
LA RUBRIQUE « POINT DE VUE » :

**Un lieu de débat pour les
enseignants de Mathématiques**

Cette rubrique est ouverte à tous et destinée à recevoir des textes courts, d'environ trois pages, présentant une position argumentée et clairement assumée par l'auteur dans la perspective d'un débat.

Les lecteurs de la revue sont vivement invités à réagir et à prendre part à ce débat dans le cadre de cette rubrique.

Merci de nous envoyer vos propositions.

DIDACTIQUE DES TRANSITIONS

Jean-Pierre FERRIER
Irem de Lorraine,
mars 2008

Ce petit texte est le premier vrai “point de vue” proposé par son auteur, du moins le premier écrit dans ce sens ; il entend juste susciter des réactions. Le point de départ est la constatation de deux paradoxes concernant un sujet qui a beaucoup occupé les IREM, celui des transitions entre degrés.

1) Les problèmes rencontrés sont sensiblement de même nature pour les différents niveaux de transition.

2) C’est en conservant à chacun des trois cycles que sont l’école, le collège et le lycée sa spécificité que l’on prépare le mieux au cycle suivant.

Approfondir ces points demandera un long travail. Ici nous nous contenterons d’abord d’établir que la spécificité évoquée n’est plus du tout respectée aujourd’hui et de chercher à comprendre les raisons de cet abandon.

La perte de la spécificité.

Dans les années 70, on a voulu enseigner les mathématiques dans l’ordre logique de la maternelle à l’université, niant toute spécificité à chacun des cycles, la question des transitions perdant alors toute pertinence. D’une part — par une mauvaise lecture de Bourbaki — on a cru que les mathématiques se réduisaient à la manipulation de concepts abstraits ; d’autre part — par une interprétation erronée de Piaget — on a cru que l’élève pou-

vait y mettre immédiatement du sens. Aujourd’hui on a abandonné la seconde idée, mais conservé la première, accompagné d’une transposition didactique pour en camoufler les aspérités.

Pour s’en convaincre, regardons d’abord les écrits sur l’école élémentaire. La vision des opérations de base au travers du prisme des lois de composition reste d’actualité. On répugne à nommer ces opérations devant l’élève alors même qu’il en a saisi le sens premier : ajout, retrait, ajout répété ou partage. Car installer le sens demanderait de faire le tour de toutes les interprétations possibles de l’opération ; à défaut, sa définition serait encore bien loin. On attendra notamment d’y avoir inclus le complément pour la soustraction ou le groupement pour la division ; on tiendra en effet à assimiler ces opérations à une addition ou une multiplication à trou, ce qui nous ramène aux lois. D’ailleurs on s’attardera sur les procédures additives, la multiplication pouvant être définie abstraitement à partir de l’addition.

La répugnance à considérer les techniques opératoires, à y classer le calcul mental, à s’appuyer sur les grandeurs qu’on osera sortir de leur ghetto, pour asseoir le sens des opérations, tout cela témoigne de la survivance de la dictature de l’abstraction. Dans cette affaire, le prétendu “calcul instrumenté” est venu à point pour discréditer les tech-

niques ; on concède juste un peu de place au calcul mental, sous réserve qu'il soit maladroît, parce qu'il permettrait de contrôler les machines et en conforterait l'usage.

Regardons aussi du côté du collègue. A-t-on pu se débarrasser des transformations, dont l'introduction dans les programmes a chassé les cas d'égalité des triangles ? Pas du tout. On a renvoyé ces derniers au programme de seconde, ce qui n'a plus de sens.

Comme pour les calculatrices à l'école, les logiciels de géométrie dynamique au collège ont trouvé, avec les transformations, de quoi s'épanouir. Les petites démonstrations qui faisaient la force de la géométrie ont cédé la place aux algorithmes de construction des figures, autre occasion de manipuler un langage abstrait.

Voyons encore du côté du lycée où l'analyse a pris une place très importante. On a quitté la ligne pure et dure d'il y a quelques décennies. Mais on n'en affiche pas moins la prétention de "faire toucher du doigt la beauté des mathématiques" : introduisant la fonction exponentielle par une équation différentielle, dans un contexte interdisciplinaire, donnant la définition abstraite d'une limite à l'infini et s'y étendant sans réelle nécessité. D'ailleurs même l'université n'est pas vraiment épargnée. La façon dont on y traite, dans les manuels à la dernière mode, la géométrie des nombres complexes, avec des archaïsmes comme les "affixes" et les "images", fait penser qu'après avoir contaminé les autres degrés le supérieur s'est laissé contaminer lui-même.

Cela ne serait encore rien. Après la vague des mathématiques modernes, une nouvelle vague, post-moderne en quelque sorte, a déferlé sur les divers degrés. Avec

des conséquences plus graves, sans la cohérence qu'avaient au moins les mathématiques modernes. C'est la mode de la modélisation mise à toutes les sauces, l'introduction aussi précoce que possible du concept abstrait de fonction et de la notation fonctionnelle, la promotion des probabilités et statistiques — la fluctuation des échantillons en seconde, puis les probabilités au collège — ou encore les graphes en série ES.

Le responsable.

Le responsable de cet état de fait est l'enseignement universitaire. Puisque c'est tout simplement son modèle, peut-être mal compris, pas vraiment caricaturé mais certainement transposé, qui sert de référence à tous les degrés. Ne pas reconnaître son erreur, par clientélisme peut-être, serait de sa part monstrueux.

Essayons de cerner cette responsabilité. Elle n'est pas d'ordre didactique ; elle ne concerne en rien l'analyse des difficultés dont peuvent rencontrer les élèves. Elle est d'ordre épistémologique au plus haut niveau. La question est de décider quel est l'objet des mathématiques, quel est l'objet de leur enseignement. C'est une question difficile, à laquelle je suis bien incapable de répondre et qui se prête mal à un large débat. On peut trouver des éléments auprès des grands noms qui se sont intéressés à l'enseignement des mathématiques : Poincaré, Lebesgue, Elie Cartan, comme aujourd'hui Laurent Lafforgue. Suivre leur pensée n'est déjà pas simple.

Si l'enseignement universitaire, chargé de former les maîtres, a pêché, c'est en relayant insuffisamment la pensée des grands noms. Car leur empreinte n'est guère visible aujourd'hui. Il est, de la même façon, assez mal venu de les citer dans le

monde des IREM. Par son oubli, le monde universitaire a commis ce qu'on pourrait appeler une erreur de commande. C'est ainsi que les didacticiens, comme tous les chercheurs en éducation des IREM et IUFM, se sont imaginés sollicités pour répondre à la question posée et se sont crus compétents pour le faire, alors que leur mission était ailleurs¹. Leur bonne foi n'est pas en cause. Mais ils ne devraient pas s'autoriser à commencer une phrase par "en mathématiques" et la poursuivre en donnant le sens d'un concept².

De façon générale, les grands noms ne disent pas que les mathématiques se réduisent à la manipulation d'un langage formel, comme l'a retenu ERMEL. S'ils reconnaissent, suivant Hilbert, que les mathématiques sont motivées par la résolution de problèmes, ils feraient remarquer que les problèmes ne sont pas sortis du chapeau, encore moins inventés a posteriori. Par exemple, au fondement de la Science on trouve le vrai problème, posé par Euclide, de la superposition des triangles. Jamais, en revanche, ne se posera de problème des "figures téléphonées".

Pour prendre un exemple précis relatif à l'école, quand on sait comment Poincaré parlait des vecteurs, on peut être sûr que voir la division comme un partage assorti d'une technique opératoire, portait, à ses yeux³, plus de sens mathématique qu'y voir la résolution de $a.x = \mathbf{b}$, *a fortiori* qu'en faire toute une histoire comme Rémi Brissiaud. Quand on lit Lebesgue et sa "mesure des grandeurs", on comprend que l'égalité $2m \times 3m = 6m^2$ porte plus de sens

mathématique qu'une simple multiplication de mesures, ou que la vision "algébri-sée" que donne Yves Chevallard⁴.

Revenons à la responsabilité collective des universitaires. Il est certain que le discours mathématique s'est progressivement formalisé au cours des siècles, à la fois pour en réduire l'ambiguïté et pour en élargir la portée. L'enseignement supérieur a abusivement profité pendant des décennies de celui qui a été donné en amont pour privilégier la rigueur formelle, jusqu'à s'y enfermer. Ce faisant il a montré une image inexacte de l'*édifice* des mathématiques⁵. Et c'est plus grave encore avec les concours de recrutement des enseignants : en s'intéressant davantage à la conformité de l'expression qu'à l'enchaînement démonstratif, on y donne des mathématiques l'image d'un *tas*.

Depuis peu, pour renforcer le lobbying auprès des pouvoirs publics, on a mis en exergue les applications, les universitaires donnant encore l'exemple. Mais, cette fois-ci, en oubliant de situer l'unité réelle des mathématiques, au point que certains en déduisent que "depuis Bourbaki, les mathématiques ont changé". C'est de là que vient l'engouement inconsidéré pour la modélisation dans l'enseignement.

Résumons-nous. Les errements de l'enseignement des mathématiques ne sont pas dus à une utilisation inadéquate des instruments ou à leur piètre qualité. Ils viennent simplement de ce qu'on se trompe de cible. Ajuster le tir demandera un long travail ; les IREM en sont capables.

1 La didactique s'occupe du *comment* et non de *ce qu'il convient* d'enseigner.

2 De même ne peuvent-ils pas se prétendre historiens ou épistémologues.

3 Ainsi "dans les écoles primaires, pour définir une fraction, on découpe une pomme ou une tarte" ; même lorsqu'il justifie la définition irréprochable de la continuité

ou du cercle, aux dépens des représentations grossières, Poincaré attribue aussi de la valeur au *décintringe* y conduisant.

4 Lequel n'associe pas, dès le départ, grandeurs et sens des opérations.

5 Car "à quoi bon admirer l'œuvre du maçon si nous ne pouvons comprendre le plan de l'architecte ?" dit Poincaré.