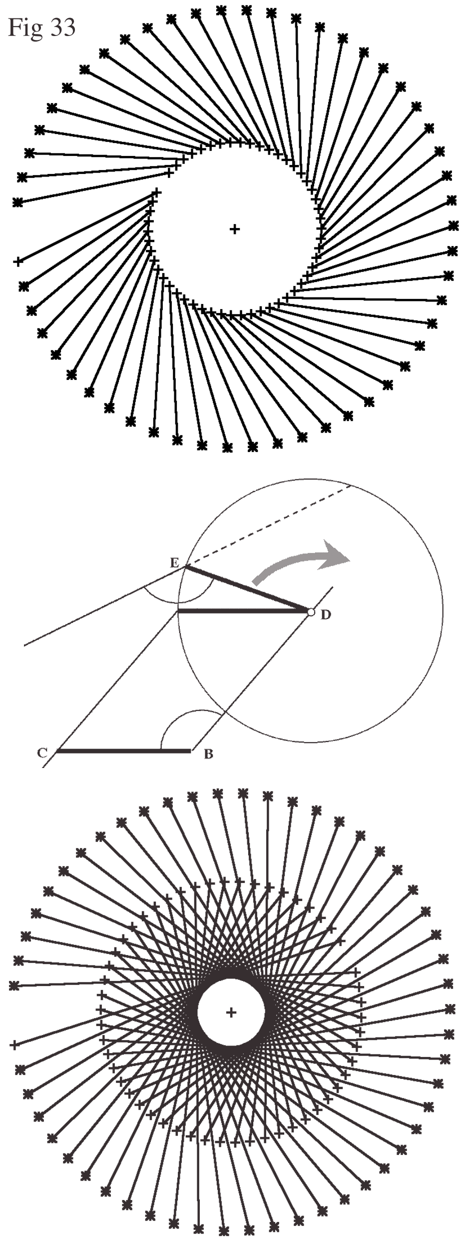
Toute l'idée de Thébault tient alors dans l'observation suivante : *un tel quadrilatère est nécessairement un parallélogramme* ! … Voilà qui va nous permettre de "boucler" cet exposé et même de rajouter cette proposition originale à la séquence initiale sur les propriétés du parallélogramme…

Mais comment, donc, prouver l'affirmation précédente, sinon en se mettant en position de *construire* un tel quadrilatère ? Je laisse chacun s'affairer à la tâche (avec ou sans logiciel de géométrie dynamique) et comprendre pourquoi la donnée de *deux côtés opposés égaux* et de *deux angles opposés égaux* (pour peu qu'ils soient obtus !…) ne permet pas autre chose que d'obtenir un parallélogramme…

En guise de conclusion, je voudrais rappeler qu'au delà des logiciels et des TICE de toutes sortes, au delà des épreuves plus ou moins "pratiques" envisagées pour le baccalauréat, le sujet est celui de l'importance qu'il convient de donner à *l'expérience* en mathématiques.

La boutade de Vladimir Igorevitch Arnold qui dit : « Les mathématiques font partie de

Fig 33



la physique. La physique est une science expérimentale, une des sciences naturelles. Les mathématiques, ce sont la partie de la physique où les expériences ne coûtent pas cher. » est provocante et intéressante.

Elle nous rappelle que les mathématiques ne sont pas que langage et abstraction…

Elle nous dit surtout que les mathématiques ne sont pas seulement — comme le pensent un peu trop souvent certains philosophes — le simple énoncé de vérités purement formelles.

Malheureusement, elle ne nous dit pas comment on effectue les expériences en mathématiques, ni même en géométrie. Comme j'ai tenté de l'expliquer ici, l'important n'est aucunement dans le fait qu'une réalité physique quelconque permette ou non de croire que telles ou telles droites sont concourantes ou que tels ou tels points sont alignés. La géométrie, même si elle a beaucoup de chose en commun avec la physique, constitue un moment de pensée qui ne cherche pas à se raccrocher à des vérifications sur le monde qui nous entoure.

Il n'en reste pas moins que *les méthodes expérimentales* de la pensée physique irriguent tout autant les mathématiques… Et je me suis borné ici à la simple idée qu'une expérience consiste avant toute chose à regarder comment une chose varie lorsque l'on en fait varier une autre ! J'espère avoir montré au passage comment cette simple manière d'aborder les problèmes peut permettre de les éclairer suffisamment pour aller à leur solution. J'espère aussi vous avoir convaincus, peut-être pas d'utiliser à la moindre occasion des logiciels de géométrie — du moins je l'espère… —, mais surtout de *l'importance des problèmes de constructions* en géométrie.

Il aurait peut-être suffi pour cela de rappeler ici la puissance de la méthode de raisonnement *par analyse et synthèse*, qui est sans doute la plus belle méthode d'investigation mise au point par les géomètres à propos de tels problèmes. Mais ce n'est pas tout. Le problème de mettre l'accent aujourd'hui sur l'expérimentation nous a permis de rappeler que se poser les problèmes sous la forme :

— « comment puis-je construire telle partie de la figure ? »,

— « comment les données déterminent-elles ou non une famille de solutions à ce problème ? »,

— « comment puis-je tirer parti des degrés de liberté éventuels dont je dispose ? »

constitue une démarche scientifique indépassable. Peut-être est-ce même là l'occasion rêvée de revisiter Euclide… Si on n'en réduit pas la lecture à celle des *Eléments* mais si l'on s'interroge aussi à propos des livres consacrés aux *Porismes* et aux *Constructions*…