ENSEIGNER LES NOMBRES RELATIFS AU COLLEGE

Groupe Didactique
des Mathématiques,
Irem d'Aquitaine,
AMPERES - INRP(*)

Introduction

L'enseignement des nombres relatifs au collège est loin d'être simple et de nombreuses difficultés surgissent lors de leur apprentissage dans les classes de 5ème et 4ème.

Pourtant, la notion de nombre négatif semble familière car nos élèves rencontrent ces nombres dans leur environnement proche et dans la vie courante (températures, chronologie en histoire, ascenseurs, etc.). Dans quelle mesure le professeur peut-il s'appuyer sur ces connaissances culturelles pour fonder son enseignement ?

1. Des obstacles épistémologiques et des choix didactiques difficiles.

Examiner l'histoire de la pensée est utile avant d'enseigner les relatifs à double titre :

— pour préciser les obstacles dans la construction du concept de nombre relatif : les difficultés ont été nombreuses et l'émergence des nombres négatifs en tant que nombres à part entière a été longue et difficile. La référence à un modèle concret s'est révélée être un obstacle à la compréhension de ce qu'est un nombre négatif.

— pour chercher comment introduire les relatifs en 5ème par une tâche mathématiquement significative donnée aux élèves.

1.1. *Les obstacles épistémologiques* [1] :

— *Premier obstacle :* donner du sens à des quantités négatives isolées et les manipuler

Les nombres négatifs sont apparus dès le premier siècle en Chine (époque des Han)

(*) A. Berté - C.Desnavres - J.Chagneau - J.Lafourcade - L.Conquer - M.C.Mauratille- C.Sageaux - D.Roumilhac

1 Sources : - *Quelques éléments d'histoire des nombres négatifs* Anne Boyé « Irem de Nantes. »
- *Recherches en Didactique des mathématiques*- Epistémologie de nombres relatifs- Georges Glaeser- Vol 2-N° 3-1981

pour les besoins de la comptabilité avec la manipulations de jonchets, en couleur pour les nombres positifs, et remplacés par des jonchets noirs dès que les négatifs apparaissent. Jusqu'au XVIIIe siècle en Europe, on ne parle pas de « nombres négatifs » mais de « quantités négatives ».

Les nombres ne peuvent être que positifs, et les quantités négatives sont définies par opposition aux quantités positives.

Carnot (1753-1823) dit : « *Pour obtenir une quantité négative isolée, il faudrait retirer une quantité effective de zéro, quelque chose de rien : opération impossible. Comment donc concevoir une quantité négative isolée ?* » et il conclut : « *L'usage des nombres négatifs conduit à des conclusions erronées.*»

— *Deuxième obstacle :* renoncer au zéro absolu et unifier la droite numérique en y plaçant un zéro commun aux positifs et aux négatifs.

Comme on l'entend dans la phrase de Carnot, un deuxième obstacle vient interférer avec le premier : l'obstacle du zéro absolu en dessous duquel il n'y a rien. On décrit la droite comme la juxtaposition de deux demi- droites opposées portant des symboles hétérogènes.

En géométrie analytique Descartes s'arrange pour choisir les axes de façon à n'avoir que des points dont les coordonnées sont positives. Il faudra attendre le XVIIIème siècle pour que Maclaurin, et surtout Euler, expliquent comment l'on peut prendre des coordonnées négatives.

On manipule peu de quantités négatives pour les sciences. En 1715, Fahrenheit conçoit un thermomètre qui évite les températures négatives. En 1741 Celsius (1701-1744) fait construire son thermomètre à mercure avec 0° pour la température de solidification et 100° pour la température d'ébullition de l'eau, mais il faudra attendre le début du XIXème siècle pour qu'il entre dans les mœurs.

— *Troisième obstacle :* vouloir donner un sens concret aux êtres numériques.

Pendant des siècles, les nombres négatifs apparaissent comme auxiliaires de calcul. De ce fait les mathématiciens reconnaissent bien les négatifs comme des nombres mais ils en ont une pratique « clandestine » qui précède de loin leur compréhension. Ainsi les énoncés et les solutions des problèmes ne comportent que des nombres positifs.

Le perse Al Khwarizmi (780-850) accepte les termes négatifs dans les équations mais il s 'en débarrasse au plus vite.

Les nombres négatifs apparaissent en Occident par la résolution d'équations. Chuquet (1445-1500) est le premier à isoler une quantité négative dans l'un des membres d'une équation. Cardan (1501-1576) est un des premiers à admettre l'existence de solutions négatives.

En 1591, Viète (1540-1630) pose les bases du calcul littéral, mais les lettres ne représentent que des quantités positives et les solutions négatives des équations ne sont pas admises.

Presque jusqu'au XXème siècle, lorsqu'on aboutit à une solution négative, on conseille de réécrire le problème de manière à l'éviter.

— *Quatrième obstacle :* impossibilité de trouver un modèle concret unifiant permettant d'illustrer à la fois les deux opérations, addition et multiplication.

Clairaut (1713-1765) exprime dans *« Eléments d'algèbre »* la nuance entre le signe d'un nombre et celui de l'opération addition ou soustraction.

Ainsi progressivement les règles de calcul sur les nombres négatifs vont se mettre en place mais la règle de multiplication de deux nombres négatifs pose de nombreuses difficultés. En effet pour la cohérence des calculs il y a nécessité d'admettre que le produit de deux négatifs est positif, mais cette règle heurte le bon sens.

Stendhal dans son autobiographie[2] (1835) écrit :

> [….] *« supposons que les quantités négatives sont les dettes d'un homme, comment en multipliant 10 000 francs de dette par 500 francs de dette cet homme aura-t-il ou parviendra-t-il à avoir une fortune de 5 000 000, cinq millions de francs ? »*

Carnot, exprime son incompréhension en disant qu'il n'est pas possible que : $\frac{-1}{1} = \frac{1}{-1}$ ou que $(-3)^2 > 2^2$, car il veut conserver quelques idées reçues, à savoir :

— qu'un nombre (–1) divisé par un plus grand que lui (1) ne peut donner le même quotient que le grand (1) divisé par le petit (–1).

— que le carré d'un nombre (–3) ne peut être supérieur au carré d'un nombre plus grand (2).

Ce rapide examen de l'histoire de la pensée mathématique montre entre autres faits que le modèle concret, sous la forme « gain/ dette » par exemple pourra constituer une aide pédagogique pour l'addition mais il peut devenir un obstacle pour enseigner la multiplication.

Les nombres négatifs doivent acquérir pour nos élèves le statut de nombres, et nous ne pouvons pas leur laisser parcourir le long chemin historique pour arriver à cela. Une transposition didactique est nécessaire. Pour nos élèves un nombre c'est tour à tour :

— ce qui sert à compter des objets (il s'agit des entiers positifs, conception en principe dépassée avec l'apprentissage réussi des décimaux positifs).

— ce qui sert à mesurer des longueurs, conception valable pour les décimaux positifs mais à dépasser puisque dire « une mesure –1 est plus petite qu'une mesure +1 » n'a pas de sens.

— ce qui sert à se repérer sur une droite.

— ce qui sert à calculer.

Pouvons-nous mettre en scène les deux derniers points à travers une tâche significative pour les élèves ? Dans l'histoire, la question fondamentale qui a généré les nouveaux nombres est celle des équations, qu'il s'agisse des relatifs ou des complexes. Mais les calculs pour résoudre des problèmes concrets faisant intervenir « gains et pertes » ont aussi joué leur rôle pour concevoir l'addition des relatifs.

Nous allons donc, dans un deuxième temps, examiner de façon plus approfondie les différents contextes possibles pour introduire et faire fonctionner des relatifs.

1.2. *Différents contextes possibles*[3]

Pour l'introduction, différents contextes

2 Vie d'Henry Brulard – Stendhal- Edition Gallimard -1973

3 Nous avons trouvé un bon appui avec le travail de l'Irem de Poitiers dans Suivi scientifique Cycle central- Tome 1

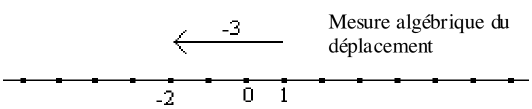
sont envisageables et ils génèrent chacun des obstacles différents.

1.2.1. *les contextes concrets* sont nombreux : Recettes et dépenses, gains et pertes, températures, altitudes, chronologie, ascenseurs, avancer et reculer, …
Dans ce genre de situations, le nombre relatif peut avoir deux significations différentes :

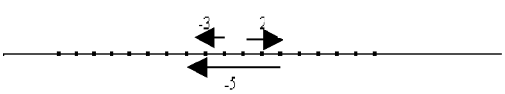
1. *un état :* il fait – 3°C ou l'année de naissance d'un personnage est – 50 av JC.

2. *une variation :* la température a baissé de 3°C ou l'ascenseur est descendu de 3 étages.

1.2.2. *les contextes de repérage sur une droite*, où un même nombre relatif peut traduire des situations différentes.



Dans le premier calcul : 1 + (–3) = – 2 ; les nombres ont des significations différentes 1 et (–2) sont des repères, (–3) est la mesure algébrique d'un déplacement orienté.

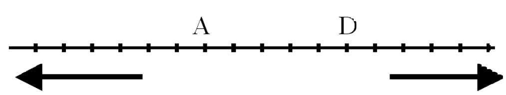


Dans le deuxième calcul : 2 + (–5) = – 3 ; les nombres relatifs ont la même signification. Ce sont des mesures algébriques de déplacements.

Avec deux nombres « repères » comme les températures aucune opération n'est possible. Nous avons observé un élève incapable de faire une addition car il avait pour seule image mentale des relatifs un repère sur une graduation. Il allait chercher mentalement tour à tour le premier terme puis le deuxième terme de la somme sans pouvoir faire aucune opération avec ces repères inertes.

Pour introduire l'addition, n'est-il pas préférable de travailler seulement avec des variations afin de privilégier les situations dans lesquelles les significations des deux nombres sont les mêmes ? Ainsi il n'y a pas de confusions possibles pour les élèves. Dans ses travaux Gérard Vergnaud [4] a montré à propos des problèmes additifs qu'il est difficile pour un enfant de se représenter une situation où deux transformations sont composées pour en former une troisième, et de calculer le bilan, alors que l'on ne connaît pas la valeur de l'état initial. Effectivement il semble raisonnable de ne pas placer des élèves de l'école élémentaire, devant ce genre de question, du moins dès le CE1 quand ils commencent à travailler sur de petits problèmes résolus par une addition ou une soustraction. Nos observations en début de 6ème ont confirmé que certains avaient encore quelques difficultés mais tout à fait franchissables pour eux à cette époque de leur développement, encore mieux au niveau de la 5ème où se place l'introduction des relatifs.

On peut alors représenter les variations sur une droite graduée sans marquer l'origine, seulement le départ (D) et l'arrivée (A). Mais cela constitue un usage non familier de la



4 Vergnaud G. :
- *Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques*, Grand N n°38, novembre 1986
- *Question de représentation et de formulation dans la résolution des problèmes mathématiques*, Annales de didactique et des sciences cognitives, Strasbourg, 1988

droite graduée, nécessitant, s'il est introduit, un apprentissage spécifique.

Introduire l'addition par ces contextes pose d'autres problèmes.

— Le signe + traduit une succession de déplacements ou un bilan. *Pourquoi ces situations se traduisent-elles par une addition ? Pourquoi cette opération ?*

— Pour effectuer cette addition, il faut faire parfois une addition arithmétique et parfois une soustraction arithmétique. *Pourquoi parle-t-on dans les deux cas de l'addition des nombres relatifs ?*

Enfin des contextes concrets cités plus haut font obstacle à l'introduction de la multiplication de deux négatifs comme l'a montré l'histoire de la pensée. C'est aussi vrai pour nos élèves.

Nous avons observé dans une classe lors de l'enseignement de la multiplication une élève qui refusait absolument d'admettre que $(-3)\times(-5)=(+15)$. Pour elle le résultat était (– 15) avec la justification suivante : « si je descends trois fois 5 marches, je descends 15 marches, donc je suis bien à – 15 ». Le professeur lui disait : « mais non, trois fois c'est + 3 », et elle répondait : « mais non c'est – 3 puisque c'est 3 fois en descendant ! ».

C'est ainsi qu'une image mentale forte « monter descendre » ou « avance recule » devient un énorme obstacle à la multiplication. L'image mentale sera d'autant plus forte qu'elle viendra de l'enseignant qui, dans le souci louable de bien faire comprendre l'addition, aura par exemple mis en scène un déplacement « avance / recule » avec des élèves se déplaçant sur une ligne tracée dans la classe, ou un pion se déplaçant sur une droite tracée au tableau.

1.2.3. *le contexte interne aux mathématiques,* où on résout des équations, on énonce les règles des opérations.

Dans une introduction mathématique « moderne » basée sur les structures, les nombres entiers aussi bien positifs que négatifs sont de nouveaux êtres notés par exemple (+3) ou (–2).

Dans l'écriture (+3) + (–2), les deux signes " + " n'ont pas le même statut, le premier est le signe du nombre positif 3 et le deuxième est un signe d'addition, et de même pour le signe " – " dans (+3) – (–2) .

Le plongement des entiers naturels dans les entiers relatifs , avec $\mathbf{N}=\mathbf{Z}^+$ vient ensuite. Dans une introduction plus conforme au cheminement historique, donc axée sur des problèmes de résolution d'équations, les négatifs vont apparaître seuls comme nouveaux nombres, au détriment d'une cohérence de notation dans l'ensemble des nombres.

Dans tous les cas, il y aura des difficultés incontournables de notation et d'écriture, notamment signe opératoire et signe prédicatoire notés de la même façon avec passage de l'un à l'autre.

Conclusion :

Aucun mode d'introduction ne peut à lui seul, permettre d'atteindre tous les buts recherchés et il y aura nécessairement des obstacles à franchir et des difficultés. Néanmoins il semble raisonnable :

— de prendre de la distance par rapport

aux contextes concrets de façon à donner un statut de nombres aux négatifs.

— de veiller lors de l'introduction des négatifs à ne pas créer inutilement des obstacles didactiques qui se révèleraient lors de la mise en place des règles de l'addition et surtout de la multiplication.

1.3. *Nos choix didactiques :*

En accord avec l'orientation générale ci-dessus et en examinant les différents contextes d'utilisation des nombres négatifs, précisons nos choix didactiques.

a) Pour donner aux négatifs un statut de nombre, nous introduisons très vite dans cet ensemble des opérations connues déjà avec les positifs. Nous donnons aux élèves les propriétés de ces opérations que l'on voudrait conserver dans un nouvel ensemble qui contiendra aussi les nombres positifs qu'ils connaissent.

b) En conséquence nous avons prévu une introduction des nombres négatifs par la résolution d'équations, de sorte que l'addition arrive en même temps, tout en restant dans un contexte interne aux mathématiques et en justifiant les résultats sur des exemples. Le lien entre des résultats que l'on aura justifiés et des situations concrètes de gain et de perte sera fait en fin de séquence.

c) Pour bien faire comprendre pourquoi on prolonge la structure de l'ensemble des nombres positifs et pour éviter une coupure entre les nombres positifs déjà connus et ces nouveaux nombres, les négatifs, le professeur n'introduit pas d'écriture du type (+3). Cette écriture est proposée par les élèves eux-mêmes pour le nombre 3 par opposition avec (–3). Les écritures (+3) et 3 sont ainsi présentées dès le départ comme deux écritures d'un même nombre.

Le signe “ + ” garde le seul statut opératoire. Cela évite des exercices de « simplification d'écriture », qui font que les élèves ne savent plus reconnaître que (+2) + (+3) ..... c'est tout simplement 2 + 3 !

Certains manuels et professeurs expliquent aux élèves qu'une écriture comme (–2) + (+4) se remplace par –2 + 4, obtenue en enlevant les parenthèses et le signe opératoire “ + ”, ce qui apporte des confusions abyssales car il n'y a plus le signe opératoire de l'addition !

Limiter la difficulté à savoir manipuler les trois statuts du signe “ – ” , nous semble raisonnable.

2. Détail de séquences en classe pour l'introduction des relatifs :

Nous avons décidé d'introduire les nombres relatifs à partir d'égalités à compléter du type 9 + … = 7.

2.1. *Introduction des nombres négatifs.*

Etape1 : Compléter les pointillés :

12 + …. = 27
38 + …. = 83
438 + … = 705
58 + … = 58
9 + … = 7

D'abord les élèves complètent en calculant mentalement, puis quand les nombres deviennent grands, ils posent la soustraction.

Pour **9 + …. = 7** : La plupart des élèves disent dans un premier temps que c'est impossible, mais parfois un ou deux proposent de remplacer les pointillés par l'objet " – 2 ", trouvé par intuition.

Le professeur relance alors le travail en exigeant que cette égalité soit complétée. Il explique que jusque là effectivement c'était impossible, mais ce jour un grand pas va être franchi.

Des élèves demandent alors s'ils peuvent compléter par autre chose qu'un nombre seul, le professeur leur répond par l'affirmative et ils proposent alors de remplacer les pointillés par 7 – 9 ou par 2 – 4, ou 0 – 2. Ce qui donne : 9 + (7 – 9) = 7 ou 9 + (2 – 4) = 7.

On a établi dans une situation précédente, à un autre moment de l'année, que (a + b) – c = a + (b – c), on en déduit donc que le calcul est possible car :

$$9 + (7 - 9) = (9 + 7) - 9 = 7$$

Lors de la mise en commun, les élèves confrontent leurs solutions, on peut en déduire que :

$$7 - 9 = 2 - 4 = 1 - 3 = \ldots.. = 0 - 2 = - 2$$

Le professeur explique alors que les écritures 7 – 9 *;* 2 – 4 *;* 0 – 2 *sont différentes écritures d'un nouveau nombre désormais noté* " – 2 ".

Noter que :

a) Nous affranchissons les élèves, dès le départ, des parenthèses autour de – 2 sauf quand il est situé après un signe d'addition.

b) Le nombre négatif est introduit comme différence de deux positifs, ce qui est cohérent avec la conception de la fraction comme nombre rationnel et quotient de deux entiers, que les élèves ont rencontré en 6ème.

Nous retrouvons de façon sous-jacente la construction des nombres relatifs comme classe d'équivalence de couples d'entiers : les couples (7,9) ; (2,4) ; (1,3) ; (0,2) sont équivalents et leur classe est notée – 2.

Nous récupérons ainsi la cohérence mathématique de la construction des nombres relatifs et rationnels comme ensemble quotient, un peu difficile à enseigner au collège comme cela fut fait dans les années 70.

Pour les fractions comme quotient de deux entiers, introduites comme solution d'équation, voir notre brochure « Entrées dans l'algèbre, 6ème et 5ème » — Irem d'Aquitaine. Notons que la situation d'introduction des fractions par l'épaisseur des feuilles de papier (travail de l'Ecole Michelet – Equipe G .Brousseau) se basait aussi sur les classes d'équivalence, en partant d'un contexte « concret ».

Exercice : Ecrire plusieurs égalités à trous ayant – 2 comme solution.

Les élèves écrivent par exemple :

3 + ... = 1	ou	1 – 3 = ...
5 + (–2) = 3	ou	3 – 5 = – 2
2 + (–2) = 0	ou	0 – 2 = – 2 .

BILAN :

On peut effectuer des soustractions pour lesquelles le premier nombre est plus petit que le deuxième, le résultat est un nombre négatif, il s'écrit avec un signe " – "

$$- 2 = 0 - 2 = 1 - 3 = 7 - 9 = \ldots.$$

On a alors 9 + (– 2) = 7 .

Etape 2 : Opposés

Le professeur propose alors en exercice une liste d'additions de deux termes où il change la place du nombre manquant, le calcul se faisant grâce à la commutativité de l'addition que l'on prolonge. En fin de liste, le professeur propose de compléter : …. + 7 = 0 où le nombre manquant est 0 – 7 = – 7 ; ce travail permet ainsi de définir *l'opposé* d'un nombre relatif.

BILAN *: Deux nombres sont opposés quand leur somme vaut zéro.*

$$7 + (-7) = 0$$

Les deux nombres (– 7) *et* 7 *sont opposés.*

Exercices :

a) Effectuer les soustractions suivantes (*certains résultats sont positifs d'autres négatifs*).

35 – 17	4,8 – 7,2
23 – 48	0,25 – 1,2
34 – 26	0,75 – 0,38
48 – 72	…

Le professeur jugera s'il peut introduire la difficulté des décimaux.

b) Effectuer les additions des nombres relatifs suivants *(les résultats des additions sont tous positifs)*

7 + (– 4)	12 + (– 5)
54 + (– 29)	– 35 + 68
– 17 + 21	

2-2 *Addition de nombres relatifs, généralisation :*

Les élèves ont déjà rencontré des opérations du type 9 + (– 2) = 7 et 7 – 9 = – 2, dans des exercices. Mais ils n'ont jamais rencontré encore d'additions dont le résultat est un nombre négatif.

2-2-1. *Le professeur leur pose donc la question suivante :*

« Pouvez vous imaginer des additions dont le résultat soit un nombre négatif [5] ? »

Les élèves proposent par exemple – 5 + 3 et donnent comme résultats possibles – 8 , – 2 ou 2 . Il faut départager les élèves de la classe qui ne sont pas d'accord sur les différents résultats.

On peut justifier le résultat – 2 en faisant intervenir la notion d'opposé :

$$\begin{aligned} -5 + 3 &= -5 + (5 - 2) = \\ &= (-5 + 5) - 2 = 0 - 2 = -2 \end{aligned}$$

On peut procéder de même avec des propositions comme :

$$(-4) + (-7) = (-4) + (4 - 11) = -11$$

BILAN : *Le professeur peut décider d'énoncer ces règles par des phrases ou donner seulement des exemples.*

2-2-2. *Une situation dans un contexte concret.*

Il s'agit de montrer comment l'addition modélise le bilan de deux variations. Les élèves doivent compléter le tableau ci-contre.

Le travail précédent permet de justifier que la succession de deux actions se traduit par une addition. En effet si la ligne 1 ne pose pas de problème, la ligne 2 se traduit natu-

5 Variante : Le professeur peut demander directement de calculer par exemple –5 + 3 et dans ce cas les réponses des élèves sont –8, ou –2 ou 2.

Bilan du matin	**Bilan de l'après-midi**	**Bilan de la journée**	**Bilan de la journée avec un nombre**	**Opération résumant la journée**
Gagné 10 billes	**Gagné 8 billes**			
Perdu 8 billes	**Gagné 12 billes**			
Perdu 6 billes	**Perdu 5 billes**			
Gagné 5 billes	**Perdu 8 billes**			
Gagné 9 billes	**Perdu 9 billes**			
Perdu 4 billes	**Gagné 0 bille**			
Gagné 0 bille	**Perdu 5 billes**			

rellement pour les élèves par l'opération 12 – 8. Ce que nous avons vu plus haut permet de comprendre que c'est aussi (– 8) + 12.

Pour la 4ème ligne (gagné 5 ; perdu 8) des élèves écrivent dans la dernière colonne : 8 – 5 au lieu de 5 – 8 , les autres élèves refusent ce calcul dont le résultat est 3 et non – 3 comme il est écrit dans la colonne bilan. Par contre, d'autres élèves proposent 5 + (– 8), on justifie le résultat de l'addition en utilisant les opposés.

Exercices : Le professeur trouvera dans les manuels tous les exercices d'application qu'il désire en liaison avec la vie courante comme :

— l'ascenseur monte de 7 étages puis descend de 3 étages, peut-il faire le même déplacement en une seule fois ? (*bilan de deux variations)*

— ce matin il fait – 3°, la température monte de 6°. Quelle est la nouvelle température ? *(état + variation = état)*

2-2-3. *Graduation, comparaison, repérage*

Etape 1 : Compter à l'envers depuis 8 en enlevant à chaque fois 3.

On pourra représenter les nombres trouvés sur un schéma.

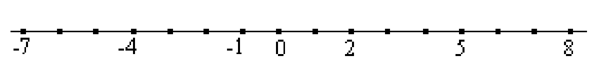
Les élèves trouvent les nombres 5 ; 2 ; – 1 ; – 4 ; – 7 ; … On pourra leur demander d'écrire les soustractions effectuées :

8 – 3 = 5   5 – 3 = 2   2 – 3 = –1

Il y a une discussion en classe à ce stade car certains élèves disent qu'on ne sait pas ce que veut dire " – 1 – 3 ". Il s'agit d'une soustraction pas encore vue. Cela permet au professeur d'annoncer la suite... Certains élèves proposent de représenter ce « recul » de trois en trois sur une graduation d'axe vertical ou horizontal. Ainsi, en reculant de trois, tous les élèves peuvent trouver que

– 1 – 3 = – 4   et que   – 4 – 3 = –7

BILAN : *On peut représenter ces nombres sur une graduation :*



Etape 2 : *Le nombre caché. Le professeur choisit un nombre négatif de grande valeur abso-*

lue, par exemple (– 396)*, il le note sur un papier caché et les élèves doivent le deviner. Chacun son tour les élèves proposent des nombres et le professeur leur indique si le nombre qu'ils proposent est inférieur ou supérieur au nombre cherché jusqu'à ce qu'un élève trouve le nombre. Celui qui ne tient pas compte des informations obtenues par les réponses aux questions de ses camarades retarde la progression de la classe et diminue sa chance de gagner.*

Le professeur peut organiser à nouveau le jeu avec – 14 583 par exemple. Il semble difficile de prendre un nombre décimal, car on cumule deux difficultés, le classement des décimaux et celui des négatifs, mais avec une bonne classe...

BILAN : *Les élèves énoncent eux-mêmes le bilan pour la comparaison de deux relatifs. Ils peuvent dire par exemple : « dans les négatifs, l'ordre est inversé »*

Cette remarque sur « l'ordre inversé » est importante car on la retrouvera à propos de la multiplication par (– 1) en 4ème lors de l'étude de la multiplication.

Puis on travaille la soustraction, les sommes algébriques, et la notation $-x$ pour désigner l'opposé de x mais nous ne pouvons pas tout développer dans le cadre d'un article.

Vous pouvez trouver ce travail dans la brochure de l'Irem d'Aquitaine intitulée « Entrées dans l'algèbre en sixième et cinquième ».

Nous avons choisi deux situations d'enseignement sur la multiplication, pour illustrer l'obstacle épistémologique décrit dans le début de ce texte.

3. Séquences en classe pour le produit de deux nombres négatifs en quatrième.

3-1. *Situation 1 :*

Le professeur commence par annoncer aux élèves que l'objectif de cette situation est la mise en place de la multiplication des négatifs.

Etape 1 : Le professeur propose aux élèves de compléter les égalités suivantes :

$$-3+(-3)+(-3)+(-3)+(-3)=$$

$$-5+(-5)+(-5)=$$

$$\underbrace{-2,3+(-2,3)+\ldots\ldots\ldots\ldots+(-2,3)+(-2,3)}_{100\ termes}=$$

$$0\times 2=$$

$$0\times(-3)=$$

Les élèves calculent d'abord en faisant l'addition, puis ils s'aperçoivent qu'il est plus rapide d'utiliser la multiplication entre positifs comme ils la connaissent, et d'écrire le signe " – " devant le résultat. Cette remarque leur permet de trouver la somme des 100 termes en calculant 2,3 × 100 = 230 sans faire effectivement l'addition et en donnant la réponse " – 230 " .

Certains élèves sont surpris de constater que la règle des signes de l'addition n'est pas valable pour la multiplication : par exemple le résultat de (– 3) × 5 est négatif bien que 5 soit plus grand que 3.

Les élèves admettent sans difficulté qu'on décide que le produit de n'importe quel nombre par 0 donne 0, comme c'est déjà le cas avec les positifs qu'ils connaissent.

Etape 2 : Puis le professeur demande de calculer :

$$(-3)\times 6 =$$
$$3\times(-6) =$$
$$(-4,2)\times 8 =$$

Les élèves peuvent prévoir le résultat car ils peuvent, comme ils viennent de le voir à l'étape précédente, remplacer par imagination chaque multiplication par une addition réitérée qu'ils savent faire :

6 fois (– 3), 3 fois (– 6), 8 fois (– 4,2).

Etape 3 : Le professeur propose une multiplication qui ne peut pas être remplacée par une addition réitérée car aucun des facteurs ne peut jouer le rôle du « nombre de fois ». Par exemple : $4,2 \times (-8)$. Les élèves conjecturent facilement le résultat. Il s'agit de prouver que c'est bien : – 33,6 .

Le professeur dit alors aux élèves que l'on veut que la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition soit étendue à l'ensemble des nombres qu'ils connaissent et que le produit par 0 donne 0 comme on l'a déjà admis. En ayant ces propriétés on peut démontrer la conjecture sur le résultat de $4,2 \times (-8)$.

La démonstration est faite au tableau en recherchant le plus possible la participation active des élèves en classe entière. Le professeur écrit ceci :

On sait que $4,2 \times 8 = 33,6$ et on conjecture que : $4,2 \times (-8) = -33,6$. La conjecture consiste donc à dire que ces deux nombres sont opposés. On le vérifie en calculant leur somme : $4,2 \times 8 + 4,2 \times (-8)$. Comme on conserve la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, on peut factoriser :

$$4,2 \times 8 + 4,2 \times (-8) = 4,2 \times [8 + (-8)] =$$
$$= 4,2 \times 0 = 0 .$$

Ces deux nombres sont bien opposés car leur somme est nulle. La conjecture est démontrée.

Le professeur peut aussi proposer une deuxième démonstration si les élèves sont familiers avec l'introduction ci-dessus exposée des nombres négatifs, c'est-à-dire s'il remplacent facilement " – 8 " par " 0 – 8 ". Cette démonstration utilise la distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction [6].

L'idée est de remplacer(– 8) avec lequel on ne sait pas calculer par le nombre positif 8 en utilisant la possibilité de remplacer (– 8) par la différence 0 – 8, ce qui fait changer la nature du signe " – " :

$$4,2 \times (-8) = 4,2 \times (0-8) =$$
$$= 4,2 \times 0 - 4,2 \times 8 =$$
$$= 0 - 33,6 = -33,6$$

Etape 4 : Donner le résultat de $(-5) \times (-3)$.

Le professeur recueille les conjectures dans la classe. Les plus fréquentes sont 15 ou – 15. Les deux résultats proposés par les élèves sont des nombres opposés. Il s'agit de trouver une preuve pour savoir lequel de ces deux résultats est le bon.

Les élèves travaillent par deux. Certains réinvestissent ce qui vient d'être fait en clas-

6 Les élèves ont vu en 5ème la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et à la soustraction dans l'ensemble des décimaux positifs. Ici il s'agit de la distributivité de la multiplication par rapport à une soustraction qui n'existait pas en 5ème mais les élèves admettent ce prolongement sans difficultés.

se en ajoutant au produit cherché un autre produit qu'ils savent calculer et de sorte qu'une mise en facteur soit possible. Ceci permet de trouver à l'aide de la distributivité que la deuxième conjecture est la bonne. Un coup de pouce est souvent nécessaire car il n'est pas facile pour les élèves de trouver le calcul à faire, même s'il a été suggéré par le travail fait en commun au tableau pour le cas précédent [7].

D'autres groupes restent bloqués dans l'idée que le produit de deux nombres négatifs ne peut être que négatif. Ils pensent qu'il est inutile de faire le moindre calcul car « c'est évident ! »

Une mise en commun en cours de recherche permet de s'accorder sur le calcul à faire en utilisant la distributivité pour factoriser la somme

$$(-5) \times (-3) + (-5) \times 3 = (-5) \times [(-3) + 3] \,,$$

ou bien

$$(-5) \times (-3) + 5 \times (-3) = [(-5) + 5] \times (-3) \,.$$

ou bien, si certains élèves ont démarré ainsi, on peut aussi calculer $[(-5) + 5] \times (-3)$; ou encore d'après l'effet de la multiplication par 0 qui a été présentée à l'étape 1, on peut écrire :

$$-5 \times (-3) = -5 \times (0 - 3) = -5 \times 0 - (-5) \times 3$$
$$= 0 - (-15) = 0 + 15 = 15 \,.$$

Dans tous les cas on trouve 15 et non " – 15 " qui était le résultat qui semblait « évident » à certains car « le produit de deux choses négatives ne peut pas donner quelque chose de positif ! ».

7 Le professeur peut aider les élèves en s'appuyant sur leurs conjectures.
* Si (-5)x(-3)= -15, il faut qu'en ajoutant ce nombre avec 15 = 5 x 3 vous puissiez trouver 0.
* Si (-5)x(-3)= 15, il faut qu'en ajoutant ce nombre avec –15 = (-5) x 3 ou 5x (-3) vous puissiez trouver 0.

BILAN : *Pour multiplier deux nombres relatifs, on multiplie les valeurs numériques et pour trouver le signe du produit on applique la règle suivante :*
— le produit de deux nombres positifs est positif,
— le produit d'un positif et d'un négatif est négatif,
— le produit de deux négatifs est positif.

Ce bilan n'est pas très facile à énoncer, car on devrait dire « valeur absolue », notion hors programme. Nous avons opté pour « valeur numérique » ou « partie numérique » qui ne nous satisfait pas. Certains emploie le mot de « distance à zéro » ce qui suppose un travail sur ce vocabulaire pas plus anodin que « valeur absolue ». On peut aussi se limiter à énoncer la règle des signes, sans expliciter le calcul de la valeur absolue du produit, qui ne pose pas de problème.

3-2. Situation 2 : Multiplication par (– 1) et nombre opposé

Etape 1 : Calculer
$(-1) \times 3$
$(-1) \times (-4)$
$(-3{,}2) \times (-1)$
$7{,}6 \times (-1)$
$(-1) \times (-1)$
$(-1) \times 0$
$(-1) \times 1$

Quelle remarque peut-on faire sur le résultat du produit d'un nombre par (– 1) ?

Les élèves calculent en appliquant la règle sur le produit de deux nombres relatifs et remarquent que le produit d'un nombre par (– 1) est l'opposé de ce nombre.

Etape 2 : *Démonstration.* Les élèves peuvent la faire eux-mêmes, avec deux méthodes, en désignant un nombre quelconque par la lettre x.

— *méthode par disjonction des cas :* d'après la règle des signes qui vient d'être démontrée pour tous les nombres,

Si x est positif son produit par (-1) est négatif donc c'est l'opposé de x ,

Si x est négatif son produit par (-1) est positif donc c'est l'opposé de x .

Dans tous les cas il s'agit de l'opposé de x .

— *méthode utilisant une démonstration semblable à celle de la situation précédente.*

On conjecture que $x \times (-1)$ est l'opposé de x. Pour en être certain on les ajoute

$$x \times (-1) + x = x \times (-1) + x \times 1 = \\ = x \times [(-1) + 1] = x \times 0 = 0$$

Donc $x \times (-1)$ est l'opposé de x.

BILAN: *Quand on multiplie un nombre par* (-1) on obtient son opposé.

$$x \times (-1) = -x \qquad (-1) \times x = -x$$

Le signe « – » a donc trois statuts :

- *le signe de la soustraction,*
- *le signe prédicatoire des nombres négatifs,*
- *le signe qui désigne l'opposé .*

Conclusion

Nous avons fait le choix d'une introduction utilisant un contexte interne aux mathématiques et cela n'a pas empêché les élèves de manifester leur motivation pour l'apprentissage des nombres négatifs.

Nous pensons que nos élèves sont capables de comprendre que des nombres sont des concepts abstraits, qu'ils ont des propriétés définies à l'intérieur des mathématiques, indépendamment de leur interprétation dans un modèle concret quelconque.

Nous n'avons pas pour autant procédé à une symétrisation des entiers naturels car nous n'avons pas construit les entiers relatifs mais étendu l'ensemble de tous les nombres positifs que les élèves connaissaient déjà.

Bibliographie :

BROUSSEAU G. (1998) *Théorie des situations didactiques,* La pensée sauvage.

VERGNAUD G. (1986) *Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques*, Grand N n°38.

VERGNAUD G. (1988) *Question de représentation et de formulation dans la résolution des problèmes mathématiques*, Annales de didactique et des sciences cognitives, Strasbourg.

Vie d'Henry Brulard – Stendhal, Edition Gallimard (1973).

BOYE Anne *Quelques éléments d'histoire des nombres négatifs,* Irem de Nantes.

GLAESER G. (1981) - *Vol Recherches en Didactique des mathématiques*, Epistémologie de nombres relatifs-vol 2-n°3.

COMMISSION INTER-IREM PREMIER CYCLE *Des mathématiques au cycle central tome 1.*

IREM D'AQUITAINE , Groupe « Didactique des mathématiques » (2007) *Entrées dans l'algèbre en sixième et cinquième.*