DU CARACTERE EXPERIMENTAL DES MATHEMATIQUES

A propos des laboratoires de mathématiques [1]

Rudolf BKOUCHE
Irem de Lille

« … notre raison ne peut, sans l'aide de l'expérience, jamais tirer une conclusion au sujet d'une existence réelle et d'un fait. » [2]

Hume

« Or il est de la plus haute importance d'avoir au préalable défini très exactement le concept que l'on veut éclaircir par des observations, avant d'interroger l'expérience à son sujet ; car l'expérience ne peut nous procurer ce dont nous avons besoin que si nous savons d'abord ce que nous devons y chercher.» [3]

Kant

Introduction

Dans une conférence au Musée Pédagogique en 1904 [4], Emile Borel proposait l'introduction de laboratoires de mathématiques dans l'enseignement secondaire renvoyant ainsi au caractère expérimental des mathématiques. Mais parler du caractère expérimental des mathématiques demande de revenir sur la notion de caractère expérimental bien plus que sur les mathématiques en tant que telles. Il ne faudrait surtout pas que l'on oppose un caractère expérimental dit "concret" et des aspects théoriques présentés comme "abstraits" renvoyant aux diverses connotations données aux termes "concret" et "abstrait". L'exemple des sciences physiques devrait nous rappeler que l'introduction des TP n'est pas sans poser problème et que certaines manipulations proposées aux élèves peuvent avoir aussi peu de signification pour les élèves qu'un discours dit "abstrait". La question essentielle, que ce soit en mathématiques ou en physique, reste celle de l'articulation entre les divers aspects de l'activité scientifique.

Cela dit, rappelons que le caractère expérimental des sciences mathématiques est ancien [5]. Il faut alors distinguer entre ce qui nous vient de notre expérience du monde, la connaissance empirique, et le caractère expérimental proprement dit, lequel consiste en la vérification "matérielle" des propriétés énoncées par le discours théorique, ce qui implique

1 Cet article reprend un exposé fait au colloque "Faut-il créer des laboratoires de mathématiques ?", Maubeuge mars 2006 (*Actes* à paraître).
Le reste des notes est rassemblé en fin d'article

que ces deux aspects, celui de l'expérience et celui de l'expérimentation, aient leur place dans un laboratoire de mathématiques.

Aspect expérimental des mathématiques

Nous rappelons la nécessaire distinction entre l'expérience et l'expérimentation.

Le terme "expérience" renvoie d'abord à la connaissance empirique mais plus généralement, comme le suggère l'usage courant du terme, il désigne l'ensemble des connaissances que l'on appelle d'un terme vague la connaissance commune, connaissance devenue "spontanée", que cette spontanéité soit originelle ou acquise.

Le terme "expérimentation" renvoie, quant à lui, à une interrogation de la nature, ce qui suppose d'une part une théorisation antérieure, aussi faible soit-elle, qui permet d'expliciter les questions que l'on pose, d'autre part une préparation matérielle qui s'appuie sur cette première théorisation. Il faudrait y ajouter ce que l'on appelle une "expérience de pensée" qui réduit l'expérimentation au discours qui la décrit, point sur lequel nous reviendrons.

Dans un article publié dans le premier numéro de la revue *L'Enseignement Mathématique*, Hermann Laurent écrivait :

"*… toute science passe par trois phases successives :* 1° *la phase d'observation,* 2° *la phase de raisonnement,* 3° *la phase expérimentale.*" [6]

Nous noterons l'ordre des phases : observation, raisonnement, expérimentation. La phase expérimentale y apparaît moins comme une phase d'élaboration de la connaissance que comme une phase de vérification [7], la seconde phase, après la phase empirique définie par l'observation, étant celle du raisonnement.

Cette remarque de Laurent peut nous servir de guide, non seulement pour une définition générale du caractère expérimental des mathématiques, comme de toute autre science, mais aussi comme guide pour la mise en place de laboratoires de mathématiques dans l'enseignement. Pour compléter ce que dit Laurent, nous ajouterons que le raisonnement intervient dans chacune des phases. L'observation n'est jamais un simple constat, elle suppose une intention de celui qui observe, ce qui suppose une part de raisonnement, aussi embryonnaire soit-il. De même la phase expérimentale s'appuie sur un double raisonnement, en amont quant à l'élaboration de l'expérience à partir de la phase de raisonnement, en aval ensuite quant à la lecture des résultats. Ainsi l'activité de raisonnement intervient dans les trois phases définies par Laurent, la seconde étant celle où cette activité est la plus systématique. C'est pourquoi il me semble plus judicieux d'appeler la seconde phase la phase théorique.

Pour étayer ce que nous venons de dire, nous nous appuierons sur les trois aspects de la connaissance définis par Gonseth, l'aspect intuitif, l'aspect expérimental et l'aspect théorique [8]. La connaissance intuitive comprend, à un moment donné, tout ce que l'on sait appréhender globalement, en ce sens elle est à la fois un donné et une construction, un donné dans la mesure où elle se fonde sur notre rapport avec le monde extérieur mais aussi une construction par le sujet connaissant, ce que Gonseth appelle *la construction de la réalité*, comme il l'écrit dans *Les Mathématiques et la Réalité* :

"La réalité telle que nous l'apercevons est une construction plus ou moins autonome de

notre esprit, dont les fins essentielles sont de rendre l'action possible." [9]

Mais cette connaissance intuitive, si elle donne un cadre pour la pensée et l'action, reste insuffisante, elle ne nous renseigne pas sur sa validité, validité qui est moins vérité qu'adéquation entre cette connaissance et le réel, cela dit sans préjuger de ce réel ; c'est cette adéquation que Gonseth appelle *l'idonéité*, exprimant ainsi la prise en compte à la fois des contraintes extérieures et de la (re)construction de la réalité par l'esprit humain, (re)construction qui est en quelque sorte la réponse du sujet connaissant à ces contraintes. C'est alors le rôle de la connaissance expérimentale et de la connaissance théorique que de construire l'idoine, construction qui ne saurait être achevée.

La connaissance expérimentale peut être considérée comme une confrontation contrôlée au réel, en cela elle n'est jamais coupée du théorique, même si Gonseth n'est pas toujours clair sur ce point. On pourrait dire, pour préciser et compléter la pensée de Gonseth, que l'expérimental n'est jamais nu, qu'il est toujours chargé à la fois de connaissance intuitive et de connaissance théorique ; c'est en cela que la connaissance expérimentale est bien plus difficile d'accès que les deux autres formes de connaissances et ce serait un leurre que d'espérer commencer d'enseigner *via* une approche purement expérimentale.

La connaissance théorique, quant à elle, s'appuie sur le raisonnement. Celui-ci prend sa consistance *via* le discours et l'on peut caractériser la connaissance théorique comme issue d'un discours convenablement réglé. Mais ce discours n'est pas qu'un simple ajout, d'une part les règles du discours se définissent dans l'activité théorique elle-même, d'autre part le discours joue un rôle actif dans l'élaboration de la connaissance. Nous verrons ci-dessous que c'est le raisonnement qui permet de construire les idéalités mathématiques, lesquelles peuvent être considérées comme des objets de discours, au sens que d'une part elles se constituent dans le discours et d'autre part le discours se construit sur elles. Nous reviendrons de façon plus explicite sur ce point à propos des objets de la géométrie.

S'il est nécessaire de distinguer les trois aspects de la connaissance pour les besoins de l'analyse, il faut prendre en compte que, dans l'acte de connaissance, ces trois aspects ne sont pas séparés, ce qui demande de regarder la façon dont ces trois aspects s'articulent, ce que Gonseth appelle une synthèse dialectique [10]. Un tel point de vue permet de sortir de la classique opposition "rationalisme *vs* empirisme" [11], le moment empirique et le moment rationnel se complétant dans l'acte de connaissance, le moment expérimental apparaissant comme celui de la vérification de l'adéquation entre le discours théorique et la réalité, tout en sachant que ce dernier terme est ambigu entre une réalité mondaine, celle du déjà-là antérieur à toute connaissance, et une réalité reconstruite par l'acte de connaissance. Il s'agit moins d'opposer empirisme et rationalisme que de voir comment le rationalisme, en se présentant comme un mode d'organisation de la connaissance, est une façon (la façon !) de dépasser l'empirisme. D'autant plus qu'en mettant en avant la méthode déductive, le rationalisme permet d'une part de construire de la connaissance à partir du seul discours, d'autre part de penser la notion de nécessaire : une vérité nécessaire est une vérité qui non seulement est vraie mais ne peut pas ne pas être vraie [12].

Les premiers objets des sciences mathématiques : le nombre et la figure

Nous nous intéresserons d'abord aux premiers objets mathématiques traditionnels, la figure et le nombre, en insistant sur la part d'empirisme qui conduit à leur connaissance. S'il est classique de mettre en avant le caractère empirique des objets géométriques en insistant sur le rôle des corps solides dans la constitution de la géométrie [13], les nombres ont toujours semblé relever de la pensée pure. C'est déjà ce que disait Archytas de Tarente à l'aube de la géométrie grecque [14], c'est encore ce qu'écrit Gauss dans une lettre à Olbers :

> *"J'en viens de plus en plus à la conviction que la nécessité de notre géométrie ne peut être démontrée, ou du moins qu'elle ne peut pas l'être par la raison humaine ou pour la raison humaine. Peut-être atteindrons-nous, dans une autre existence, une compréhension de la nature de l'espace qui nous est maintenant inaccessible.*
> *Jusque-là, il ne nous faut pas mettre la géométrie au même rang que l'arithmétique dont la vérité est purement a priori, mais plutôt au même rang que la mécanique"* [15]

après qu'il a découvert la possibilité de géométries non-euclidiennes. Et il faut reconnaître encore aujourd'hui qu'il n'existe, sous des formes différentes, qu'une théorie des entiers naturels, ces nombres que, selon une célèbre formule de Kronecker, Dieu a donnés aux hommes. Reste que ces nombres, apparus aux premiers âges de l'humanité, sont liés à l'acte de comptage et il ne saurait être question de dire si le comptage précède les nombres ou si les nombres précèdent le comptage ; dans une optique gonséthienne on pourrait dire, avec prudence, que comptage et nombres sont concomitants. En ce sens la notion de nombre participe de la connaissance empirique même si l'activité de comptage nécessite l'usage de règles qui apparaissent, après coup, comme un préalable au comptage ; on peut y voir l'une des premières synthèses dialectiques au sens gonséthien ; c'est leur ancienneté qui amène à considérer les nombres comme relevant du domaine de la pensée pure. On peut voir ici l'un des caractères des objets mathématiques que j'appellerai leur éternité, non parce qu'ils sont éternels, mais parce que, dès qu'ils sont inventés par l'esprit humain, ils deviennent éternels au sens qu'ils semblent exister depuis toujours. C'est peut-être ainsi qu'il faut penser les Idées platoniciennes, aussi peu platonicienne soit cette façon de les penser.

C'est justement parce que le nombre apparaît comme relevant de la pensée pure que nous commencerons par la notion de nombre, essentiellement la notion de nombre entier.

le nombre

1. — *les pratiques de comptage*

Si le nombre est lié aux pratiques de comptage, c'est à travers ces pratiques que l'on peut aborder les aspects empiriques et expérimentaux de la notion de nombre.
On peut considérer que l'aspect empirique se résume au comptage, tout en remarquant que le comptage fait apparaître très vite des opérations sur les nombres avec le comptage d'une réunion de plusieurs groupes d'objets. On ne peut éviter de rencontrer ici la question de la distinction des nombres dits "concrets" (nombre d'objets d'une collection) et des nombres dits "abstraits" et des rapports entre ces deux types de nombres [16]. Mais cette distinction pose elle-même problème si on renvoie à la comptine, c'est-à-dire à l'énoncé de

la suite des nombres, le comptage apparaissant comme la mise en relation entre une collection d'objets et la comptine. Quel est alors le statut des nombres de la comptine ? sont-ils des nombres abstraits, mais alors abstraits de quoi ? ou sont-ils des nombres concrets, mais alors nombre de quoi ? On peut alors dire que la distinction "nombres abstraits – nombres concrets" ne prend sens que pour qui sait compter. Cela nous renvoie encore au caractère expérimental du comptage, lequel apparaît avec d'une part la comptine des nombres, d'autre part les premières opérations effectuées sur les nombres que constitue l'acte de "compter sur les doigts". La main apparaît ici comme la première machine à calculer et l'usage du "compter sur les doigts" comme l'un des premiers modes de l'expérimentation arithmétique [17].

2. — *du comptage au calcul*

Le calcul est un acte, c'est-à-dire qu'il se traduit par des opérations, telles les quatre opérations canoniques de l'arithmétique élémentaire. C'est ainsi qu'il faut comprendre des phrases telles que : *"cinq et trois font huit"*. La présentation des opérations arithmétiques comme lois de composition peut être considérée comme une *statification* des ces opérations, statification que l'on peut relier au cadre ensembliste des mathématiques contemporaines, mais cette statification ne prend son sens que pour qui a déjà acquis une pratique du calcul. Autant dire que la notion de *loi de composition*, aussi importante que soit sa place dans l'algèbre moderne, n'est pas une notion première dans l'enseignement du calcul.

Le premier enseignement du calcul se situe dans un entremêlement des trois phases présentées par Laurent, ou pour employer un langage gonséthien, au carrefour des trois aspects de la connaissance. Si une analyse épistémologique ou didactique demande de distinguer ces trois aspects de la connaissance, ceux-ci ne sont pas séparés dans l'acte de calcul et on peut y voir l'une des difficultés de l'apprentissage du calcul, difficulté qui ne peut qu'être renforcée par une séparation précoce des trois aspects de la connaissance. On pourrait résumer cela en disant que le sens et la pratique des opérations sont concomitants, que c'est la pratique des opérations qui leur donne sens sans que l'on puisse décider *a priori* la part des aspects techniques et des aspects conceptuels qui s'entremêlent dans l'acte de calculer [18].

Cet entremêlement se définit ainsi dans la pratique du calcul, laquelle apparaît sous un double aspect, le calcul mental et le calcul écrit.

Dans une conférence pédagogique du début du XXème siècle, A. Cabois, inspecteur primaire, expliquait :

> *"Le calcul mental est celui qui se fait sans le concours de l'écriture. Il est tout à fait différent du calcul écrit. Le premier opère simplement sur les nombres ; le calcul écrit, au contraire, opère sur les chiffres, sans tenir compte des nombres, excepté pour le résultat final."* [19]

On voit ici apparaître deux pratiques de calcul que l'on peut considérer comme deux types de pratique expérimentale. Si le calcul mental fait appel à l'intuition des nombres, le calcul écrit (le calcul posé pour reprendre l'expression de l'intitulé de programmes [20]) représente l'un des premiers exemples de méthodes algorithmiques et c'est en cela qu'il a sa place dans le laboratoire de mathématiques. Le considérer aujourd'hui comme une activité désuète, comme le laissent entendre les programmes de l'école primaire, relève non seulement d'une erreur pédagogique mais d'une incompréhension de l'activité de calcul, laquelle est ainsi réduite à son seul aspect machinal. C'est ainsi qu'en écrivant :

> *"La diffusion maintenant généralisée des calculatrices rend moins nécessaire la virtuosité des élèves dans les techniques opératoires (calcul posé), dont on attend seulement qu'elles permettent de renforcer la compréhension des opérations."* [21]

les rédacteurs du programme oublient le rôle de l'activité de calcul dans la construction par l'élève de son intimité avec les nombres, intimité qui est la marque de la maîtrise de la connaissance des nombres.

Nous donnerons comme exemple de l'articulation entre les divers aspects de la connaissance des nombres le rôle de la division dans la compréhension de la notion d'approximation : la pratique de la division qui ne tombe pas juste nous apprend, d'une façon informelle, que plus on va loin après la virgule, plus on est proche de la "valeur exacte". On vérifie aisément que la formalisation de cette remarque n'est autre que la définition "à la Weierstrass" de la notion de limite ; on voit alors le rôle que peut jouer un algorithme dans l'appréhension d'un concept [22].

A ces pratiques expérimentales, on peut ajouter, outre les pratiques de calcul à la main ou celles utilisant les cailloux ou les bûchettes, les diverses machines inventées au cours de l'histoire, que ce soit le boulier, les abaques, ou les machines mécaniques plus sophistiquées. Nous mettons de côté la calculatrice dont la pratique n'est en rien expérimentale comme nous le verrons plus loin, même si elle peut donner lieu à certaines pratiques expérimentales, mais ces dernières se situent au-delà d'un premier enseignement du calcul, lequel s'appuie essentiellement sur le calcul mental et le calcul écrit.

3. — *questions arithmétiques*

Les Grecs distinguaient l'arithmétique, science des nombres, et la logistique liée à la pratique du calcul [23]. En tant que science des nombres, l'arithmétique s'intéresse aux propriétés liées à la divisibilité et c'est de ce point de vue que nous nous y intéressons ici.

la preuve par neuf

La complexité des opérations nécessite de contrôler les résultats de calculs et par conséquent d'avoir à disposition des tests de contrôle. Ces tests ne sont jamais suffisants pour assurer la justesse des résultats, mais ils permettent de dire si un résultat est faux ou s'il est plausible. Parmi ces tests nous citerons la *"preuve par* p" où p est un entier, la preuve consistant à calculer modulo p. La preuve par p est ainsi liée aux propriétés du nombre p et plus précisément aux propriétés de son écriture dans le système de numération utilisée. C'est cela qui donne son intérêt aux deux tests classiques de la preuve par 9 et la preuve par 11. Nous développons ci-dessous une méthode de justification de la preuve par 9, laissant au lecteur le plaisir de donner une méthode de justification analogue pour la preuve par 11 ou la preuve par 37.

> *"Dans le système décimal, on obtient le reste de la division d'un nombre par 9 en calculant la somme de ces chiffres et on recommence jusqu'à obtenir un nombre s'écrivant avec un seul chiffre".*

On peut en donner la preuve suivante : Soit à déterminer le reste par 9 du nombre 38725, on peut écrire :

$$38725 = 3\times10000 + 8\times1000 + 7\times100 + 2\times10 + 5$$

ce qui peut aussi s'écrire :

$$38725 = 3\times(9999 + 1) + 8\times(999 + 1) + 7\times(99 + 1) + 2\times(9 + 1) + 5$$

ce qui montre que

$$38725 = 3 + 8 + 7 + 2 + 5 + \text{un multiple de } 9$$

soit

$$38725 = 25 + \text{un multiple de } 9$$

Il s'ensuit que le reste par 9 de 38725 est le même que celui de 25. Le même raisonnement montre que le reste par 9 de 25 est 2 + 5 soit 7. On a ainsi montré la propriété.

Cette démonstration appelle les remarques suivantes : elle porte sur un nombre particulier, mais on peut remarquer que le même raisonnement portant sur un autre nombre donne un résultat analogue, ce qui indique que le raisonnement est général [24]. On voit ici le nombre 38725 jouer le rôle d'un *nombre générique* au sens que les opérations auxquelles on le soumet restent les mêmes pour un nombre quelconque. On peut considérer cette démonstration comme une expérimentation sur le nombre particulier 38725 et c'est son caractère générique qui lui donne le statut de démonstration, c'est-à-dire son caractère universel et nécessaire.

Reste à montrer que le reste par 9 du produit de deux nombres est égal au produit des restes par 9 de chacun des facteurs. Ici encore on peut reprendre une démonstration analogue à celle donnée ci-dessus en prenant un exemple générique, ce que nous abandonnons au plaisir du lecteur.

une propriété arithmétique élémentaire

"Dans le système décimal, le nombre n *et le nombre* n^5 *ont le même chiffre des unités".*

— première démonstration (n'utilisant pas les propriétés de divisibilité) : Notons d'abord que l'algorithme de la multiplication montre que le chiffre des unités d'un produit est égal au chiffre des unités du produit des chiffres des unités ; il suffit donc de vérifier la propriété pour les seuls nombres à un chiffre. On peut considérer que cette démonstration s'appuie sur une double expérimentation, la première s'appuyant sur l'algorithme de la multiplication, la seconde sur les produits de nombres à un chiffre. C'est cela qui nous conduit, comme dans l'exemple précédent, à parler de démonstration de caractère expérimental.

— seconde démonstration (utilisant les propriétés de divisibilité) : Le petit théorème de Fermat assure que $n^5 - n$ est un multiple de 5 ; puisque les nombres n^5 et n sont tous deux pairs ou impairs, il s'ensuit que le nombre $n^5 - n$ est pair ce qui implique que $n^5 - n$ est un multiple de 10.

4. — *les nombres premiers*

Si on montre aisément que l'ensemble des nombres premiers est infini [25], un problème plus difficile est d'étudier la répartition des nombres premiers dans l'ensemble des nombres entiers. Si l'on note $\pi(n)$ le nombre des nombres premiers inférieurs ou égaux à n, les mathématiciens Charles de La Vallée Poussin et Jacques Hadamard ont donné une expression asymptotique de $\pi(n)$, de façon précise $\pi(n) \approx n/\log n$. Pour une étude plus complète, nous renvoyons à l'ouvrage de Gérald Tenebaum et Michel Mendès-France [26].

On connaît cependant des déterminations "empiriques" de nombres premiers, à commencer par le crible d'Eratosthène. Diverses méthodes, dont des études statistiques, sont indiquées dans l'ouvrage d'Emile Borel *Les Nombres Premiers* [27].

5. — *Wittengstein et l'inexorabilité des mathématiques*

Wittgenstein s'interroge sur la suite des entiers mais aussi sur des suites plus complexes comme une suite arithmétique, par exemple une suite de raison 2 : connaissant un nombre de la suite, on peut dire quel est le suivant, c'est en ce sens que l'on peut parler d'*inexorabilité* de l'arithmétique [28].

On peut donner d'autres exemples toujours puisés dans l'arithmétique, ainsi la décomposition des nombres en facteurs premiers : cette décomposition est unique et déterminée sans que l'on y puisse rien changer, *inexorable* pourrait-on dire. Ce qui conduit à poser les questions suivantes : Quel est le statut de cette inexorabilité ? Quelles sont les raisons qui font que *"je n'ai pas le choix"* ?

Si les nombres existent indépendamment de moi, c'est-à-dire s'ils ont une réalité extérieure (le réalisme platonicien par exemple), cette inexorabilité n'est que la marque de ce à quoi je suis confronté. Mais alors quel est le statut de cette réalité, simple fait sans autre raison que d'être un fait ?

Si les nombres sont une construction de l'esprit humain, pour quelles raisons ces objets construits par l'homme lui résistent, et lui résistent d'une façon inexorable.

C'est cela qui conduit à la question que pose Wittgenstein :

"A quoi tient alors l'inexorabilité propre aux mathématiques ? " [29]

Revenant à la suite des nombres, on peut alors penser que l'inexorabilité provient de l'énonciation de la suite des nombres, après un vient deux, après deux vient trois, etc. ; une fois cette énonciation faite, on n'a plus le choix et l'addition n'est qu'une conséquence de cette énonciation. C'est en ce sens que l'on peut considérer les propriétés arithmétiques comme des jugements analytiques, au sens kantien.

Pourtant cette énonciation et les opérations qui s'en déduisent sont liées à une pratique, pratique du comptage et pratique du calcul issue de ce comptage. Quelle est alors la place de la logique ? on pourrait répondre : celle d'expliciter les règles d'agencement des nombres qui régissent cette pratique. L'inexorabilité est alors moins celle d'une logique que celle d'une pratique et l'on retrouve un point de vue proche de la critique de la causalité par Hume [30].

On peut alors considérer que la logique elle-même relève d'une pratique, moins un préalable à l'exercice d'une pratique qu'une explicitation du fonctionnement de cette pratique. Ce que Wittgenstein explique de la façon suivante :

"La logique est une sorte d'ultra-physique, la description de la "structure logique " du monde que nous percevons grâce à une ultra-expérience." [31]

En ce sens la logique participe des sciences naturelles, ce qui nous renvoie à la conception gonséthienne de la logique comme physique de l'objet quelconque [32].

6. — *nombres et grandeurs*

A côté des nombres naturels (les entiers positifs), on introduit plusieurs catégories de nombres qui permettent de résoudre des problèmes où les nombres naturels se montrent insuffisants. Parmi ces problèmes, nous citerons la mesure des grandeurs, si l'on considère que mesurer une grandeur d'un type donné (par exemple une longueur) c'est compter combien de fois cette grandeur contient une grandeur particulière appelée unité. C'est ce comptage qui conduit à inventer d'autres nombres que les nombres naturels, ce que Hermann Weyl résume de la façon suivante :

> *"Historically* ***fractions*** *owe their creation to the transition from counting to* ***measuring****"* [33]

On peut alors s'appuyer sur la mesure des grandeurs, et de façon plus précise, le mesurage, pour introduire ces nouveaux nombres que sont les fractions [34] ou les décimaux [35]. Cela implique que la métrologie [36] accompagne l'enseignement des nombres à l'école primaire, mettant en évidence le caractère expérimental de ces nouveaux nombres. Il importe alors de remarquer que ce caractère expérimental, lié au mesurage, n'est pas exempt de tout aspect théorique, le découpage des unités en parties égales s'appuyant sur un raisonnement. Il faut alors distinguer dans la construction des nombres plusieurs niveaux de théorisation, celui issu de la mesure d'une part, et celui lié aux opérations impossibles conduisant à l'introduction des nombres rationnels et négatifs. Ce n'est que dans un second temps que l'on peut expliciter le lien entre les divers niveaux de théorisation.

7. — *de l'usage des nombres dans les sciences de la nature et dans la technique*

Les nombres n'interviennent pas seulement dans les problèmes de comptage, de calcul et de mesure comme on le voit par exemple dans l'intervention de la théorie de la divisibilité dans l'étude de certains phénomènes ou dans les règles d'usage de certains objets. Nous ne pouvons dans ce texte aborder les divers domaines où la notion de nombre entier intervient comme, par exemple, les phénomènes ondulatoires ou les théories quantiques. Nous nous contenterons ici de citer l'étude des engrenages pour laquelle nous renvoyons à l'ouvrage de Bricard [37].

la figure

Nous avons déjà rappelé la lettre de Gauss à Olbers dans laquelle l'auteur renvoie la géométrie du côté des sciences de la nature alors qu'il place les nombres du côté de la pensée pure. Nous avons voulu montrer ci-dessus que la notion de nombre, dans la mesure où elle se relie à une pratique de comptage, ne relève pas de la seule pensée pure et qu'elle peut donner lieu à une pratique expérimentale. En contrepoint, que ce soient la géométrie ou plus généralement les sciences physiques, les sciences de la nature conduisent à construire des objets idéaux et leur statut de science rationnelle se définit *via* l'usage de ces objets idéaux.

1. — *de l'égalité des figures*

La géométrie élémentaire est l'étude des corps solides du point de vue de la forme et de la grandeur. Elle s'appuie sur le principe de l'égalité par superposition que l'on peut énoncer sous la forme suivante :

"Deux corps que l'on peut superposer sont égaux"

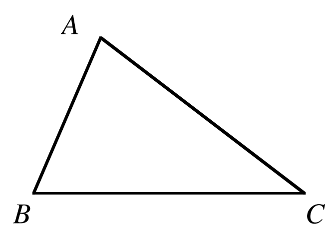
L'opération de superposition suppose le mouvement, ce qui met en avant le rôle du mouvement dans la mise en place de la géométrie. Cependant l'énoncé même du principe de l'égalité par superposition marque les limites d'application de ce principe. En effet si l'on peut montrer l'égalité de deux plaques planes en les superposant (par exemple deux triangles ou deux quadrilatères), il est impossible de montrer l'égalité de deux cubes en bois en les superposant. En fait, dans le cas des solides, on pourrait dire que deux corps sont égaux lorsqu'ils peuvent occuper la même place dans l'espace, mais que signifie l'expression "la même place" ? Comment s'assure-t-on que deux corps peuvent occuper la même place ? On voit ainsi apparaître la nécessité de donner des critères de superposabilité, c'est-à-dire des conditions qui assurent que deux objets sont superposables sans qu'il soit nécessaire de réaliser matériellement l'opération de superposition, ce sont les classiques cas d'égalité des triangles. On peut voir dans l'explicitation de telles conditions le commencement de la géométrie rationnelle.

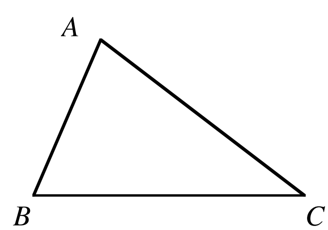
Pour expliciter ce qui vient d'être dit, nous reviendrons sur la démonstration de la proposition 4 du livre I (le premier cas d'égalité des triangles) des *Eléments* d'Euclide, laquelle peut être considérée comme le modèle de ce que nous avons appelé une démonstration de type expérimental. Cette proposition s'énonce ainsi :

"Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et s'ils ont un angle égal à un angle, ils auront aussi la base égale à la base, les triangles seront égaux et les angles restants seront égaux aux angles restants, chacun à chacun, c'est-à-dire ceux que les côtés égaux sous-tendent." [38]

Voici la démonstration :

"Soient deux triangles ABC, DEF ayant les deux côtés AB, AC égaux aux deux côtés DE, DF, chacun à chacun, d'une part AB à DE, d'autre part AC à DF, ainsi que l'angle BAC égal à l'angle EDF. Je dis que la base BC aussi est égale à la base EF, et le triangle ABC sera égal au triangle DEF, et les angles restants seront égaux aux angles restants, chacun à chacun, c'est-à-dire ceux que les côtés égaux sous-tendent, d'une part celui sous ABC à celui sous DEF, d'autre part celui sous ACB à celui sous DFE.





En effet, le triangle ABC étant appliqué sur le triangle DEF, d'une part le point A étant posé sur le point D, d'autre part la droite AB sur DE, le point B aussi s'ajustera sur le point E parce que AB est égale à DE. Alors AB étant ajustée sur DE, la droite AC s'ajustera sur DF parce que l'angle sous BAC est égal à celui sous EDF. De sorte que le point C aussi *s'ajustera sur le point F parce que, de plus, AC est égale à DF. Mais B a aussi été ajusté sur E. De sorte que la base BC s'ajustera sur la base EF et lui sera égale. De sorte que tout le triangle ABC s'ajustera aussi sur tout le triangle DEF et lui sera égal, et les angles restants s'ajusteront sur les angles restants et leur seront égaux, d'une part celui sous ABC à celui sous DEF, d'autre part celui sous ACB à celui sous DFE."*

La démonstration ci-dessus décrit les opérations à effectuer pour assurer la coïncidence des deux triangles, c'est la raison pour laquelle nous l'appelons *"démonstration de type expérimental",* que l'on peut considérer comme un exemple simple d'expérience de pensée.

Si la démonstration est un discours convenablement réglé, le discours ci-dessus est réglé par l'enchaînement des opérations à exécuter, la logique y joue un rôle secondaire, tout au plus celui d'un *"agent de la circulation"* pour reprendre une formulation de Gonseth.

Cette proposition joue un rôle essentiel dans le développement du corpus euclidien puisqu'elle permet de se débarrasser du mouvement dans les démonstrations ultérieures et par conséquent de toute trace explicite d'empirisme.

2. — *la formule d'Euler*

Les démonstrations de type expérimental sont nombreuses dans l'histoire de la géométrie. Nous donnerons un exemple important, celui de la démonstration de la formule d'Euler pour un polyèdre convexe, formule mise en évidence par Euler dans des cas particuliers et dont il a pressenti qu'elle était générale sans pouvoir en donner une démonstration [39].

Rappelons la formule d'Euler :

Soit un polyèdre convexe, on note s *le nombre de ses sommets,* f *le nombre de ses faces,* a *le nombre de ses arêtes, alors*

$$s + f = a + 2$$

La première démonstration de ce résultat a été donnée par Cauchy [40]. Une seconde démonstration a été donnée par Jordan [41]. Ces deux démonstrations ont en commun de proposer une expérience de pensée à partir de laquelle on peut, *via* un discours convenablement réglé, démontrer la propriété. Nous exposons le principe de la démonstration de Cauchy.

la démonstration de Cauchy

Cauchy procède de la façon suivante : en supprimant une face, il peut représenter les faces restantes dont le nombre est f – 1 comme *"une suite de polygones enfermés dans le contour de la face supprimée".* S'appuyant sur un théorème antérieur, on a la relation

$$s + (f - 1) = a + 1$$

ce qui prouve la formule d'Euler.

Le théorème antérieur s'énonce de la façon suivante : soient un nombre f de polygones enfermés dans un contour donné, s le nombre de sommets et a le nombre de côtés de ces polygones, alors

$$s + f = a + 1$$

Pour démontrer ce théorème, Cauchy décompose chacun des polygones en triangles en menant des diagonales convenables, ce qui ne change pas le nombre s + f – a. Une fois cette opération faite, *"on enlève successivement les différents triangles de manière à n'en laisser substituer à la fin qu'un seul, en commen-*

çant par ceux qui avoisinent le contour extérieur, et n'enlevant dans la suite que ceux dont un ou deux côtés auront été réduits, par les suppressions antérieures, à faire partie du même contour". Deux cas se présentent selon que le triangle enlevé contient un côté ou deux sur le contour, mais on peut montrer que dans chacun de ses cas, l'enlèvement d'un triangle ne change pas la somme s + f – a (la vérification est laissée au plaisir du lecteur). Il suffit donc de vérifier la relation pour un triangle ce qui est aisé.

la démonstration de Jordan

Jordan procède, quant à lui, par un découpage convenable du polyèdre en suivant des lignes d'arêtes. Il obtient ainsi ce qu'il appelle des calottes polyédriques.

Soit K une calotte polyédrique et notons s(K), f(K), a(K) les nombres respectifs de faces, de sommets et d'arêtes de K, Jordan montre la relation

$$s(K) + f(K) = a(K) + 1$$

Pour ce faire, on vérifie aisément que si l'on découpe une calotte en deux en traçant une ligne d'arêtes joignant deux sommets distincts situés sur le contour de la calotte et si les deux calottes ainsi obtenues vérifient la relation cherchée, alors la calotte K vérifie cette relation. il suffit alors de découper une calotte jusqu'à obtenir des calottes réduites à des polygones. On obtient la formule d'Euler en comptant sommets, faces et arêtes de chacune des calottes obtenues par découpage du polyèdre et en comparant avec les nombres s, f, a correspondants au polyèdre donné.

Dans les deux démonstrations, on remarque que celles-ci se bornent à énoncer la suite des opérations à effectuer et à compter les nombres de sommets, faces et arêtes. On peut encore considérer que la logique a joué le rôle d'un agent de la circulation. C'est d'ailleurs en analysant la démonstration de Jordan que Gonseth introduit cette expression [42]. Gonseth précise alors que la validité de la démonstration tient d'abord à la légitimité de chacune des opérations, ensuite à celle de leur enchaînement et précise :

> *"L'activité théorique se présente donc comme une expérimentation mentale sur des éventualités nettement conçues et telles que l'intuition sache chaque fois décider si elles sont compatibles ou si elles sont contradictoires. Ces éventualités, pour une part, s'imposent ; et, pour une autre part, l'esprit les imagine librement. Elles sont par ailleurs soumises aux règles du raisonnement, c'est-à-dire aux lois qui régissent leurs combinaisons."* [43]

Ces remarques tiennent aussi pour la démonstration de Cauchy et plus généralement pour toutes les démonstrations de type expérimental comme la démonstration du premier cas d'égalité des triangles que nous avons déjà citée.

Ce type de démonstration nous conduit la remarque suivante : les règles de la démonstration, et par conséquent l'agencement du discours démonstratif, s'élaborent en même temps que la démonstration. Etudiant de façon générale le raisonnement géométrique, Gonseth explique que la *doctrine préalable* qui régit le raisonnement géométrique, loin d'être donnée à l'avance, se construit dans la pratique du raisonnement géométrique, autrement dit la doctrine préalable ne devient préalable qu'après-coup [44], ce qui revient à dire que la logique se construit en même temps que l'activité de démonstration. On aborde ici un point essentiel de l'enseignement des mathématiques, la logique ne saurait être un préalable à l'enseignement de la démonstration, c'est au contraire l'exercice de la démonstration qui conduit à prendre en charge les règles de la logique. La démonstration de type expérimental dans la mesure où elle met en jeu les trois aspects de la connaissance explicités par Gonseth, joue alors un rôle important dans l'enseignement des sciences déductives [45].

La formule d'Euler constitue l'un des premiers théorèmes de ce que l'on appelle aujourd'hui la topologie algébrique, que l'on peut considérer comme l'étude des relations de situation relative indépendamment de toutes relations de grandeur. Les tentatives de démonstration données par Euler montrent qu'il savait que l'on quittait le domaine de la géométrie des grandeurs tout en restant dans le domaine des objets du monde. C'est en cela que l'on peut considérer que la topologie, avant que d'être la science formelle qu'elle est devenue, s'est construite sur l'étude d'objets du monde et en cela on peut considérer qu'elle participe des sciences de la nature, plus précisément des sciences physiques [46]. Les démonstrations de Cauchy et Jordan rappelées ci-dessus, tout en restant des démonstrations de type expérimental au sens que nous avons déjà dit, permettront de fonder en toute rigueur ce nouveau chapitre des mathématiques.

3. — *les polyèdres réguliers*

Les polyèdres réguliers représentent une singularité dans l'histoire de la géométrie. C'est le premier grand résultat géométrique qui, d'une part, reste inaccessible empiriquement et, d'autre part, nous apporte une nouvelle connaissance des objets du monde *via* le seul discours démonstratif : *il n'existe, à similitude près, que cinq polyèdres réguliers*. Propriété du monde découverte par le seul raisonnement, elle a fasciné les esprits, autant les Grecs comme le montre *Le Timée* de Platon que les fondateurs de la science moderne comme Kepler qui voyait dans la théorie des polyèdres réguliers l'un des principes de l'harmonie du monde.

Une telle propriété nous rappelle que la remarque de Laurent est globale. Plus précisément, si on peut parler des trois phases définies par Laurent dans le développement de la géométrie, il ne saurait être question de retrouver dans chacune des parties de la géométrie les trois phases dans l'ordre indiqué ou de chercher systématiquement à introduire ces trois phases dans l'enseignement. Il faut savoir que les trois phases ne se déroulent pas nécessairement dans l'ordre indiqué, voire peuvent ne pas apparaître, tout en sachant que le raisonnement, dont nous avons rappelé qu'il est présent dans chacune des phases, reste au cœur de l'activité scientifique, tout en sachant aussi que le raisonnement ne se réduit pas au raisonnement déductif et à la démonstration.

4. — *les constructions géométriques*

Les constructions géométriques sont l'un des lieux privilégiés où se rencontrent le théorique et l'expérimental. On peut considérer une construction géométrique comme une preuve d'existence : on sait qu'un objet existe parce qu'on sait le construire. Tout en s'appuyant sur un discours théorique, une construction géométrique énonce les conditions de sa réalisation matérielle et joue ainsi un double rôle : d'une part elle assure l'existence de l'objet à construire sans qu'il soit nécessaire de le réaliser matériellement, d'autre part elle permet cette réalisation matérielle.

Avant de donner les premières constructions géométriques des *Eléments* d'Euclide (propositions 1 et 2 du Livre I), nous rappellerons quelques principes.

Un point de vue algorithmique

Une construction géométrique peut être définie comme un programme, l'algorithme qui le définit n'utilisant que les constructions élémentaires suivantes :
— construire une droite passant par deux points [47]
— construire l'intersection de deux droites
— construire un cercle de centre donné et passant par un point donné
— construire l'intersection d'une droite et d'un cercle
— construire l'intersection de deux cercles

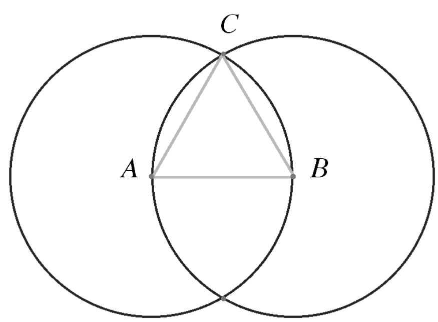
Les cinq constructions élémentaires définies ci-dessus permettent de définir les algorithmes de construction géométrique "à la règle et au compas". On peut alors noter que les trois premiers postulats énoncés par Euclide légitiment de telles constructions. Nous rappelons les énoncés de ces postulats dans la traduction de Vitrac :

> *"Qu'il soit demandé de mener une ligne droite de tout point à tout point."* [48]
>
> *"Et de prolonger continûment en ligne droite une ligne droite limitée."* [49]
>
> *"Et de décrire un cercle à partir de tout centre et au moyen de tout intervalle."* [50]

On peut considérer que ces postulats affirment la possibilité de ces constructions, même lorsqu'elles sont matériellement impossibles, ce qui conduit à les assurer *a priori*. Ainsi, d'une part, ces postulats ont une origine instrumentale et par conséquent expérimentale, d'autre part ces postulats jouent un rôle fondateur dans l'élaboration de la géométrie rationnelle.

construction d'un triangle équilatéral

Nous rappelons la construction d'un triangle équilatéral donnée pas Euclide : un segment AB étant donné, on construit le cercle de centre A et de rayon AB et le cercle de centre B et de rayon BA, soit C un point d'intersection de ces deux cercles, alors les segments AB, AC, BC sont égaux, ce qui montre que le triangle ABC est équilatéral.



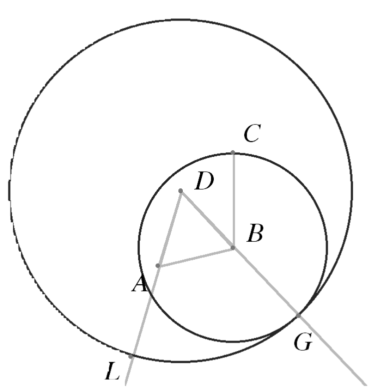
On a souvent vu dans cette construction l'une des premières "lacunes" d'Euclide. En effet Euclide admet implicitement que les deux cercles se coupent, et de citer le plan rationnel euclidien dans lequel cette intersection n'existe pas. Est-ce une lacune ? Au regard des canons d'aujourd'hui, la démonstration est insuffisante, comme le sont d'autres démonstrations des *Eléments*, mais un tel regard est-il pertinent pour comprendre le texte euclidien et ne risque-t-il pas d'en fausser la lecture et de figer la notion de rigueur en oubliant que c'est une notion en perpétuelle évolution qui s'est construite et reconstruite tout au long de l'histoire des mathématiques ? Le plan de la géométrie d'Euclide est lié à la perception empirique d'une surface plane, le texte euclidien se proposant d'expliciter les propriétés nécessaires à la mise en place du discours démonstratif, ce discours lui-même étant lié au statut des objets sur lesquels on travaille. L'axiomatique euclidienne définit alors les principes d'organisation de ce discours. Après la découverte (l'invention !) des géométries non-euclidiennes, de nouvelles formes d'organisation du discours démonstratif seront nécessaires, ce qui conduira à l'axiomatique hilbertienne telle qu'on la trouve dans *Les Fondements de la Géométrie* [51]. Si chacune de ses axiomatiques, l'euclidienne et l'hilbertienne, apparaît comme un principe d'organisation du discours démonstratif, elles diffèrent cependant par le statut des objets qu'elles étudient [52] (cf. ci-dessous).

mener d'un point donné
un segment égal à un autre

La deuxième proposition du livre I des *Eléments* s'énonce ainsi :

"Placer en un point donné, une droite égale à une droite donnée." [53]

Voici essentiellement la démonstration d'Euclide :



Soient A un point et BC un segment, on veut construire un segment d'origine A et égal à BC. On construit le segment AB et le triangle équilatéral ABD. Le cercle de centre B et de rayon BC rencontre la demi-droite opposée à la demi-droite BD) [54] en un point G et le cercle de centre D et de rayon DG rencontre la demi-droite DA) en un point L. Puisque les segments DL et DG sont égaux et que les segments DA et DB sont égaux, il s'ensuit que les segments AL et BG sont égaux et puisque les segments BG et BC sont égaux, il s'ensuit que les segments AL et BC sont égaux, ce qui résout le problème posé.

le rôle de la règle et du compas

Les deux figures géométriques fondamentales qui interviennent dans les *Eléments* sont la droite et le cercle ; la règle et le compas sont les instruments qui permettent de tracer ses figures et par conséquent d'effectuer les cinq opérations élémentaires définies ci-dessus. En cela la règle et le compas sont les instruments privilégiés de la géométrie grecque.

Pourtant les géomètres grecs savaient que la règle et le compas étaient insuffisants pour résoudre les divers problèmes géométriques qu'ils se posaient, les plus célèbres d'entre eux étant la trisection de l'angle (diviser un angle en trois parties égales), la duplication du cube (construire un cube dont le volume est le double d'un cube donné), la quadrature du cercle (construire un carré dont l'aire est égale à celle d'un cercle donné). Pour résoudre ces problèmes, ils ont été amenés non seulement à définir un certain nombre de courbes, parmi lesquelles les coniques définies comme intersection d'un cône à base circulaire avec un plan, mais aussi à inventer des instruments pour construire ces nouvelles courbes [55]. On pouvait ainsi ramener la résolution d'un problème à une intersection de courbes. Ceci a conduit à une première classification des problèmes liées aux courbes qui intervenaient dans leur résolution. C'est ainsi que l'on classait les problèmes en problèmes plans, problèmes solides et problèmes de ligne [56].

la trisection de l'angle et la conchoïde

Nous avons déjà dit que les géomètres grecs ont su inventer divers instruments pour résoudre les problèmes de construction ; parmi eux nous citerons l'instrument à construire des conchoïdes, lequel peut faire l'objet d'un travail au laboratoire de mathématiques (cf. figure ci-dessous).

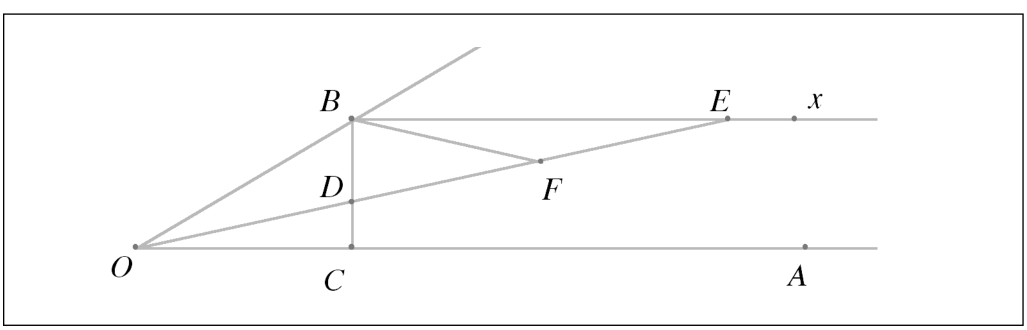
Rappelons comment la conchoïde intervient dans la trisection de l'angle :

Soit l'angle AOB à diviser en trois parties. Du point B, on mène la perpendiculaire BC à la droite OA et la parallèle Bx à cette même droite. Considérons une droite passant par O, coupant BC en D et Bx en E de telle sorte que l'angle AOD soit le tiers de l'angle AOB. Soit F le milieu de DE, le triangle BFE (F milieu de l'hypoténuse du triangle rectangle BDE) est isocèle, par conséquent l'angle BFO est le double de l'angle BEF, et comme les angles alternes-internes BEF et EOA sont égaux, on en déduit que les angles BOF et BFO sont égaux, c'est-à-dire que le triangle BOF est isocèle de sommet B. Ainsi $BO = BF$, ce qui implique, puisque $BF = DF = EF$, que $DE = 2OB$.

Réciproquement, l'angle AOB étant donné, on montre que si l'on construit une droite coupant la droite BC perpendiculaire à la droite OA et la parallèle à la droite OA passant par B respectivement en D et E de sorte que $DE = 2OB$, alors l'angle AOD est le tiers de l'angle AOB.

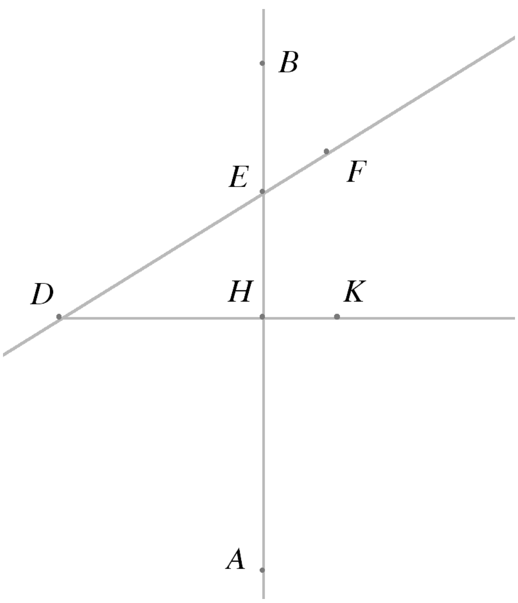
Pour diviser l'angle AOB et trois parties, il suffit donc d'intercaler entre les deux droites passant pas B respectivement perpendiculaire et parallèle à la droite OA un segment de longueur $2OB$ dont le support passe par O.

Le point E est alors l'intersection de la droite Bx avec une courbe, la *conchoïde de Nicomède* [57] qu'on peut définir de la manière suivante : on considère une droite variable passant par O, elle coupe la droite BC en un point N et on note M le point de la droite ON tel que NM soit égal à une longueur donnée (ici $2OB$), la courbe est le lieu du point M lorsque la droite variable tourne autour de O. Notons qu'il y a plusieurs points d'intersection de la droite Bx avec la conchoïde, cette courbe étant du quatrième degré ; il y a cepen-



dant un seul point situé du coté de la droite BC qui ne contient pas O comme on peut le voir sur la figure ou le vérifier par le calcul.

On peut construire *mécaniquement* la conchoïde de Nicomède en utilisant l'appareil suivant :



Imaginons deux règles perpendiculaires, la première portant une rainure AB, la seconde un point fixe D, ainsi qu'une réglette mobile comportant une rainure dans laquelle est inséré un clou fixé en D et un point fixe E matérialisé par un clou pouvant glisser dans la rainure AB ; on fixe un stylet au point F de la réglette mobile qui coïncide avec le point K lorsque la règle mobile coïncide avec la règle DH, alors ce stylet décrit dans le plan fixe une conchoïde de Nicomède.

On a ainsi une construction continue de la conchoïde de Nicomède, le point fixe étant le point D, la droite fixe étant le support de la rainure AB, la longueur constante étant la longueur EK.

retour sur la classification des problèmes de construction géométrique

La classification des problèmes de constructions géométriques s'affinera avec la distinction par Descartes entre les courbes géométriques (appelées aujourd'hui courbes algébriques) et les courbes mécaniques (appelées aujourd'hui courbes transcendantes)[58]. Une courbe algébrique peut être définie par une équation de la forme

$$F(x,y) = 0$$

où F est un polynôme ; on associe à une courbe algébrique son degré qui est le degré du polynôme P. Une construction géométrique se réduisant à un problème d'intersection de deux courbes, on peut classer les problèmes en fonction du degré des courbes qui interviennent. En contrepoint, la résolution des équations algébriques, c'est-à-dire de la forme

$$P(x) = 0$$

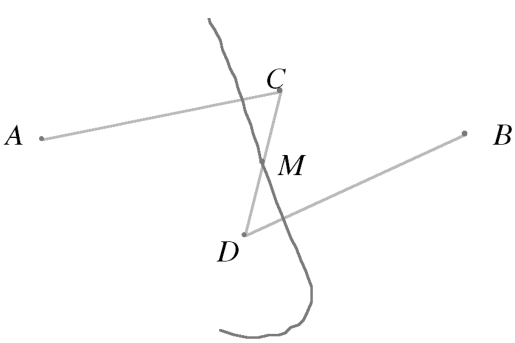
où P est un polynôme, conduit à un problème d'intersection de courbes. On relie ainsi la résolution des équations algébriques aux constructions géométriques.

On peut alors chercher les conditions algébriques pour que des constructions géométriques soient réalisables à la règle et au compas[59].

les systèmes articulés

Parmi les divers instruments inventés pour résoudre des problèmes de constructions géométriques nous citerons les systèmes articulés.

La théorie des systèmes articulés a son origine dans la construction de mécanismes permettant de transformer un mouvement en un autre mouvement (par exemple, transformer un mouvement circulaire en mouvement rectiligne) ; elle s'inscrit ainsi dans une théorie du guidage. Un système articulé peut alors être défini comme un mécanisme (ici, un assemblage de barres liées entre elles par leurs extrémités) qui relie le point guidant au point guidé. Ce mécanisme matérialise ainsi l'opération qui transforme la trajectoire du point guidant en la trajectoire du point guidé. Parmi les systèmes articulés nous citerons le parallélogramme de Watt constitué par trois barres AC, CD, DB telles que les barres AC et DB soient égales. Les barres AC et DB sont appelées les *manivelles*, la barre CD est appelée la *bielle*. Les points A et B étant fixés, lorsque la manivelle AC tourne autour du point A, le milieu de la bielle CD décrit approximativement une droite. Ce parallélogramme a été inventé pour permettre de contrôler le mouvement rectiligne du piston d'une machine à vapeur.



Pour l'étude des systèmes articulés, nous renvoyons aux ouvrages de Kœnigs [60], de Lebesgue [61] et de Bricard [62]. Nous nous contenterons de rappeler le théorème de Kempe qui dit que toute courbe algébrique peut être construite par un système articulé convenable, le point guidant décrivant une droite et le point guidé décrivant la courbe cherchée [63]. Par contre on notera que les courbes transcendantes (les courbes mécaniques de Descartes) ne sont pas susceptibles d'une construction mécanique comme l'explique Lebesgue à propos de la construction d'un segment de longueur $2/\pi$ *via* la quadratrice de Dinostrate [64].

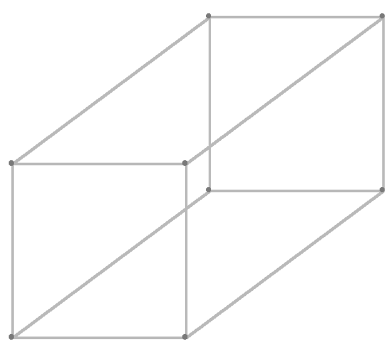
L'étude des systèmes articulés peut être abordée assez tôt dans l'enseignement secondaire, autant sur le plan théorique que pratique, ce qui en constitue un matériel de choix pour le laboratoire de mathématique.

5. — *objets de l'espace*

Nous avons parlé jusqu'ici de constructions d'objets plans. La représentation et la construction d'objets de l'espace pose d'autres problèmes, bien plus difficiles. Nous avons déjà remarqué la difficulté d'utiliser le principe de l'égalité par superposition pour les corps solides. On retrouve une difficulté analogue pour les constructions d'objets solides, difficulté d'autant plus grande que, pour étudier un corps solide on utilise souvent une représentation plane de cet objet. Ici encore se mêlent, comme nous l'allons voir sur quelques exemples, les trois aspects de la connaissance de Gonseth, l'aspect théorique jouant un rôle d'autant plus important, que ce soit pour la construction de représentations planes d'objets de l'espace ou que ce soit pour la réalisation matérielle de ces objets, qu'il doit suppléer à la faiblesse de la connaissance empirique des objets de l'espace.

Notons d'abord une différence essentielle entre les figures planes et les objets de l'espace. Une figure plane est appréhendée par le dessin qui la représente, ainsi un cercle ou un carré, un objet de l'espace est appréhendé par un dessin plan qui en est une représentation déformée, ce qui pose un double problème, celui de la construction de cette représentation, celui de l'appréhension de l'objet *via* cette représentation et en particulier celui de la réalisation matérielle d'un objet à partir d'une représentation.

Qu'est-ce qui permet de voir un cube dans le dessin suivant ?



On dit souvent d'un élève qui ne sait pas reconnaître un objet de l'espace *via* un dessin plan ou qui ne sait en construire une représentation plane, qu'il ne voit pas dans l'espace, expression dangereuse en ce sens qu'elle déplace la question. A moins d'être aveugle, cet élève voit dans l'espace ; qu'il ne sache pas reconnaître ou représenter une situation spatiale *via* un dessin plan montre seulement qu'il ne sait pas faire le lien entre une situation spatiale et sa représentation plane. Mais cela renvoie au caractère artificiel de toute représentation plane, artificiel au sens que toute représentation est une construction humaine, ce qui implique qu'il faut l'apprendre.

Le problème de la représentation est double, d'une part représenter un objet spatial que l'on voit, d'autre part représenter un objet imaginaire. Parmi les divers modes de représentation inventés par l'homme, nous noterons la perspective inventée par les peintres et architectes de la *Renaissance*. Les inventeurs ont cherché à légitimer les règles de la perspective en s'appuyant sur la géométrie rationnelle, c'est-à-dire celle des *Eléments* d'Euclide, ce qui a conduit d'une part à un nouveau développement de ce que l'on appelle la géométrie dans l'espace[65], d'autre part à la naissance d'un nouveau chapitre de la géométrie, la géométrie projective, bel exemple d'un chapitre des mathématiques issu d'une pratique, ici une pratique de dessin.

Mais ce qui nous intéresse ici c'est la relation entre la pratique perspectiviste et la géométrie dans l'espace. Rappelons l'une des difficultés de la géométrie dans l'espace, d'une part, il faut pouvoir représenter des objets de l'espace pour les étudier, d'autre part, pour représenter ces objets il faut des règles de représentation et ces règles s'appuient sur la géométrie dans l'espace. Le renvoi à la perspective montre alors le rôle joué par une pratique, qui ne se réduit pas à une pratique empirique, dans la construction de la géométrie dans l'espace sous sa forme actuelle.

Le problème de la construction d'un objet de l'espace pose celui de sa conception avant construction. Pour des raisons que nous ne pouvons expliciter ici, c'est *via* un dessin plan que celui qui conçoit un objet spatial le représente souvent avant sa construction, ce qui pose un double problème : dessiner ce que l'on conçoit pour le concepteur, exécuter ce qui est proposé par le constructeur. Cela impose des règles de dessin parmi lesquelles nous citerons la perspective et la géométrie descriptive fondée sur une double projection orthogonale [66]. Ces deux méthodes de dessin se fondent aujourd'hui sur la géométrie rationnelle et ont leur place dans un enseignement mêlant les trois aspects de la géométrie, ce qui justifie leur place dans le laboratoire de mathématiques.

constructions de polyèdres

Pour terminer ce paragraphe, nous reviendrons sur quelques problèmes de constructions de solides, essentiellement des polyèdres. La construction des corps ronds pose d'autres problèmes que nous n'aborderons pas ici. Dans sa conférence citée sur les exercices pratiques de mathématiques, Emile Borel écrit :

> *"… les modèles de Géométrie plus ou moins compliqués … ne doivent pas être détruits quand on les possède, car ils peuvent rendre quelques services ; mais des modèles simples, construits pas les élèves eux-mêmes, avec du bois, du carton, du fil, de la ficelle, etc, les instruiront bien davantage."* [67]

et Borel préconise la mise en place d'un atelier de menuiserie dont le préparateur serait un ouvrier menuisier qui aiderait les élèves à fabriquer des modèles de corps solides et des appareillages simples. A ce travail du bois, on peut ajouter, ou substituer, aujourd'hui le travail sur polystyrène proposé par Charles Pérol, la scie à bois étant remplacée par un appareil, le *filicoupeur*, comprenant un fil chauffé permettant de découper le polystyrène suivant des plans [68]. Dans les deux cas, on voit aisément que le travail de découpe suppose une préparation théorique, que celle-ci résulte d'un calcul ou d'une représentation plane préalable.

On peut ainsi construire divers types de polyèdres, dont les polyèdres réguliers. La construction du tétraèdre régulier montre déjà les difficultés du problème.

6. — *remarques sur les objets géométriques*

Qu'est-ce qu'un objet géométrique ? une réponse classique, s'appuyant sur la philosophie platonicienne, dit qu'un objet géométrique est un objet idéal. Mais une telle affirmation n'explique rien. Un objet idéal apparaît comme un objet mystérieux inventé, on ne sait trop pourquoi, par la secte des mathématiciens, et sur lesquels cette secte s'amuse à "faire des démonstrations" celles-ci restant tout aussi mystérieuses que les objets sur lesquels elles opèrent.

La question est donc moins de donner une définition des objets géométriques que de tenter d'expliciter comment l'on appréhende ces objets, que ce soit comme objets mondains, c'est-à-dire issus de l'appréhension du monde extérieur, ou que ce soit comme objets de discours sur lesquels on peut raisonner selon les règles. Ce sont ces objets de discours qui constituent ce que l'on appelle les idéalités mathématiques.

Nous reviendrons encore une fois sur les trois aspects de la connaissance définis par Gonseth, ce qui conduit à préciser comment un objet géométrique participe de ces trois aspects, comment il est lié à la connaissance intuitive sans laquelle il n'y a pas de connaissance possible et comment, en tant qu'objet de la connaissance théorique, il devient objet de discours, ce qui conduit à considérer les divers modes de discours possibles, parmi lesquels le discours euclidien et le discours hilbertien que nous avons déjà cités. Pour ce faire, nous examinerons l'un des objets premiers de la géométrie élémentaire, la ligne droite.

6.1. — *un exemple d'objet géométrique : la ligne droite*

Lorsque l'on pose à des étudiants de CAPES la question : *qu'est-ce qu'une droite ?* certains ont l'impression que l'on se moque d'eux, tant la question leur semble facile. Et pourtant ils s'aperçoivent vite que la question est difficile et que l'on ne saurait y répondre en se contentant d'une définition. On peut évidemment répondre : une droite est un espace affine de dimension 1, mais cette réponse suppose d'une part que l'on connaisse l'algèbre linéaire, d'autre part que l'on se pose la question du rapport entre un espace affine de dimension 1 et un trait dessiné à la règle sur une feuille de papier ou au tableau noir.

Dans *Les Concepts Fondamentaux de la Science* Enriques écrit, à propos du concept de ligne droite :

> *"Le concept de ligne droite dérive de l'étude de différents ordres de phénomènes :*
> *1° De celle de corps **solides**, où la droite entre comme **axe** dont les points restent immobiles pendant la durée d'une rotation (à l'image d'un fil tendu, etc.) ;*
> *2° De la dynamique du point matériel, où la droite se présente comme trajectoire d'un point dont le mouvement n'est influencé par aucun des corps qui l'entoure ;*
> *3° De l'optique, et en général, de l'étude des radiations où la droite se présente comme un rayon ou ligne de symétrie des phénomènes, dans n'importe quel milieu, que la comparaison d'expériences déterminées révèle comme homogène."* [69]

Enriques remarque que la première et la troisième définitions renvoient au sens de la vue et du toucher alors que la seconde se définit par rapport au sens musculaire. Enriques insiste alors sur *"la concordance des différentes façons d'envisager la droite comme axe et comme rayon"*, c'est cette concordance *"qui nous permet de subsumer deux catégories différentes de phénomènes sous **une même représentation géométrique**"*. On peut alors considérer que le concept géométrique de droite unifie ces divers modes d'appréhension de la ligne droite. On peut y voir une des premières formes de ce que le physicien Wigner a appelé la déraisonnable efficacité des mathématiques dans les sciences de la nature [70].

Mais quel est le statut de cet objet unifiant divers objets venus du monde ? Pour aborder cette question nous examinerons diverses définitions de la ligne droite qui ont été données tout au long de l'histoire. La diversité de ces définitions que l'on rencontre dans les divers traités de géométrie montre la diversité des références (optique, mécanique et autres), ce qui explique la tentative d'énoncer une définition qui transcende ces références, voire de donner une définition indépendante de toute référence mondaine.

Nous distinguerons alors d'une part les *définitions empiriques*, renvoyant aux phénomènes que le concept de droite se propose de représenter et les *définitions proprement mathématiques*, ces dernières se divisant en *définitions ontologiques*, c'est-à-dire renvoyant à des objets antérieurs, et en *définitions langagières*.

6.1.1. *définitions empiriques*

— la définition optique (le regard et la lumière)

On énonce souvent cette propriété que la lumière se propage en ligne droite, par contre, pour définir une ligne droite on renvoie aux rayons lumineux, ce qui semble être un cercle. En fait il n'y a pas de cercle si l'on remarque que l'idée de ligne droite renvoie au trajet de la lumière, ou plutôt, à la ligne du regard. Que signifie *"aller tout droit"*, ou *"aller droit devant soi"*, sinon suivre la ligne définie par le regard ? C'est ainsi que lorsque l'on va chercher un objet, à moins qu'il y ait un obstacle matériel, on va *"tout droit"* vers cet objet, c'est-à-dire qu'on suit la ligne définie par le regard qui va de l'œil à l'objet.

Les Anciens expliquaient que la lumière va de l'œil aux objets, il s'agit alors moins du trajet lumineux au sens moderne que du regard qui va effectivement de l'œil aux objets. Et l'on sait que pour vérifier que trois points sont alignés, il suffit, se plaçant à l'un des points extrêmes, de regarder les autres points. Si l'on ne voit qu'un seul point, c'est que ces points sont alignés. C'est ainsi que l'on peut comprendre cette phrase du Parménide de Platon qui dit qu'on appelle droit *"ce dont le milieu est en avant des deux extrémités"* [71] comme l'explique Vitrac dans son commentaire de la définition euclidienne de la droite [72].

Dans son *Essai Critique sur les Principes Fondamentaux de la Géométrie Elémentaire*, Hoüel précise ce point de vue optique en écrivant, à propos d'un observateur qui se propose de marcher vers un point qu'il aperçoit :

> *"L'**instinct** le porte à marcher dans la **direction** suivant laquelle ce point lui envoie ses impressions lumineuses."* [73]

et il ajoute :

> *"La preuve que ce procédé est **instinctif**, c'est qu'il est suivi par tous les animaux."*

Hoüel distingue alors l'instinct, lequel est naturel, au sens qu'il est suivi par tous les animaux, de l'expérience, laquelle fait appel à la réflexion. Il y a ainsi un caractère instinctif de la droite qui précède toute expérience. On peut alors considérer que le caractère empirique de la notion de droite marque le passage de l'instinctif à l'expérience.

— *la droite comme limite*

Les notions de limite et de frontière [74] sont introduites dans les *Eléments* d'Euclide pas les définitions suivantes :

> *13 - Une frontière est ce qui est limite de quelque chose*
>
> *14 - Une figure est ce qui est contenu par quelques frontières*
>
> …
>
> *19 - Les figures rectilignes sont les figures contenues par des droites …* [75]

On retrouve encore la définition comme limite dans le traité de Rouché et Comberousse qui écrivent au début de leur traité :

> *"Le **volume** d'un **corps** matériel est l'étendue d'un lieu que ce corps occupe dans l'espace. Ce lieu est essentiellement limité ; sa limite, qui le sépare de l'espace environnant, prend le nom de **surface**. Les diverses faces d'un corps sont autant de surfaces dont les limites ou les intersections mutuelles s'appellent **lignes**. Enfin on donne le nom de **points** aux limites ou extrémités d'une ligne, aux intersections mutuelles des lignes."* [76]

et ajoutent :

> *"Ces idées de surface, de ligne et de point, étant une fois acquises par la considération des corps, la surface, la ligne et le point*

peuvent ensuite être conçus indépendamment du corps, des surfaces et des lignes dont ils constituent les limites. C'est ainsi qu'on arrive à regarder inversement une ligne comme le lieu des positions successives d'un point mobile, et une surface comme le lieu des positions successives d'une ligne qui se meut suivant une loi déterminée."

Ainsi le lien entre la définition en tant que limite et la définition en tant que trajectoire est accepté sans discussion. La ligne droite est alors "définie" comme *"la plus simple de toutes les lignes"* dont *"la notion est familière à tout le monde, et dont un fil tendu offre l'image"*.

— *les définitions imagées*

Plutôt qu'une définition illusoire, de nombreux ouvrages d'enseignement préfèrent renvoyer à des images significatives, celle du rayon lumineux et celle du fil tendu étant parmi les plus fréquentes.

Quant à Méray, qui veut développer un enseignement de la géométrie qui s'appuie sur *"la vision des faits de l'espace"* [77], il écrit

> *"L'idée de ligne nous vient des corps très allongés, mais extrêmement déliés dans tous les autres sens, comme un fil très fin, la trace lumineuse apparente d'un point brillant animé d'une très grande vitesse, celle laissée sur un corps quelconque par un morceau de craie, un petit pinceau chargé de couleur, etc."* [78]

6.1.2. *définitions mécaniques*

— *la droite comme trajectoire*

Dans ses *Leçons de Géométrie élémentaire* Hadamard présente, plus qu'il ne définit, la notion de ligne de la façon suivante :

> *"Elle peut être considérée comme engendrée par un point qui se déplace sur elle"* [79]

et il donne l'exemple d'une ligne tracée sur une feuille de papier avec la pointe d'un crayon. La ligne droite est alors définie comme la plus simple des lignes *"dont le fil tendu nous donne l'image"* [80].

En fait si la définition d'une ligne comme trajectoire est aisée, celle d'une ligne droite est plus complexe et s'appuie sur le principe d'inertie que Descartes formulait ainsi dans ses *Principes de Philosophie* :

> *"Que tout corps qui se meut tend à continuer son mouvement en ligne droite"* [81]

et que Newton précisera de la façon suivante :

> *"Every body continues in its state or rest, or of uniform motion in a right line, unless it is compelled to change that state by forces impressed upon it"* [82]

Si on peut considérer la définition d'une ligne comme trajectoire comme relevant de la connaissance empirique, le recours au principe d'inertie pour définir une ligne droite s'inscrit dans un cadre théorique que l'on peut considérer comme un principe de simplicité, ce qui pose la question du simple, question que nous ne pouvons aborder dans le cadre de ce texte [83]. Pour montrer la complexité de la notion de "simple", nous rappellerons que, pour les géomètres grecs, c'est le mouvement circulaire qui est le mouvement le plus simple.

— *l'approche instrumentale*

L'approche instrumentale est une forme particulière de la définition comme trajectoire au sens où la droite dessinée est la trace d'un point guidé par l'instrument de dessin.

Pour aborder cette approche instrumentale, nous rappelons les trois premiers postulats énoncés par Euclide, déjà cités

“Qu'il soit demandé de mener une ligne droite de tout point à tout point.“

“Et de prolonger continûment en ligne droite une ligne droite limitée.“

“Et de décrire un cercle à partir de tout centre et au moyen de tout intervalle.“

Nous avons déjà dit que ces postulats affirment la possibilité de constructions même lorsque celles-ci sont matériellement impossibles. En cela ces postulats assurent le lien entre constructions instrumentales et définitions conceptuelles, ce qu'Abel Rey résume de la façon suivante :

“La règle et le compas (ne sont) *que le symbole des idées claires et distinctes de la droite et du cercle”* [84]

Ces postulats se situent ainsi au carrefour du théorique et de l'expérimental.

6.2. — *sur quelques définitions dites mathématiques*

Nous commencerons par la remarque suivante qui prolonge celles de Féderigo Enriques citées ci-dessus. Les diverses définitions énoncées ci-dessus conduisent à définir un objet unique rendant compte à la fois des phénomènes optiques et des phénomènes mécaniques cités. On peut il est vrai les relier en remarquant que pour vérifier la rectilignité d'une droite matérielle on peut recourir au procédé visuel attribué à Platon. Mais il y a plus comme le remarque Enriques, la rectilignité du rayon lumineux marque une propriété de symétrie que l'on retrouve, à l'époque classique, avec le principe d'inertie. Propriété que l'on retrouve encore dans la notion de verticale : un objet lâché tombe tout droit vers le sol ce qui indique la direction de la verticale, de même le fil à plomb indique la direction de la verticale ; on peut alors remarquer que le fil à plomb, laissé à lui-même, est tendu ce qui renvoie à la définition de la droite comme fil tendu. Ainsi la connaissance empirique nous conduit à mettre en relation [85] divers phénomènes.

Cela dit, nous distinguerons deux types de définitions mathématiques, d'une part *les définitions ontologiques* qui s'appuient sur l'existence préalable des objets, la définition apparaissant essentiellement comme une description, relevant ainsi de ce que les philosophes de Port-Royal appelaient des définitions de choses [86], d'autre part *les définitions langagières*.

définitions ontologiques

Nous rappellerons d'abord la définition euclidienne de la ligne droite :

“Une ligne droite est celle qui est placée de manière égale par rapport aux points qui sont sur elles.” [87]

Remarquons d'abord que cette définition n'apprend rien à qui ignore ce qu'est une ligne droite. On pourrait par ailleurs énoncer cette définition pour le cercle si on interprète cette définition comme exprimant que la droite (ou le cercle) est une courbe qui peut glisser sur elle-même sans se déformer. On peut en outre remarquer que la droite et le cercle sont les deux seules lignes du plan qui possèdent cette propriété [88].

D'autres définitions suivront qui relèvent d'une définition de chose, ainsi celle proposée par Archimède et reprise par Legendre qui définit la droite comme *“le plus court che-*

min d'un point à un autre", définition qui, pour être précisée, demande de définir l'expression *"le plus court chemin"*.

Devant les difficultés de définir la droite, Arnauld explique dans ses *Nouveaux Eléments de Géométrie* :

> *"Nous n'avons point défini la ligne droite, parce que l'idée en est très claire d'elle-même, & que tous les hommes conçoivent la même chose par ce mot"* [89]

Dans leur traité déjà cité, Rouché et Comberousse expliquent, sans la définir, que la ligne droite, *"la plus simple de toutes"*, est une notion familière et renvoient au fil tendu.

Cette notion de simplicité est souvent reprise dans les ouvrages de géométrie et nous citerons Leibniz qui, dans un texte, non publié de son vivant, sur la caractéristique géométrique, énonce cette définition plus métaphysique que scientifique :

> *"La droite est la ligne déterminée par deux points"* [90]

précisant que la droite est la seule ligne déterminée dès que l'on connaît deux de ses points ; ainsi la droite peut être considérée comme *la plus simple* parmi les lignes passant par deux points, ce que Leibniz explique dans un autre texte sous la forme suivante :

> *"Ce qui est déterminé par la donnée de deux points est l'extensum le plus simple passant par eux, que nous appellerons droite."* [91]

Le caractère redondant des textes de Leibniz laisse entendre que Leibniz cherchait une "bonne" définition de la droite pour développer le calcul géométrique qu'il espérait.

La question d'une "bonne" définition de la droite est récurrente dans l'histoire des mathématiques ; ainsi D'Alembert, après avoir évoqué la difficulté de la théorie des parallèles, écrit :

> *"On parviendrait plus facilement à la trouver* (la démonstration du postulat des parallèles)*, si on avait une bonne définition de la ligne droite…"* [92]

définitions langagières

La difficulté d'énoncer une définition consistante de la droite implique que l'on ne peut échapper dans l'enseignement à une approche empirique, laquelle permet un premier développement de la géométrie élémentaire dès que l'on a énoncé quelques propriétés de la droite.

C'est seulement dans un second temps que l'on peut espérer des définitions purement langagières. Ici encore nous citerons deux types de définitions, les définitions analytiques et les définitions "à la Hilbert".

Les définitions analytiques ne sont autres que les définitions de noms des philosophes de Port-Royal déjà cités. Exemple d'une telle définition, la définition du cercle dans les *Eléments* d'Euclide :

> *"Un cercle est une figure plane contenue dans une ligne unique (celle qui est appelée circonférence) par rapport à laquelle toutes les droites menées à sa rencontre à partir d'un unique point parmi ceux qui sont placés à l'intérieur de la figure, sont (jusqu'à la circonférence du cercle) égales entre elles."* [93]

Ici il suffit de connaître la signification des mots constituant la phrase pour savoir de quelle figure il s'agit, le rôle de la définition consistant à donner un nom à la figure ainsi définie.

Les définitions de noms ont cependant leur limite : une définition de nom s'exprime avec des mots, lesquels doivent eux-mêmes être définis. On retrouve ici le *cercle du dictionnaire* que l'on peut formuler de la façon suivante : un mot étant défini, on lit les définitions des divers mots utilisés dans la définition du premier mot et on recommence ; on finit par rencontrer l'un des mots dont on cherche la définition, c'est cela qui constitue le cercle du dictionnaire. Ce qui rend incontournable l'usage de définitions de choses, aussi problématiques soient ces définitions. On comprend alors la position d'Arnauld refusant d'énoncer une définition de la droite. Mais ce refus n'élimine pas le problème.

Le formalisme hilbertien proposera une solution à ce problème, l'introduction de termes primitifs non définis, c'est-à-dire ne renvoyant à aucune signification extérieure, ces termes primitifs étant reliés par les axiomes, eux-mêmes ne renvoyant à aucune signification extérieure et apparaissant comme de simples règles d'usage des termes primitifs. Il ne s'agit pas de définition proprement dite, qu'elle soit de chose ou de nom, ou plutôt, s'il y a définition, celle-ci ne prend sens que *via* le développement du discours. Ainsi les termes primitifs : "points", "droites", "plans", ne sont pas définis, mais leur signification interne se construit d'abord avec les axiomes qui en fixe les règles d'usage, ensuite avec le développement du discours démonstratif. Une fois le cadre mis en place, on peut énoncer des définitions analytiques introduisant de nouveaux objets, mais ces objets ne prennent sens que dans ce cadre, même si, pour des raisons extérieures au discours, ces objets renvoient à des significations plus générales. Cela nous rappelle que si l'axiomatique hilbertienne constitue un cadre assurant la rigueur du discours démonstratif et les relations logiques entre les diverses propositions, elle a un rôle essentiellement méthodologique (cf. ci-dessous).

7. — *retour sur l'axiomatique*

Nous avons fait allusion, à propos de la construction du triangle équilatéral dans les *Eléments* d'Euclide, à la distinction entre deux conceptions de l'axiomatique, l'euclidienne et l'hilbertienne.

La conception euclidienne s'appuie sur une ontologie des objets mathématiques (que l'on renvoie ces objets à des idéalités pures à la façon platonicienne ou à des abstractions des objets du monde importe peu ici), ces objets et leurs propriétés sont antérieurs à la connaissance que l'on en a et les énoncés primitifs peuvent être considérés comme relevant de l'évidence, c'est cela qui conduit Legendre à écrire au début de ses *Eléments de Géométrie* :

> *"**Axiome** est une propriété évidente par elle-même.*
>
> ***Théorème** est une vérité qui devient évidente au moyen d'un raisonnement appelé **démonstration**."* [94]

Au contraire, dans un exposé de type hilbertien, les objets primitifs ne sont définis que par les axiomes qui les relient, ce qui exige que toutes les propriétés premières soient explicitées. Dans ce cadre la construction euclidienne du triangle équilatéral exige que l'on énonce un axiome assurant l'existence d'un point commun aux deux cercles. On peut considérer, d'un point de vue méthodologique, l'axiomatique hilbertienne comme l'énoncé des règles d'usage d'un ensemble de termes qui ne renvoient, en principe, à aucune signification extérieure. Mais c'est un point de vue réducteur de ne voir dans l'axiomatique hilbertienne que des règles d'usage ; l'axiomatique hilbertienne a un aspect double, d'une part elle énonce des règles d'usage de termes non définis, d'autre part ces règles sont formulées de façon à prendre en charge des significations extérieures, par exemple la géométrie euclidienne, et assurer en même temps la rigueur nécessaire du raisonnement démonstratif. Ce que Hilbert rappelle dans la préface d'un ouvrage dont on peut regretter qu'il n'ait jamais été traduit en français :

> *"In mathematics, as in any scientific research, we find two tendencies present. On the one hand, the tendency toward* ***abstraction*** *seeks to crystallise the* ***logical*** *relations inherent in the maze of material that is being studied, and to correlate the material in a systematic and orderly manner. On the other hand, the tendency toward* ***intuitive understanding*** *fosters a more immediate grasp of the objects one studies, a live* ***rapport*** *with them, so to speak, which stresses the concrete meaning of their relations."* [95]

Ainsi apparaît une complémentarité entre un point de vue logique qui permet la rigueur du langage et un point de vue intuitif qui renvoie aux objets premiers et aux assertions premières de la géométrie élémentaire [96] ; en ce sens le formalisme hilbertien apparaît bien plus comme un choix méthodologique que comme une conception globale des mathématiques.

Questions d'analyse

Nous aborderons l'aspect expérimental de l'analyse mathématique à travers deux types de problèmes de l'analyse élémentaire, la représentation graphique des fonctions et l'étude des courbes intégrales d'une équation différentielle du premier ordre.

1. — *représentation graphique d'une fonction d'une variable*

La représentation graphique d'une fonction n'est pas un but en soi, une représentation graphique permet une appréhension globale des propriétés d'une fonction : sens de variation, maximum et minimum, comportement asymptotique, etc. La construction effective de la représentation peut alors être définie comme une matérialisation de la fonction que l'on étudie et en ce sens participe de la part expérimentale de l'activité mathématique.

On sait aujourd'hui que les calculatrices graphiques font apparaître directement la représentation sur écran dès que l'on a entré la fonction étudiée dans la machine. Si l'usage de la machine est efficace, cet usage efface, par son efficacité même, l'aspect expérimental de la construction du graphe, et par cela même la lecture graphique des propriétés de la fonction qui reste l'objet de la représentation graphique. La construction de la représentation graphique par la machine a un caractère magique pour qui ne connaît pas le lien entre cette représentation graphique et la fonction. Notre propos n'est pas de refuser l'usage de la machine, mais il est nécessaire de distinguer entre les nécessités de performance qui sont celles de la recherche ou de l'entreprise et la question de la compréhension qui est l'un des objectifs de l'enseignement, c'est en cela qu'un usage prématuré de la machine peut s'avérer nuisible dans l'enseignement.

On peut alors imaginer, au laboratoire de mathématiques, à côté de la construction effective de la représentation graphique d'une fonction donnée, l'exercice suivant : on donne à la fois l'expression analytique d'une fonction et sa représentation graphique et l'on demande aux élèves d'expliquer ; on peut aussi proposer cet exercice comme épreuve de baccalauréat.

2. — *équation différentielle du premier ordre*

Considérons l'équation différentielle du premier ordre

$$y' - a(x)y = 0$$

Une solution de cette équation différentielle est une fonction $y = f(x)$ qui vérifie la relation

$$f'(x) - a(x)f(x) = 0$$

On sait trouver une expression analytique des solutions sous forme intégrale, mais ce n'est pas cette expression analytique qui nous intéresse ici, d'autant que la forme analytique laisse entière l'étude des solutions. Il peut alors être intéressant de représenter graphiquement les solutions, ce qui permet de connaître leur comportement. Pour ce faire, on remarque que l'équation différentielle donnée peut s'écrire

$$dy - a(x)dx = 0$$

qui est un cas particulier de l'équation différentielle générale

$$f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0$$

Dans un repère orthogonal, cette équation différentielle définit les lignes intégrales du champ de vecteurs de coordonnées $(g(x,y), -f(x,y))$. Si l'on revient à l'équation différentielle

$$dy - a(x)dx = 0$$

les lignes intégrales du champ de vecteurs de coordonnées $(1, a(x))$ sont les représentations graphiques des solutions de l'équation. On obtient ainsi une méthode graphique de résolution des équations différentielles du premier ordre.

On peut alors procéder de la façon suivante : étant donnée l'équation différentielle

$$f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0$$

on construit en un nombre suffisant de points le vecteur défini par le champ $(g(x,y), -f(x,y))$. Si le nombre de points est suffisamment grand, on voit apparaître les lignes intégrales. Evidemment cette méthode est fastidieuse et l'on sait aujourd'hui construire les courbes intégrales par ordinateur. Mais, comme nous l'avons déjà remarqué à propos des représentations graphiques de fonctions, l'informatique n'est ici qu'un outil, efficace certes, mais cet outil, par son efficacité même, efface le caractère expérimental de la construction. Cela implique que dans l'enseignement, on commence par ce travail fastidieux “à la main” pour comprendre ce qui se passe, ce n'est qu'après avoir traité quelques exemples “à la main” que l'on peut utiliser cet outil performant que représente l'ordinateur et que l'on peut ainsi découvrir des phénomènes qui échappent à l'activité “à la main”, ainsi les comportements cahotiques. Mais le travail ne consiste pas seulement à découvrir ces phénomènes, il faut encore les comprendre, ce qui renvoie ici à une dialectique, au sens gonsethien, entre les méthodes analytiques et les représentations géométriques. Nous renvoyons à l'ouvrage de Bouligand et Devisme [97] et à celui de Artigues et Gautheron [98], le premier s'appuyant sur la construction "à la main" des lignes intégrales, le second montrant l'apport des ordinateurs.

La numérisation du monde

On entend souvent ce discours qui se veut moderne : *"Avec l'informatique, les mathématiques sont devenues une science expérimentale".* Et de faire allusion à l'utilisation des ordinateurs par les mathématiciens pour étudier des phénomènes aussi complexes que le chaos ou les fractals. On peut voir ici une série de contresens.

D'abord les mathématiques n'ont pas attendu les ordinateurs pour comprendre une part d'expérimental comme nous l'avons rappelé ci-dessus, que ce soit avec les instruments de calcul [99] ou avec les instruments de mesure de la géométrie [100] ou encore avec les instruments de dessin.

Ensuite l'expérimentation ne se réduit pas à une simple manipulation de matériel [101]. Les mathématiciens qui travaillent sur ordinateur savent de quoi ils parlent et ce qu'ils cherchent. Il ne suffit pas de regarder des objets fractals pour comprendre de quoi il s'agit et les ensembles de Julia ont une assise théorique sans laquelle on ne comprend rien aux images qui apparaissent sur l'écran.

Enfin une simulation sur ordinateur suppose un appareillage théorique qui s'inscrit matériellement dans un logiciel. C'est à travers ce logiciel que l'on observe une simulation ; on observe moins un phénomène que sa reconstruction numérique *via* le logiciel. Il ne s'agit plus seulement de la théorie matérialisée définie par Bachelard, laquelle renvoyait à des phénomènes matériels que l'expérimentateur devait interpréter, la matière est ici celle définie par le système informatique lui-même (hardware et software réunis) lequel produit une image sur écran qui traduit ce qui est inscrit dans le logiciel, c'est-à-dire la théorie elle-même.

C'est en ce sens que l'on peut définir une simulation comme une *expérimentation décalée*. On expérimente moins sur le monde que sur une reconstruction numérique du monde. Il nous faut alors revenir sur ce que l'on peut appeler *la numérisation du monde*.

On peut considérer comme une première forme de numérisation du monde la mesure des grandeurs dont nous avons déjà parlé. Mais si la mesure associe à toute grandeur un nombre qui est sa mesure, la numérisation du monde se présente comme une réduction numérique du monde, un objet du monde étant représenté par un système de nombres. Cette numérisation, antérieure à la pratique informatique, peut être considérée comme une forme de pythagorisme, le slogan *"tout est nombre"* étant conforté par l'efficacité des méthodes numériques, efficacité aujourd'hui renforcée par l'usage de l'informatique. Il est alors tentant de retrouver cette efficacité dans l'enseignement et d'inventer une informatique pédagogique qui relève bien plus de la fascination devant les machines que de l'usage raisonné d'icelles. D'autant que les *informatiseurs* de la pédagogie se donnent bonne conscience en expliquant qu'en renvoyant les questions techniques à la machine, on a plus de temps pour s'intéresser aux questions conceptuelles. Loin de prendre en compte les articulations gonséthiennes, cette façon de désintellectualiser la technique implique en retour une machinisation des aspects conceptuels, ce que Denis de Rougemont appelle une *prolétarisation de la pensée* [102], et ne peut qu'ajouter de nouveaux obstacles à l'apprentissage, ce que nous nous proposons d'expliciter à travers quelques exemples.

1. — *questions de calcul*

Lorsque l'on effectue sur une calculatrice les opérations suivantes : " taper 8, taper ×, taper 17, taper = ", et qu'on lit sur l'écran 136, qu'a-t-on fait ? Celui qui sait calculer sait qu'il s'agit d'une multiplication, celui qui ne sait pas ne voit qu'une suite d'opérations sur une machine qu'il ne comprend pas. Dans les deux cas, on ne peut parler d'expérimentation, tout au plus celui qui sait calculer pourra dire que la machine fonctionne bien et en général il s'en sert pour des opérations plus compliquées. La calculatrice est un outil de calcul pour qui sait calculer et si elle permet des expérimentations, c'est dans un contexte bien défini, mais elle ne saurait en aucun cas être un instrument d'apprentissage du calcul dans la mesure où elle réduit cet apprentissage, non seulement à sa seule part technique, mais à une machinisation de cette part technique, c'est-à-dire à une série de consignes à respecter pour arriver à bon port.

C'est oublier que le premier enseignement du calcul se situe au carrefour des trois aspects de la connaissance définis pas Gonseth et qu'il est impossible de séparer, dans ce premier enseignement, la part technique et la part conceptuelle. Ce n'est qu'une fois acquises les techniques de calcul, une fois qu'elles sont devenues automatiques, que celui qui sait calculer peut distinguer, si besoin est, ce qui relève de la technique et ce qui relève des aspects conceptuels. Un usage prématuré de la machine supprime l'étape nécessaire de la mécanisation des techniques [103] et ne peut que bloquer l'appréhension des aspects conceptuels.

On pourrait de même regarder la séquence : " taper 56, taper *cos*, taper = ", on lit alors sur l'écran 0.5591929. De quoi s'agit-il ? Cette suite d'opérations n'a de sens que pour qui connaît des éléments de trigonométrie.

La calculatrice est un instrument de calcul, c'est à ce titre qu'elle a sa place dans l'enseignement, ce qui implique que celui qui s'en sert sache pourquoi il s'en sert. Cela n'empêche pas un usage ludique de la machine pour qui sait s'en servir, mais le ludique ne relève pas d'une définition objective, il relève de l'intérêt et du plaisir de celui qui s'en sert, parce qu'il sait s'en servir.

2. — *remarques sur les logiciels de constructions géométriques*

On pourrait reprendre, à propos des logiciels de dessin, ce que l'on a dit des calculatrices, en y ajoutant un aspect important du dessin géométrique, l'aspect manuel du dessin, c'est-à-dire le rapport physique aux instruments de dessin.

Pour comprendre la distinction entre le travail "à la main" et le travail sur machine, il nous faut revenir sur la distinction entre l'analogique et le numérique. L'analogique renvoie aux relations matérielles entre les différents constituants d'un système matériel, que ce soit le lien entre un sujet et des objets extérieurs, lien qui se définit *via* les cinq sens, ou que ce soit les relations entre les divers constituants de la machine, alors que le numérique renvoie à la numérisation du monde au sens que nous avons dit ci-dessus. Il ne faut pas oublier que la relation de l'homme au monde relève de l'analogique, le numérique renvoyant à ce que l'on pourrait appeler une relation *décalée*.

Ainsi dans le cas du dessin "à la main", c'est-à-dire avec des instruments manuellement guidés, le dessinateur garde un contrôle sur ce qu'il veut dessiner. S'il doit respecter des règles, autant celles issues de sa pratique que celles imposées par ses connaissances théoriques, il agit directement sur la matière, celle du matériau sur lequel il dessine (le papier ou le tableau) et celle des instruments de dessin (la règle, le compas ou tout autre). Outre ces règles, le dessinateur peut être confronté à des contraintes d'ordre matériel, ainsi dans le problème suivant : *deux droites étant données sur la feuille de dessin qui ne se rencontrent pas dans les limites de la feuille, construire une droite passant par un point de la feuille et le point d'intersection des deux droites données* [104].

Dans le dessin "à la machine", on peut parler de dessin décalé au sens où nous avons déjà parlé d'expérience décalée. Le lien entre le dessinateur et l'écran où doit apparaître le dessin passe par l'intermédiaire du logiciel et ce dernier fixe de nouvelles contraintes liées à son utilisation.

Il est vrai que l'on peut simuler l'analogique au sens que l'on remplace les instruments de dessin par le menu affiché, lequel permet d'effectuer les opérations que l'on veut, mais cette simulation constitue une illusion ; si cette illusion est sans dommage pour qui a la maîtrise à la fois de la géométrie dont il a besoin et de la pratique de la machine, elle constitue une difficulté supplémentaire pour qui ne possède pas cette double maîtrise [105]. D'autant qu'aux contraintes posées par la géométrie s'ajoute des contraintes liées à l'usage de la machine, telle celle de marquer les points intermédiaires de la construction comme le montre par exemple la création d'une macro pour construire des coniques *via* le théorème de Pascal ou la génération organique. On voit ainsi poindre à côté de la rigueur géométrique une rigueur informatique et il importe de savoir distinguer ces deux modes de rigueur.

Nous terminerons ce paragraphe avec les systèmes articulés. Aux contraintes déjà citées s'ajoutent des contraintes cinématiques liées à l'ordre des constructions, contraintes nécessaires pour que le système articulé fonctionne. La construction informatique s'avère ainsi plus difficile que la réalisation matérielle comme il est facile de le voir en comparant la construction informatique et la réalisation matérielle, utilisant par exemple des pièces de Meccano ou de Lego.

Il faut prendre un logiciel de dessin ou de géométrie dynamique pour ce qu'il est, une machine à dessiner et à animer des objets dessinés [106], et non un outil pédagogique. A-t-on déjà présenté la règle et le compas comme des outils pédagogiques ? Non, ce sont des instruments de dessin et c'est pour cela qu'ils ont leur place dans l'enseignement de la géométrie. On peut en dire autant des diverses machines à dessiner et à animer, ce qui implique de définir à quel moment du cursus leur usage devient pertinent.

3. — *des méthodes analytiques à la numérisation du monde*

La numérisation du monde a son origine dans le développement des méthodes analytiques, de l'*Art Analytique*, pour parler comme François Viète [107]. Le terme "analytique" renvoie à l'analyse des géomètres grecs comme l'explique François Viète dans le premier chapitre de son ouvrage. François Viète distingue deux modes de calculs (de logistiques), le numérique et le spécieux, celui qui porte sur les nombres et celui qui porte sur les grandeurs (les espèces)[108]. Ces deux calculs ont des points communs qui permettent de les unifier dans un calcul littéral où les éléments sur lesquels on calcule, éléments connus comme éléments inconnus, sont représentés par des lettres et c'est ce calcul littéral que développe Viète[109]. Le travail de François Viète a été suivi par le développement de la méthode des coordonnées par Descartes[110] et Fermat[111]. Rappelons que ces ouvrages mettent en place un calcul sur les grandeurs géométriques, lesquelles sont représentées par des lettres, conformément au programme de Viète.

C'est le développement de la méthode des coordonnées sous le nom de *géométrie analytique* qui conduira à des exposés dans lequel calcul littéral et calcul numérique vont se confondre comme le montre, par exemple, la définition des coordonnées d'un point du plan comme un couple de nombres, et celle d'un point de l'espace comme un triplet de nombres. Cette ambiguïté conduira à distinguer deux sortes de géométries comme l'explique Fano dans un chapitre de l'*Encyclopédie des Sciences Mathématiques Pures et Appliquées* :

*"On distingue généralement deux sortes de géométrie : la **géométrie synthétique**, qui considère les figures en elles-mêmes, et la **géométrie analytique**, qui établit ses résultats en ayant recours à l'analyse."*[112]

Et Fano précise :

*"Nous pouvons tout d'abord concevoir la géométrie comme une science autonome, née de considérations d'espace. Elle se sert de notions fondamentales (point, ligne droite, etc) et s'appuie sur une série de propositions ou **postulats** tirés de notre perception mais soumis ensuite à une abstraction qui a aussi pour effet de leur donner une forme plus précise. Partant de là, on arrive par déduction à des résultats abstraits, applicables au monde physique …"*

alors que la géométrie analytique est définie comme une reformulation de notions numériques permettant d'établir *"une théorie de l'espace analytique qui s'identifie avec la géométrie, sans que l'on soit obligé de faire appel à l'examen des figures ou à des notions et opérations géométriques"*[113]. Et il ajoute :

"On remplace les figures géométriques par des éléments analytiques (leurs "coordonnées", leurs "équations") auxquelles les méthodes de calcul sont applicables."

Ainsi géométrie synthétique et géométrie analytique apparaissent comme deux façons d'exposer la géométrie se situant à la fois dans des problématiques distinctes et s'exprimant dans des langages différents, ces deux façons étant reliées par un dictionnaire convenable. On est bien loin de la problématique cartésienne qui renvoyait la résolution des problèmes de la géométrie à la détermination de certaines longueurs. On a ainsi oublié la signification originelle du terme "analytique" et le terme "synthétique" n'apparaît plus que comme une simple opposition au terme "analytique".

Cette ambiguïté n'a pas que des désavantages, elle a permis de donner une assise plus rigoureuse à la géométrie, laquelle a perdu au XIXème siècle le rôle qu'elle tenait depuis les Grecs comme le modèle de la rigueur. La géométrie analytique apparaît ainsi non plus comme une représentation numérique de la géométrie, mais comme la forme première de la géométrie.

Cette numérisation de la géométrie s'inscrit dans une numérisation générale du monde, rappelant que celle-ci est antérieure à l'informatique. Mais si cette numérisation issue de la géométrie analytique, et plus généralement de la mathématisation de la physique, mathématisation que l'on réduit trop souvent à son seul aspect quantitatif, laissait leur place aux aspects conceptuels de la science, l'efficacité des méthodes informatiques a conduit à réduire ce que l'on savait numériser à son seul aspect numérique, et par conséquent à penser le monde comme un vaste système numérique. On pourrait parler d'une nouvelle forme de pythagorisme, d'autant plus forte qu'elle s'appuie sur une technique supposée toute puissante. Si ce n'est pas ici le lieu de développer une critique de l'idéologie du "tout informatique" [114], il nous paraissait important de parler des effets nocifs de cette idéologie dans l'enseignement et en particulier dans l'enseignement des mathématiques, ce que nous avons tenté de faire dans cet article et que nous pouvons résumer ainsi.

Un ordinateur est une machine abstraite, même si cette abstraction est masquée par le "concret" que représenteraient la manipulation de la souris et la visualisation à l'écran. En cela, si un ordinateur peut être utilisé pour une activité expérimentale, cette activité s'appuie sur des abstractions complexes et elle est moins confrontation au phénomène que l'on se propose d'étudier que confrontation à une simulation de ce phénomène *via* une numérisation elle-même issue d'une abstraction ; c'est cela que nous avons appelé une expérimentation décalée. S'il ne s'agit pas de refuser l'usage des machines merveilleuses de la modernité technique, il s'agit d'en user de façon pertinente, moins comme objets pédagogiques que comme machines à utiliser au moment où leur usage devient significatif et lorsque les élèves ont les moyens d'en appréhender la richesse parce qu'ils savent ce qu'ils font avec ces machines.

Appendice : La place des laboratoires de mathématiques dans l'enseignement

La question des laboratoires de mathématiques ne saurait s'inscrire dans un vague "enseigner autrement" ni dans un ajout à l'enseignement qui rendrait celui-ci plus concret et par cela même plus intéressant [115], un espace de liberté comme cela a été souvent dit, lequel laisse entendre que la classe traditionnelle est une prison.

La pédagogie d'une discipline s'appuie essentiellement sur cette discipline. Si le choix d'enseigner une discipline dans un cursus donné relève d'une politique d'enseignement, une fois un tel choix fait, l'enseignement relève essentiellement de considérations internes à la discipline que l'on veut enseigner, autant dans le choix des contenus à enseigner que dans la construction des progressions d'enseignement. Si des considérations externes peuvent intervenir, ces considérations ne peuvent que se plier aux nécessités internes de la discipline sous peine de dénaturer les contenus enseignés en les coupant de leur signification propre.

C'est donc pour des raisons qui relèvent essentiellement des mathématiques que nous reprenons l'idée de Borel de laboratoires de mathématiques dans l'enseignement d'icelles. Un tel laboratoire doit donc s'inscrire dans l'enseignement des mathématiques ce qui pose la question de définir sa place dans le cursus mathématique scolaire.

Si nous avons insisté, dans ce texte, sur les aspects expérimentaux des mathématiques, c'est justement parce que ce sont ces aspects qui doivent guider la mise en place de laboratoires de mathématiques, que ces aspects expérimentaux relèvent des mathématiques ou des relations entre les mathématiques et d'autres disciplines. Encore qu'il soit nécessaire de préciser, lorsque l'on parle des relations des mathématiques avec d'autres disciplines, les lieux où elles interviennent de l'intérieur même de la discipline, comme c'est le cas, depuis la révolution scientifique du XVIIème siècle, de la physique [116], et les lieux où les mathématiques permettent de construire des modèles des situations que l'on étudie, ce que l'on appelle aujourd'hui la modélisation, terme quelque peu ambigu dans la mesure où il occulte la nature du lien entre les mathématiques et les domaines que l'on étudie. Un modèle apparaît trop souvent comme le placage d'une situation mathématique sur la situation "concrète" que l'on étudie avec l'espoir que le "traitement" de la situation mathématique permettra de résoudre les problèmes posés par la situation concrète. Mais ce n'est pas ici le lieu de développer une critique de la modélisation.

On peut alors considérer que, si l'enseignement doit faire apparaître le lien privilégié entre les mathématiques et les sciences physiques, ce lien doit apparaître explicitement dans les laboratoires de mathématiques et les laboratoires de sciences physiques ; cela implique que les mathématiques apparaissent dans l'enseignement des sciences physiques et que les sciences physiques apparaissent dans l'enseignement des mathématiques.

Notes

[2]David Hume, *Enquête sur l'entendement humain*, p. 72.

[3]Immanuel Kant, «Définition du concept de race humaine», in *Opuscules sur l'histoire*, p. 123.

[4]Emile Borel, «Les exercices pratiques de mathématiques dans l'enseignement secondaire» (1904), in *Oeuvres*, tome 4, CNRS, Paris 1972, p. 2225-2256.

[5]On pourrait rappeler les nombreux instruments inventés au cours des âges, ainsi les instruments de mesure géométriques ou les instruments de calcul depuis les abaques jusqu'aux diverses machines à calculer.

[6]H. Laurent, «Les principes fondamentaux des connaissances humaines», *L'Enseignement Mathématique*, tome 1, 1899, p. 381-419.

[7]Cela remet en place certains jugements hâtifs sur l'empirisme et montre le rôle du raisonnement dans la conception empiriste de la connaissance.

[8]Ferdinand Gonseth, *La géométrie et le problème de l'espace*, volume II, «Les trois aspects de la géométrie». Cf. Rudolf Bkouche «Quelques remarques sur la démonstration (Autour de la philosophie de Gonseth)» in *La Démonstra-*

tion mathématique dans l'Histoire, Colloque Inter-IREM Epistémologie, Besançon 1989, Editions IREM Besançon-Lyon 1990.

[9]Ferdinand Gonseth, *Les Mathématiques et la Réalité*, p. 54.

[10]Pour une analyse de la notion de synthèse dialectique de Gonseth, nous renvoyons à l'article de Houria Sinaceur, «La dialectique de l'espace selon Ferdinand Gonseth» in *La Figure et l'Espace*, Actes du 8ème Colloque Inter-IREM Epistémologie et Histoire des Mathématiques (Lyon 1991), IREM de Lyon 1993.

[11]Le symbole *vs* signifie *«versus»* qui veut dire *«contre»* en anglais et que l'on peut rattacher au latin *«adversus»*.

[12]Notons que nous restreignons ici à la part du rationnel qui relève du mathématisable.

[13]*»Si donc il n'y avait pas de corps solides dans la nature, il n'y aurait pas de géométrie»* (Henri Poincaré, *La Science et l'Hypothèse*, p. 86).

[14]Neugebauer, *The Exact Sciences in Antiquity*, p. 14.

[15]traduction française par Ferdinand Gonseth in *La Géométrie et le Problème de l'Espace*, volume VI, Le Problème de l'Espace, p. 94.

[16]On peut donner une formulation grammaticale de la distinction entre nombres concrets et nombres abstraits. Un nombre concret a un statut d'adjectif (adjectif numéral) accolé à un nom, un nombre abstrait est un nom (cardinal).

[17]Ces remarques n'ont aucune prétention historique. Par contre elles nous semblent jouer un rôle important dans l'apprentissage du comptage et des opérations de l'arithmétique. On peut aussi travailler avec des cailloux ou des bûchettes, mais la main reste un outil privilégié.

[18]C'est un défaut des théories modernes de l'apprentissage de confondre l'apprentissage comme acte de celui qui apprend et l'analyse de cet acte. C'est en ce sens que ces théories peuvent constituer des obstacles à l'enseignement, *obstacles didactiques* pourrait-on dire, obstacles qui s'ajoutent aux obstacles épistémologiques étudiés par Bachelard, lesquels marquent des difficultés réelles qui relèvent du rapport de chacun à la connaissance scientifique.

[19]http://membres.lycos.fr/mezaille/SCOL.htm, A. Cabois, «calcul mental», *Les Conférences Pédagogiques au début du XXème Siècle*,

[20]*Qu'apprend-on à l'école élémentaire ?* (2005-2006, les programmes), préface de Gilles de Robien, CNDP/XO éditions, Paris 2005.

[21]*ibid*. p. 220.

[22]Il n'est pas question ici de dire à quel moment du cursus il faut enseigner la notion de limite et en particulier la définition de Weierstrass, il est seulement question de noter les liens entre les diverses notions mathématiques

enseignées au cours du cursus, en particulier entre les apprentissages élémentaires et des notions plus sophistiquées.

[23]Dans l'enseignement élémentaire, le terme «arithmétique» s'est substitué au terme «logistique» aujourd'hui oublié, confondant ainsi les pratiques de calcul et les aspects conceptuels de la science des nombres. Mais cette confusion ne marque-t-elle pas le nécessaire entremêlement des divers aspects du numérique ?

[24]On peut formaliser ce raisonnement, mais on voit aisément que la formalisation revient à faire le même raisonnement avec des lettres. Nous laissons au lecteur le plaisir d'écrire cette démonstration formelle.

[25]La première démonstration connue est celle donnée par Euclide au livre IX des *Eléments*, volume 2, p. 444. Notons qu'Euclide ne parle pas de l'infinité des nombres premiers, mais il énonce et démontre que des nombres premiers étant donnés en nombre fini, il existe un nombre premier distinct des nombres premiers donnés.

[26]Gérald Tenenbaum et Michel Mendès-France, *Les Nombres Premiers*, troisième édition, «Que sais-je ?», PUF, Paris 1997.

[27]Emile Borel, *Les Nombres Premiers*, p. 22- 24. De nouvelles éditions de l'ouvrage ont suivi qui n'ont pas repris cet aspect statistique, ainsi la seconde édition rédigée par Jean Itard, plus algébrique, et la troisième édition de Gérald Tenenbaum et Michel Mendès-France déjà citée.

[28]Ludwig Wittgenstein, *Remarques sur les fondements des mathématiques*.

[29]*ibid*. p. 33.

[30]David Hume, *Enquête sur l'entendement humain*, p. 71-77.

[31]Ludwig Wittgenstein, *Remarques sur les fondements des mathématiques*, p. 36.

[32]Ferdinand Gonseth, *Les Mathématiques et la Réalité*, p. 155.

[33]Hermann Weyl, *Philosophy of mathematics and natural Science*, Princeton University Press, Princeton 1949, reprinted by Atheneum, New York 1963, p. 30.

[34]Nicolas Rouche, *Pourquoi ont-ils inventé les fractions ?*

[35]Henri Lebesgue, *La mesure des grandeurs*.

[36]La métrologie ici invoquée comprend, d'une part, l'étude des unités et le système métrique, d'autre part, l'étude des instruments de mesures. On peut considérer que la balance est un outil important de l'enseignement des nombres.

[37]Raoul Bricard, *Cinématiques et Mécanismes*, p. 91-132.

[38]Euclide, *Les Eléments*, volume 1, p. 200-202;

[39]Euler, «Elementa Doctrinae Solidorum», *Novi commentarii academiæ*

scientiarum Petropolitanæ, 4 (1752/1753), 1758, p. 109-140, et «Démonstration Nonnullarum Insignium Proprietatum Quibus Solida Hædris Planis Inclusa Sunt Prædita», *Novi commentarii academiæ scientiarum Petropolitanæ*, 4 (1752/1753), 1758, p. 140-160.

[40]Cauchy, «Recherche sur les Polyèdres», *Journal de l'Ecole Polytechnique*, 1811, p. 68-86.

[41]Jordan, «Recherches sur les polyèdres», *J. für die Reine und Angew. Math.*, Bd. LXVI, 1866, p. 22-91.

[42]Ferdinand Gonseth, *La Géométrie et le problème de l'espace*, volume II, Les Trois Aspects de la Géométrie, p. 126-131.

[43]*ibid*. p. 130.

[44]Ferdinand Gonseth, *La géométrie et le problème de l'espace*, volume I : «La doctrine préalable».

[45]Rappelons que les sciences déductives ne se réduisent pas aux seules mathématiques et qu'elles incluent les sciences physiques.

[46]La formalisation de la topologie algébrique est liée à la difficulté de définition des objets qu'elle étudie, comme le montre par exemple la recherche d'une définition rigoureuse d'un polyèdre, rigoureuse au sens que les démonstrations doivent s'appuyer sur la seule définition langagière en évitant tout recours à l'intuition. L'abstraction apparaît ainsi comme une réduction méthodologique au langage permettant de mieux contrôler le discours démonstratif. Mais ce n'est pas ici le lieu de développer ce point de vue.

[47]Rappelons que pour Euclide une droite est ce que nous appelons aujourd'hui un segment de droite. La notion de droite infinie est tardive, on le trouve dans Brouillon Projet de Desargues (René Taton, *L'Œuvre Mathématique de Desargues*, p. 99).

[48]Euclide, *Les Eléments*, volume 1, p. 167;

[49]*ibid*. p. 168.

[50]*ibid*. p. 169.

[51]David Hilbert, *Les Fondements de la Géométrie* (1899), édition critique préparée par Paul Rossier, Dunod, Paris 1971.

[52]Pour la distinction entre l'exposé euclidien et l'exposé hilbertien nous renvoyons à notre article, «La démonstration : du réalisme au formalisme», in *La Démonstration, Mathématiques et Philosophie*, coordonnée par Michèle Villetard-Tainmont, IREM de Lille, avril 2003;

[53]Euclide, o.c. p. 197-199.

[54]L'existence de ces demi-droites est assurée par le second postulat qui assure que l'on peut prolonger une droite (un segment en langage d'aujourd'hui). Notons que, de la même façon qu'Euclide admet implicitement, dans la

construction du triangle équilatéral, que les deux cercles se coupent, il admet la propriété suivante qui s'énonce en langage moderne : *toute demi-droite d'origine le centre d'un cercle rencontre ce cercle*.

[55]Sur les grands problèmes de la géométrie grecque, nous renvoyons au Livre III de la *Collection Mathématique* de Pappus et au *Commentaire* d'Eutocius publié dans le quatrième tome des *Œuvres* d'Archimède. On peut lire aussi l'article de Joëlle Delattre et Rudolf Bkouche, «Pourquoi la règle et le compas» *in* Commission Inter-IREM Epistémologie, *Histoires de problèmes, Histoire des mathématiques*, Ellipses, Paris 1993.

[56]Pappus d'Alexandrie, *La Collection Mathématique*, tome premier, p. 38-39.

[57]Nicomède est un mathématicien grec du IIème siècle avant J.C. dont on sait peu de choses, si ce n'est qu'il inventa la courbe qui porte son nom.

[58]René Descartes, «La Géométrie», in *Œuvres complètes*, tome VI, p. 389-390

[59]L. Wantzel, «Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas», *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, tome 2, 1837, p. 366-372 ; Henri Lebesgue, *Leçons sur les constructions géométriques*, p. 154-172.

[60]Gabriel Kœnigs, *Leçons de Cinématique*, p. 243-307.

[61]Henri Lebesgue, *Leçons sur les constructions géométriques*, p. 64-88.

[62]Raoul Bricard, *Cinématiques et mécanismes*, p. 142-168.

[63]Pour le théorème de Kempe, nous renvoyons aux ouvrages cités ci-dessus, celui de Kœnigs, p. 271-273, celui de Lebesgue, p. 84-85. Kœnigs a démontré un théorème analogue pour les surfaces algébriques et les courbes gauches algébriques (cf. Kœnigs, p. 298-307, Lebesgue, p. 86-88).

[64]Henri Lebesgue, *Leçons sur les constructions géométriques*, p. 13.

[65]Nous parlons de géométrie dans l'espace et non de géométrie de l'espace, car il s'agit d'étudier les objets de l'espace que sont les corps solides. La géométrie dans l'espace est développée dans les trois derniers livres (XI, XII, XIII) des *Eléments* d'Euclide, mais les travaux des perspectivistes ont permis de mettre en avant les relations d'incidence et de donner de nouveaux développements de la géométrie dans l'espace.

[66]Rappelons que la méthode de la double projection orthogonale est ancienne. On la trouve chez Vitruve qui définit l'ichnographie (projection sur un plan horizontal) et l'orthographie (projection sur un plan vertical) (cf. *Les Dix Livres d'Architecture*, p. 10) et elle était utilisée par les tailleurs de pierres. Elle a été constituée en science rationnelle par Monge avec la géométrie descriptive. Pour une histoire de la géométrie descriptive, nous renvoyons à l'ouvrage de Joël Sakarovitch, *Epures d'architecture* (de la coupe des pierres à la géométrie descriptive, XVIe-XIXe siècles), «Historical Sciences/Science Network», Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin 1998.

[67]Emile Borel, «Les exercices pratiques de mathématiques dans l'enseignement secondaire» in *Oeuvres*, tome 4, p. 2245.

[68]Sur le filicoupeur, nous renvoyons au *Bulletin Inter-IREM* n°23 publié par la Commission Inter-IREM Géométrie.

[69]Federigo Enriques, *Les Concepts Fondamentaux de la Science*, traduit par Louis Rougier, «Bibliothèque de Philosophie scientifique», Flammarion, Paris 1913, p. 14.

[70]E.P. Wigner, «The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences», *Comm. Pure and Applied Math.* 13, 1960, p. 1-14.

[71]Platon, *Parménide*, p. 227.

[72]Euclide, *Les Eléments*, volume 1, p. 154.

[73]Jules Hoüel, *Essai Critique sur les Prinicpes Fondamentaux de la Géométrie*, p. 63.

[74]Sur la distinction entre les termes frontière (oros) et limite (peras) nous renvoyons au commentaire de Bernard Vitrac in Euclide, *Les Eléments*, volume 1, p. 161.

[75]*ibid*. p. 161-164.

[76]Eugène Rouché et Charles de Comberousse, *Traité de Géométrie*, première partie : Géométrie Plane, p. 1.

[77]Charles Méray, *Nouveaux Eléments de Géométrie* (1903), p. vii.

[78]Charles Méray, *Nouveaux Eléments de Géométrie* (1874), p. 2.

[79]Jacques Hadamard, *Leçons de Géométrie élémentaire* (géométrie plane), p. 1.

[80]*ibid*. p. 3.

[81]René Descartes, «Principes de la Philosophie» in *Œuvres complètes*, tome IX, p. 85.

[82]Isaac Newton, *Principia*, vol I, p. 13. Nous proposons la traduction suivante : *«Tout corps conserve son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme sauf si des forces agissant sur lui le contraignent à changer cet état»*.

[83]Rudolf Bkouche, «Epistémologie, histoire et enseignement des mathématiques», *for the learning of mathematics*, vol. 17, n°1, february 1997.

[84]Abel Rey, *La Science dans l'Antiquité*, volume 5, «L'Apogée de la Science Technique Grecque : L'Essor de la Mathématique», p.124.

[85]Notons que cette mise en relation montre que l'on a quitté le domaine purement empirique ; si la connaissance empirique apparaît ici comme un point de départ, c'est parce qu'on la dépasse que l'on crée une nouvelle forme de connaissance que l'on peut appeler connaissance abstraite ou connaissance théorique.

[86]Arnaud et Nicole, *La Logique de Port-Royal*, p. 120-124.

[87]Euclide, *Les Eléments*, volume 1, p. 154.

[88]Dans l'espace il existe une autre courbe possédant la propriété de glisser sur elle-même, l'hélice, ce qui montre la complexité de la définition euclidienne. Nous renvoyons au commentaire de Bernard Vitrac in Euclide, *Les Eléments*, volume I, p. 154-156.

[89]Antoine Arnauld, *Nouveaux Eléments de Géométrie*, Paris 1667, p. 82.

[90]G. W. Leibniz, *la caractéristique géométrique*, p. 255.

[91]*ibid*. p. 279.

[92]Jean Le Rond D'Alembert, *Essai sur les Eléments de Philosophie*, p. 317.

[93]Euclide, *Eléments*, volume 1, p. 162.

[94]A.M. Legendre, *Eléments de Géométrie*, p. 4.

[95]David Hilbert, S. Cohn-Vossen, *Geometry and Imagination*, p. iii. Nous proposons la traduction suivante : *«En mathématiques, comme dans tout domaine de la science, on rencontre deux tendances. D'une part, la tendance vers l'abstraction cherche à cristalliser les relations logiques qui sous-tendent le labyrinthe du matériau étudié et à présenter ce matériau de façon systématique et ordonnée. D'autre part, la tendance vers la compréhension intuitive permet une appréhension immédiate des objets étudiés, un rapport vivant avec eux, pourrait-on dire, qui montre la signification concrète de leurs relations.»*

[96]C'est cette complémentarité qui explique l'abondance des figures dans les *Fondements de la Géométrie* ; les figures renvoient à la signification intuitive que la construction hilbertienne se propose de représenter tout en s'en détachant quant à la méthode.

[97]Georges Bouligand, Jacques Devisme, *Lignes de niveau, lignes intégrales. Introduction à leur étude graphique*.

[98]Michèle Artigues, Véronique Gautheron, *Systèmes différentiels. Etude graphique*.

[99]Dominique Tournès, «Pour une histoire du calcul graphique», *Revue d'histoire des mathématiques*, vol. 6, 2000, p. 127-161.

[100]Emile Fourrey, *Curiosités géométriques* (1907), deuxième partie, chapitre premier.

[101]Ceci est aussi vrai pour la physique. Un montage électrique ne se réduit pas à un ensemble de fils reliés à un générateur et accompagnés de quelques appareils de mesure. Et il ne suffit pas de lire les nombres affichés par les appareils de mesure pour comprendre ce qu'ils veulent dire.

[102]Denis de Rougement, *penser avec les mains* (1935), nouvelle édition, «Idées», Gallimard, Paris 1972.

[103]N'oublions pas que le terme «mécanisation» désigne un acte. Il ne s'agit

pas de calculer mécaniquement, il s'agit d'apprendre à calculer mécaniquement, c'est-à-dire d'acquérir les réflexes qui font que l'on peut calculer sans réfléchir à chaque instant à l'opération que l'on fait. On peut comparer cette mécanisation à l'apprentissage de la lecture ; c'est parce que l'on déchiffre mécaniquement, c'est-à-dire sans réfléchir à chaque instant à l'acte de déchiffrage, que l'on peut lire couramment.

[104]Ce problème a été étudié par Lambert dans *ses Notes et additions à la perspective affranchie du plan géométral* (Laurent-Peiffer, *La place de Lambert dans l'histoire de la perspective*, p. 268). Nous renvoyons aussi à notre article : Rudolf Bkouche, «La règle, un instrument de la géométrie projective», *Bulletin de l'APMEP* n°415, avril-mai 1998.

[105]Nous rappelons que nous nous situons dans un cadre d'enseignement dont l'un des objectifs est la compréhension par les élèves de ce qu'ils font.

[106]Rappelons que l'animation consiste à déformer une figure en imposant de conserver certaines relations.

[107]Vaulézard, *La nouvelle algèbre de Monsieur Viète*.

[108]*ibid*. p. 30.

[109]Soulignons que ce calcul se présente sous une forme rhétorique plus proche du discours démonstratif des géomètres grecs que de la présentation moderne du calcul.

[110]René Descartes, «La Géométrie», in *Œuvres complètes*, tome VI, p. 367-485.

[111]Pierre de Fermat, «Introduction aux lieux plans et solides», *Œuvres de Fermat*, tome troisième, p. 85-101.

[112]G. Fano et S. Carrus, «Exposé parallèle du développement de la géométrie synthétique et de la géométrie analytique pendant le XIXème siècle» in *Encyclopédie des Sciences Mathématiques Pures et Appliquées*, tome III, premier volume, réédition Jacques Gabay, Paris 1991, exposé IIIa, p. 185.

[113]*ibid*. p. 186.

[114]Pour une critique de l'idéologie du «tout informatique», nous renvoyons aux ouvrages de Philippe Breton, Cécile Lafontaine et Dominique Wolton cités dans la bibliographie.

[115]Rappelons que la science repose sur l'abstraction et qu'un laboratoire est un lieu hautement abstrait, le concret des objets et des appareils, si concret il y a, ne prenant sens que par les abstractions qui l'accompagnent, que celles-ci se situent en amont ou en aval.

[116]On sait que l'on peut considérer que, avec la mathématisation du temps, la mécanique, et par suite la physique, se sont constituées comme un chapitre des mathématiques, ou, dans un point de vue proche des considérations que nous avons développées ici, que les mathématiques ne sont qu'un déve-

loppement de la physique comme l'explique Arnold dans l'article suivant : «Sur l'éducation mathématique» (1998). Nous renvoyons à notre article «La géométrie élémentaire, une science physique ?» (2004).

Bibliographie

Archimède, *Commentaires d'Eutocius*, texte établi et traduit pas Charles Mugler, Les Belles Lettres, Paris 1972.

Antoine Arnauld, *Nouveaux Eléments de Géométrie*, deux volumes, Paris 1667.

Antoine Arnauld et Pierre Nicole, *La Logique ou l'Art de Penser* (1662, cinquième édition 1683), Introduction de Louis Marin, "Champs", Flammarion, Paris 1987.

Vladimir Arnold, "Sur l'éducation mathématique" in *Gazette des Mathématiciens*, n°78, octobre 1998, p. 19-29.

Michèle Artigues, Véronique Gautheron, *Systèmes différentiels. Etude graphique*, Cedic/Nathan, Paris 1983.

Rudolf Bkouche, "La géométrie élémentaire, une science physique ?" in *Enseigner la Géométrie dans le Secondaire*, Commission Inter-IREM Géométrie (Liège 2003), IREM de Reims 2004.

Emile Borel, *Œuvres*, 4 volumes, Editions du CNRS, Paris 1972.

Emile Borel, *Les Nombres premiers* (1953), deuxième édition, Collection "Que sais-je?", PUF, Paris 1958.

Georges Bouligand, Jacques Devisme, *Lignes de niveau, lignes intégrales. Introduction à leur étude graphique*, Vuibert, Paris 1937.

Philippe Breton, *Le culte de l'Internet* (une menace pour le lien social ?), "sur le vif", La Découverte, Paris 2000.

Raoul Bricard, *Cinématique et Mécanismes*, cinquième édition, Collection Armand Colin, Armand Colin, Paris 1947.

Bertrand Russell, Dover Publication, New York 1955.

Jean Le Rond D'Alembert, *Essai sur les Eléments de Philosophie* (1759), "Corpus des Œuvres de Philosophie en Langue Française", Fayard, Paris 1986.

René Descartes, *Œuvres complètes*, édités par Charles Adam et Paul Tannery, 11 volumes, réédition Vrin, Paris 1996.

Euclide, *Les Eléments, volume 1, Livres I à IV*, introduction générale par Maurice Caveing, traduction et commentaires par Bernard Vitrac, "Bibliothèque d'Histoire des Sciences", PUF, Paris 1990.

Euclide, *Les Eléments, volume 2, Livres V à IX*, traduction et commentaires par Bernard Vitrac, "Bibliothèque d'Histoire des Sciences", PUF, Paris 1994.

Pierre de Fermat, *Œuvres de Fermat*, publiée sous la direction de Paul Tannery et Charles Henry, traduction de Paul Tannery, Gauthier-Villars, Paris 1896.

Emile Fourrey, *Curiosités géométriques* (1907), édition augmentée d'une

étude d'Evelyne Barbin, Vuibert, Paris 1994.
Ferdinand Gonseth, *Les Mathématiques et la Réalité* (Essai sur la méthode axiomatique) (1936), Blanchard, Paris 1974.
Ferdinand Gonseth, *La Géométrie et le Problème de l'Espace* (6 volumes), Editions du Griffon, Neuchâtel 1945-1955.
Jacques Hadamard, *Leçons de Géométrie élémentaire I: Géométrie plane*, Armand Colin, Paris 1947.
David Hilbert, *Les fondements de la géométrie* (1899), édition critique avec introduction et compléments préparée par Paul Rossier, Dunod, Paris 1971.
David Hilbert, S. Cohn-Vossen, *Geometry and Imagination*, translation by Nemenyi, Chelsea, New York 1952.
Jules Hoüel, *Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire*, Gauthier-Villars, Paris 1867.
David Hume, *Enquête sur l'Entendement Humain* (1748), Traduction, Préface et Notes de André Leroy (1947), Collection "La Philosophie en Poche", Aubier-Montaigne, Paris 1977.
Jean Itard, *Les Nombres Premiers* (1969), deuxième édition mise à jour, Collection "Que sais-je?", PUF, Paris 1976.
Immanuel Kant, *Opuscules sur l'histoire*, traduction et notes de Stéphane Piobetta, introduction, notes, bibliographie et chronologie par Philippe Raynaud, GF-Flammarion, Paris 1990.
Gabriel Kœnigs, *Leçons de Cinématique* professées à la Sorbonne, avec des notes par G. Darboux, E. Cosserat et F. Cosserat, Hermann, Paris 1897.
Céline Lafontaine, *L'empire cybernétique* (des machines à penser à la pensée machine), Editions du Seuil, Paris 2004.
Roger Laurent, Jeanne Peiffer, *La place de J.H. Lambert dans l'histoire de la perspective*, Cedic/Nathan, Paris, 1987.
Henri Lebesgue, *Leçons sur les constructions géométriques*, (professées au Collège de France en 1940-41) préface de Paul Montel (1950), Editions Jacques Gabay, Paris 1987.
Henri Lebesgue, *La mesure des grandeurs*, nouveau tirage, Blanchard, Paris 1975.
Adrien-Marie Legendre, *Eléments de Géométrie*, douzième édition, Firmin Didot, Paris 1823.
G.W. Leibniz, *La caractéristique géométrique* (1677-1685), Texte établi, introduit et annoté par Javier Echeverria, traduit annoté et post-facé par Marc Parmentier, Collection "Mathesis", Vrin Paris 1995.
Charles Méray, *Nouveaux Eléments de Géométrie*, Savy, Paris 1874.
Charles Méray, *Nouveaux Eléments de Géométrie*, Jobard, Dijon, 1903.
Gaspard Monge, *Géométrie descriptive*, augmentée d'une théorie des ombres et de la perspective, extraite des papiers de l'auteur par Barnabé Brisson,

(quatrième édition 1820) (2 tomes), “Les Maîtres de la Pensée Scientifique”, Gauthier-Villars, Paris 1922.

Neugebauer, *The Exact Sciences in Antiquity* (1957), second edition, Dover Publications, New York 1969.

Pappus d’Alexandrie, *La Collection Mathématique*, œuvres traduites pour la première fois en français avec une introduction et des notes par Paul Ver Eecke (1932), nouveau tirage, Blanchard, Paris 1982.

Platon, *Théétète, Parménide*, traductions et notes par Emile Chambry, Garnier-Flammarion, Paris 1967.

Henri Poincaré, *La Science et l’Hypothèse* (1902), Flammarion, Paris 1968.

Abel Rey, *La Science dans l’Antiquité, volume 5 : L’Apogée de la Science Technique Grecque* (L’Essor de la Mathématique Grecque), Collection “L’Evolution de l’Humanité”, Albin Michel, Paris 1948.

Nicolas Rouche, *Pourquoi ont-ils inventé les fractions ?* “L’Esprit des Sciences”, Ellipses, Paris 1998.

Eugène Rouché et Charles de Comberousse, *Traité de géométrie*, première partie, Géométrie Plane, nouvelle édition, Gauthier-Villars, Paris 1929.

Denis de Rougement, *penser avec les mains* (1935), nouvelle édition, “Idées”, Gallimard, Paris 1972.

Joël Sakarovitch, *Epures d’architecture* (de la coupe des pierres à la géométrie descriptive, XVIe-XIXe siècles), “Historical Sciences/Science Network”, Birkhäuses, Basel-Boston-Berlin 1998.

René Taton, *L’Œuvre Mathématique de Desargues*, Vrin, Paris 1981.

Gérald Tenenbaum et Michel Mendes-France, *Les Nombres Premiers*, troisième édition, “Que sais-je ?”, PUF, Paris 1997.

Vaulézard, *La nouvelle algèbre de Monsieur Viète* (1630), “Corpus des Œuvres de Philosophie en Langue Française”, Fayard, Paris 1986.

Vitruve, *Les Dix Livres d’Architecture*, corrigés et traduits en 1684 par Claude Perrault, Pierre Madraga Editeur, Bruxelles-Liège 1979.

Hermann Weyl, *Space, Time, Matter* (1918), translated from the German by Henry L. Brose, Dover Publications, Inc., New York 1952.

Hermann Weyl, *Philosophy of mathematics and natural Science* (1927), revised and augmented English edition based on a translation by Olaf Helmer, Princeton University Press, Princeton 1949, reprinted by Atheneum, New York 1963.

Ludwig Wittgenstein, *Remarques sur les fondements des mathématiques* (1937-1944), éditées par G.E.M. Anscombe, Rush Rhees et G.H. von Wright, édition revue et augmentée, traduit de l’allemand par Marie-Anne Lescourret, “Bibiothèque de philosophie”, NRF/Gallimard, Paris 1983.

Dominique Wolton, *Internet, et après ?* (une théorie critique des nouveaux médias), “Champs”, Flammarion, Paris 2000.