# LA GEOMETRIE DYNAMIQUE AU SERVICE DE LA TRANSFORMATION D'ESSAI AU RUGBY

Alain COLONNA [1], Damien RIVOLLIER [2]
Irem de Lyon

## Introduction : Conjecture et démonstration

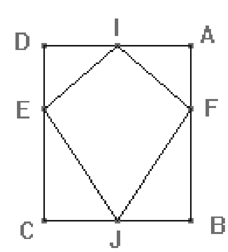
L'usage d'un logiciel de Géométrie Dynamique comme Cabri ouvre un domaine de travail qui enrichit sensiblement l'approche de la géométrie en général et le rapport des élèves à la démonstration en particulier. Pour autant, cet outil ne clarifie pas toujours les limites entre conjecture, preuve ou démonstration et leurs définitions.

Les performances du logiciel peuvent affaiblir le besoin de preuve, et mettre le professeur en difficulté lorsqu'il demande une démonstration de ce qui vient d'être « observé ». Parfois au contraire, le logiciel peut laisser une forte incertitude sur la validité de la conjecture ; dans ce cas, il joue plutôt le rôle de stimulant pour une recherche de preuve.

Voici quelques familles de problèmes qui peuvent être abordées en collège ou seconde :

1. *Alignement de points, droites concourantes.*
*Exemple* 1 : Les médiatrices d'un triangle quelconque sont concourantes.

2. *Invariance d'une longueur, d'une aire, d'une mesure.*



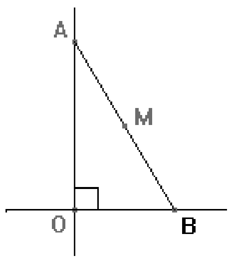

*Exemple* 2 : I et J sont les milieux de [DA] et [CB] dans le rectangle ABCD et EIFJ est un cerf-volant.

L'aire du cerf-volant ne change pas lorsque E se déplace sur [DC].

1 Enseignant à la Cité Scolaire Internationale de Lyon Gerland et formateur à l'IREM de Lyon.
2 Damien Rivollier était stagiaire d'Alain Colonna en 2006-2007, il enseigne en classe préparatoire au lycée Fabert à Metz depuis la rentrée 2007.

3. *Existence d'un lieu de points définissable.*

*Exemple* 3 : L'échelle [AB] de longueur constante « glisse » : A se rapproche de O sur [OA) et B s'éloigne de O sur [OB).




Le milieu M de [AB] se déplace sur un cercle de centre O et de rayon AB/2 .

Dans les deux premières situations, les fonctionnalités de Cabri permettent facilement d'établir une conjecture, la certitude de la réponse est alors acquise par les élèves : les médiatrices sont concourantes, l'aire est constante. Pour le premier type de situation, ils peuvent être encore confortés dans leur conviction par les tests de Cabri (alignement, parallélisme, appartenance).

Le professeur peut alors difficilement demander à ses élèves de chercher une démonstration dans le but de vérifier ou confirmer la validité de la conjecture, la démonstration permettant plutôt ici d'expliquer pourquoi on obtient cette réponse.

On peut considérer que Cabri apporte une meilleure appropriation de l'énoncé de la part des élèves par rapport à un traitement classique entièrement sur papier. Il autorise plus facilement le professeur à poser des questions plus ouvertes du type « comment évolue l'aire de EIFJ lorsqu'on déplace E sur [DC] ? » au lieu de « démontrer que l'aire de EFIJ ne varie pas ». Le professeur peut cependant poser la question « comment évolue l'aire de EIFJ ? » sans proposer l'usage de l'ordinateur, une forte incertitude reste alors sur la conjecture, la démonstration garde ainsi toute son importance.

Dans l'exemple 3, l'élève peut :

— Soit utiliser la fonction «lieu » de Cabri.

— Soit conjecturer par observation de M en déplaçant A, puis tracer le cercle de centre O passant par M et « valider » sa conjecture en déplaçant A à nouveau.

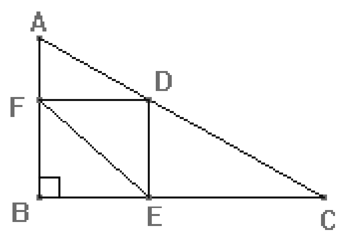
Dans les deux cas, on se retrouve à la fin dans la situation des deux exemples précédents : la recherche d'une démonstration se justifie par la volonté de comprendre pourquoi on obtient telle réponse. La deuxième démarche est cependant beaucoup plus intéressante : On commence par utiliser la fonction dynamique du logiciel pour essayer d'établir une conjecture, sans pour autant avoir une certitude sur sa validité. C'est à nouveau grâce à la mobilité dans la figure qu'on peut « valider la conjecture ». L'observation dynamique, sans compter son côté ludique attrayant, est ici un apport important dans l'activité mathématique de construction de conjecture. Le professeur peut bloquer l'accès à la fonction « lieu » ou imposer de ne pas l'utiliser…

Dans les exemples 2 et 3, l'observation sur Cabri de la déformation de la figure peut aider à la recherche de la démonstration. Mais le passage au support papier permet souvent une meilleure concentration sur le raisonnement et l'abstraction. La complémentarité du brouillon traditionnel et du « brouillon informatique » est un autre sujet d'étude.

4. *Construction d'un point*

Les énoncés demandant de construire un point selon les propriétés données à une figure peuvent constituer une 4ème famille.

*Exemple* : D appartient à l'hypoténuse du triangle rectangle ABC. D se projette orthogonalement sur [AB] et [BC] respectivement en F et E. Où placer D pour que la longueur FE soit minimale ?




Les mesures affichées par Cabri, même si on augmente le nombre de chiffres significatifs, ne permettent pas d'avoir une idée précise de l'emplacement de D. Si la conjecture du pied de la hauteur (qui est attendue) apparaît, l'élève doit tracer cette hauteur, déformer la figure, vérifier que la conjecture reste vraisemblable. On est loin de la certitude de la réponse qui apparaissait dans les trois exemples précédents. La démonstration aura bien ici son rôle « originel », s'assurer par la preuve que la conjecture est exacte.

Nous avons tendance à nous enthousiasmer devant le renouvellement de l'approche de la géométrie avec ce type de logiciel. Il est certain que la recherche d'une réponse par l'observation d'une figure dynamique a un aspect attrayant pour les élèves, et c'est un élément d'une démarche scientifique. Il ne faut cependant pas perdre de vue qu'une fois la réponse trouvée (conjecturée !), au moment d'aborder démonstration, on se retrouve souvent devant la même situation que dans un exercice classique comportant une question du type « montrer que les droites d et d' sont parallèles » puisque l'élève est certain de la réponse élaborée à l'aide de Cabri. Les activités qui laissent un doute sur la validité des conjectures peuvent ainsi s'avérer particulièrement intéressantes pour la valorisation de la démonstration qu'elles induisent.

L'activité présentée par Damien Rivollier illustre les potentialités de la géométrie dynamique dans cette perspective.

**Séance sur la transformation des essais au rugby.**

(Damien Rivollier)

La séance décrite ici a été réalisée en salle informatique, sur Cabri, en classe de Première Scientifique avec un groupe de 19 élèves. Elle avait pour objectifs :

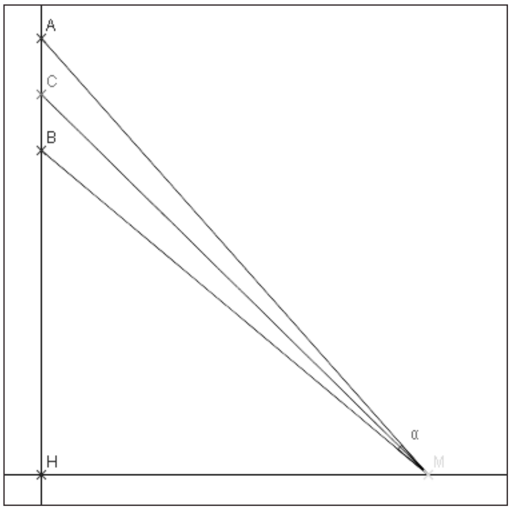
— la reprise en main du logiciel Cabri, pas encore utilisé en classe dans l'année,

— la modélisation d'un problème concret, amenant à un problème d'optimisation,

— la formulation et la mise à l'épreuve de conjectures,

— l'application de connaissances sur les angles.

La séance débute par l'exposé du problème et des hypothèses de modélisation ; les élèves ne sont pas encore devant les ordinateurs. Il s'agit de traiter du problème plan de la transformation d'un essai au rugby (cf. figure page suivante) : un essai est marqué au point H, la droite (AB) étant la ligne d'essai. La règle stipule qu'un joueur doit tenter de transformer l'essai pour marquer des points supplémentaires ; pour cela, le ballon doit être posé sur la perpendiculaire à (AB) en H, puis par un coup de pied, être envoyé entre les poteaux symbolisés par les points A et B. On donne BH = 16,2 m et AB = 5,6 m (la figure sera faite




à l'échelle 1/200ème ). On suppose aussi que le buteur n'a pas de problème de puissance. Ce sont les élèves qui, après un bref débat, concluent qu'il faut maximiser l'angle $\alpha$ pour que la transformation ait le plus de chances de réussir. C'est alors seulement qu'ils vont s'installer face aux ordinateurs ; le logiciel n'a pas été utilisé ici dans cette phase de modélisation. On pourrait, pourquoi pas, imaginer le recours à un logiciel pour se mettre à la place du buteur, voir comment il perçoit les poteaux en se déplaçant le long de la droite où il peut poser le ballon, et conclure à la maximisation de l'angle $\alpha$ comme objectif à atteindre.

Les élèves réalisent la figure sous Cabri, affichent la valeur de l'angle, et en observent l'évolution quand le point M se déplace. La séance étant la première où les élèves manipulent Cabri cette année, cette phase prend quelques minutes (une dizaine). Tous observent qu'il existe une position optimale. Plus exactement, quand on part du point H, l'angle augmente, puis reste proche d'une certaine valeur maximale (environ 8,47°), avant de diminuer à nouveau. Il est à noter qu'il est important que l'essai ne soit pas marqué « entre les poteaux » : en effet, si l'essai est marqué en un point du segment [*AB*], plus on est près des poteaux et plus l'angle de tir est grand, et donc plus la transformation est facile ; on n'aurait donc pas la croissance puis la décroissance de l'angle $\alpha$ quand on s'éloigne de la ligne d'essai (*AB*) qu'on observe pour notre situation. Les élèves de Première, familiers avec la notion de fonction, en concluent qu'il existe un angle maximum dans cette zone optimale, maximum qui reste à localiser. Je les invite à caractériser cette position optimale ; le problème est de savoir comment on pourrait avoir un moyen de construire précisément le point optimal. Un groupe d'élèves remarque que le point M tel que HM = 19m semble être dans la zone optimale, et que 19 m est la distance séparant le point H du milieu des poteaux. Je lance donc toute la classe sur cette piste, en leur demandant de placer le point C, milieu du segment [AB], et en prétendant que dans les écoles de rugby on apprend à viser le « poteau du milieu ».

Beaucoup d'élèves, en affichant les longueurs des côtés, formulent la conjecture suivante : *La position idéale pour le point M correspond au cas où le triangle CHM est rectangle isocèle*. Avec la précision des mesures que donne Cabri, si on ne configure pas un nombre suffisant de chiffres après la virgule, cette conjecture (qui se révèlera fausse) semble être vraie. En effet, il existe une zone proche de la zone optimale où en fait, l'angle $\alpha$ varie très peu. Si on place le point M tel que HM = CH, la valeur de l'angle affichée par Cabri semble être maximale.

Je demande alors s'ils peuvent démontrer leur conjecture. Vu la simplicité de la conjecture et le lien avec la figure, ils sont dans l'ensemble convaincus qu'elle est vraie. Néanmoins, beaucoup ne voient pas comment démarrer ; un très bon élève prétend avoir une preuve : il a calculé que

$$\alpha = \tan^{-1}(\frac{AH}{HM}) - \tan^{-1}(\frac{BH}{HM}),$$

et tracé le graphe de cette fonction qui dépend de HM avec sa calculatrice. Il me montre la courbe obtenue, qui possède une portion relativement plate. Il affirme ensuite que la valeur de HM = CH est le maximum, ce qui prouve la conjecture. Je lui rétorque qu'il ne sait pas (encore) étudier la fonction " $\tan^{-1}$ " qui n'est pour lui qu'une touche de la calculatrice, et que, par conséquent, son argument, qui, dans une certaine mesure, vient étayer la conjecture, ne constitue en rien une preuve.

En fait, on pourrait parfaitement résoudre complètement le problème via cette approche, pour peu qu'on connaisse les formules d'addition de la fonction tangente (ce qui est, par exemple, le cas en Terminale STI) : en effet, l'angle $\alpha$ est maximal quand $tan\alpha$ est maximal.

Or on a $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ avec $\tan\alpha_1 = AH/HM$ et $\tan\alpha_2 = BH/HM$ . On a donc :

$$\tan\alpha = \tan(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{HM.(AH - BH)}{HM^2 + AH.BH},$$

fonction qui est maximale quand $HM = \sqrt{AH.BH}$ (moyenne géométrique de *AH* et *BH)*, alors que la position de *M* pour laquelle *CHM* est rectangle isocèle correspond au cas où *HM* est la moyenne arithmétique de *AH* et *BH*.

Mais l'élève que nous considérons n'a pas les outils pour faire ce raisonnement, et il doit se contenter d'observer le graphe représentant $\alpha$ en fonction de HM sur sa calculatrice.

La platitude de la courbe au voisinage de la distance optimale pose problème et le gêne pour conclure. Pourtant, pour peu qu'il ait manipulé habilement les fonctions zoom de sa calculatrice, il aurait pu infirmer sa conjecture, le maximum étant atteint pour une valeur légèrement inférieure à 19 m (il aurait tout aussi bien pu le voir en utilisant Cabri avec un grand nombre de chiffres significatifs pour l'angle $\alpha$).

Tout ceci fait apparaitre deux difficultés. Tout d'abord, les élèves ont tendance à faire confiance aux valeurs numériques avec un grand nombre de décimales fournies par les machines pour tester la vérité d'un énoncé mathématique ; on ne s'attardera pas ici sur ce sujet.

L'autre difficulté est qu'après avoir observé l'évolution de $\alpha$ quand *M* se déplace et la zone où l'angle est proche de son maximum, puis caractérisé géométriquement un point se trouvant dans cette zone (le point *M* tel que *CHM* rectangle isocèle), un élève peut estimer avoir résolu le problème initial, qui était un problème purement pratique. En effet, compte tenu des hypothèses de modélisation (on néglige le vent, on ne tient pas compte de la puissance du joueur...), on peut parfaitement estimer qu'en pratique, la chance de réussir la transformation est la même, où que l'on se place dans la zone optimale. Il s'opère donc dans la tête des élèves un retour à la réalité physique de la situation modélisée ; la conjecture est, de ce point de vue-là, tout à fait acceptable.

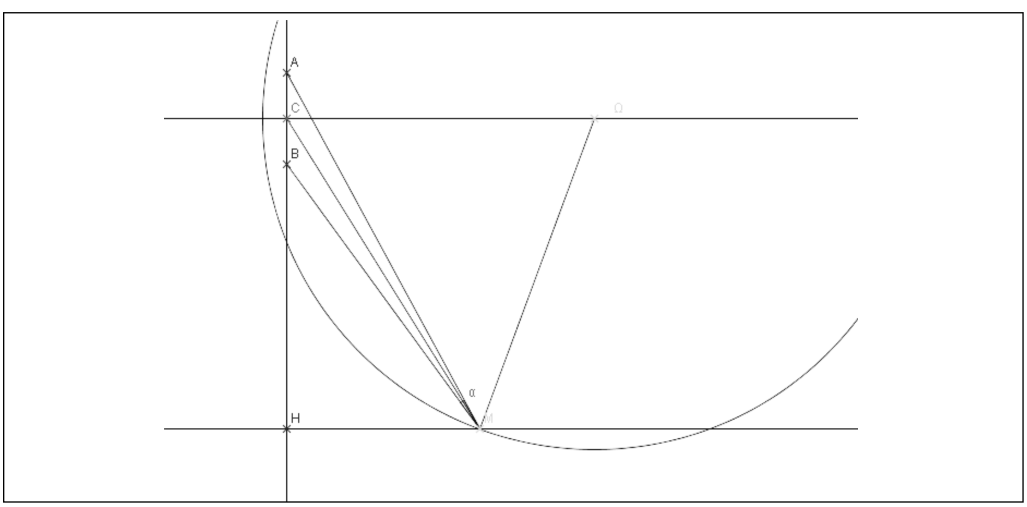
On peut dès lors se demander dans quelle mesure ce retour empêche les élèves d'aller étudier précisément ce qui se passe dans la zone optimale pour tester la vérité d'une conjecture mathématique qui ne saurait pas être « physiquement très fausse », et ce, alors que les élèves sont conscients qu'un énoncé mathématique est soit vrai soit faux, mais pas « presque vrai ».

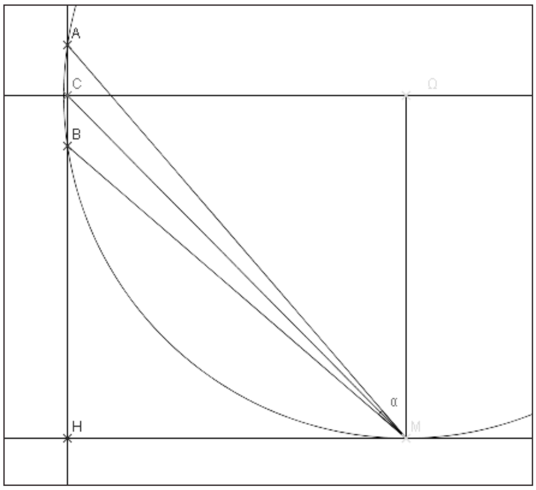
Néanmoins, ce retour à la réalité physique du problème initial reste tout à fait souhaitable : en effet, après un détour mathématique qui va nous amener à élaborer et à démontrer une conjecture correcte, mais un peu compliquée, une réflexion peut s'engager avec les élèves sur la question suivante : « en pratique, comment le buteur va-t-il décider d'où il va tenter la transformation ? ».

Pour en revenir à notre séance d'un point de vue purement mathématique, nous sommes toujours face à une conjecture dont nous ne savons pas si elle est correcte ou non. Je propose alors aux élèves, pour les mettre sur une piste de justification et sans leur expliquer ce choix, de tracer le cercle circonscrit au triangle *ABM*, et de formuler une nouvelle conjecture sur la position optimale du point *M* à propos de ce cercle. Pour le lecteur qui ne verrait pas pourquoi tracer le cercle circonscrit à *ABM*, et qui trouverait cette initiative trop artificielle, une autre approche est décrite plus loin. Après avoir construit la figure et effacé les traits de construction, ils obtiennent une figure semblable à la figure ci-dessous.

La conjecture qu'ils formulent est la même pour tous : *la position optimale de M correspond au cas où le cercle est tangent à la perpendiculaire à (AB) passant par H, c'est-à-dire que la droite (ΩM) est parallèle à (AB).* Note pour le lecteur : Cette conjecture, fortement induite par la construction du cercle, est la bonne, pour l'instant les élèves ne le savent pas.

Certains élèves pensent que je leur ai fait tracer le cercle pour faciliter la démonstration, et qu'en fait, les deux conjectures décrivent la même position ; ils pensent donc qu'ils vont, en démontrant la deuxième conjec-






ture, prouver la première, qui est plus simple du point de vue de la construction du point idéal. Je leur demande alors si les deux conjectures qu'ils ont formulées sont bien équivalentes. Si on ne regarde pas très précisément, Cabri semble leur dire que oui. Certains prétendent pouvoir le démontrer, l'angle droit en M qui caractérise la tangence du cercle montrant selon eux que CΩMH est un carré.

A ce stade, j'invite les élèves à quitter leurs écrans pour discuter de cette question. En effet, la figure statique de la page précédente est suffisante pour trancher, et l'aspect dynamique de Cabri n'aide en rien pour cela. Un élève corrige ce qui a été dit, l'angle droit en M nous indique seulement que CΩMH est un rectangle. Je demande alors quelles sont la longueur et la largeur de ce rectangle. Un côté MΩ est égal au rayon du cercle. Je les questionne pour savoir si CΩ est aussi égal au rayon du cercle. Après un petit moment de flottement (lié au fait qu'ils essaient de montrer que la réponse est oui), un élève affirme que le rayon vaut AΩ ou BΩ, mais pas CΩ. La classe entière s'en convainc en voyant que C se trouve sur la corde [AB], et que donc CΩ est plus petit que le rayon du cercle. Les deux conjectures ne sont donc pas équivalentes. Je leur montre que le fait que CΩ soit « presque » sur le cercle explique qu'ils aient pu croire que CΩMH était un carré, c'est-à-dire que CMH était rectangle isocèle.

Il faut alors décider quelle est la bonne conjecture. On pourrait imaginer plusieurs stratégies pour faire en sorte que les élèves tranchent : par exemple, revenir sur l'idée qu'a eue celui qui a tracé avec sa calculatrice la fonction $\alpha = \tan^{-1}(\frac{AH}{HM}) - \tan^{-1}(\frac{BH}{HM})$, puis leur faire affiner leur conjecture, en faisant les zooms pertinents sur les écrans de leurs calculatrices pour voir très précisément où est le maximum. On peut également constater notre échec à démontrer la première conjecture, et les inciter à essayer de démontrer la seconde. Si on y parvient, on aura alors validé la seconde conjecture, et par là-même invalidé la première qui ne lui était pas équivalente.

Les 50 minutes de la séquence étant écoulées, j'affirme que la deuxième conjecture est bel et bien la bonne et propose à la classe qu'on la démontre au cours de la séquence prochaine. La démonstration n'est pas évidente. Je leur ai donc donné, sous forme de questions intermédiaires, les trois étapes de la preuve :

— Tout d'abord, il s'agit de montrer que $\alpha = \widehat{A\Omega C}$ (par le théorème de l'angle au centre revu récemment dans le chapitre sur les angles). Ainsi, $\sin(\alpha) = \frac{AC}{\Omega A} = \frac{AB}{2\Omega A} = \frac{AB}{2r}$, ou $r$ est le rayon du cercle circonscrit à ABM.

— Ensuite, la connaissance de la fonction *sinus*, étudiée en seconde, nous permet d'affirmer que, puisque $\alpha$ est compris entre 0 et $\pi/2$ , $\alpha$ sera maximal quand $sin(\alpha)$ sera maximal. Il faut donc que le rayon du cercle $r$ soit le plus petit possible.

— Enfin, on a une contrainte sur $r$ : en effet, on a $r$ = MΩ. De plus, Ω est sur la médiatrice de [AB], c'est-à-dire sur la perpendiculaire à (AB) passant par C. Par ailleurs, M est, par hypothèse, sur la perpendiculaire à (AB) passant par H. M et Ω peuvent donc *a priori* se déplacer librement sur deux droites fixes. La distance $r$ est donc au moins égale à la distance entre ces deux droites, qui sont parallèles. La distance ΩM vaut exactement la distance entre ces deux droites quand (ΩM) est perpendiculaire à (MH), c'est-à-dire quand le cercle circonscrit à ABM est tangent à la perpendiculaire à (AB) passant par H.

Cette question a posé problème à la classe, et une mise au point a été nécessaire sur le fait que la distance entre deux points pouvant se déplacer sur deux droites parallèles est au moins égale à la « distance » entre les deux droites. Peut-être ici aussi l'emploi d'un logiciel de géométrie dynamique (en vidéo-projection par exemple) aurait pu s'avérer extrêmement utile. Par contre, cela paraissait évident aux élèves que la distance était minimale quand les deux points étaient sur une perpendiculaire aux deux droites. Il ne restait plus alors qu'à relier la perpendicularité des droites (HM) et (ΩM) à la définition de la tangence à un cercle pour achever la démonstration de la conjecture.

En tout, l'activité a duré 1h15.

Pour la fois suivante, j'ai demandé aux élèves de faire une application numérique, puis de donner à partir de la démonstration un programme de tracé du point optimal M, ce qui n'est pas si facile que cela, même une fois la démonstration faite :

— Tracer la médiatrice de [AB].

— Tracer le cercle de centre A et de rayon CH, il coupe la médiatrice à [AB] en Ω ; ainsi, on aura ΩA = CH .

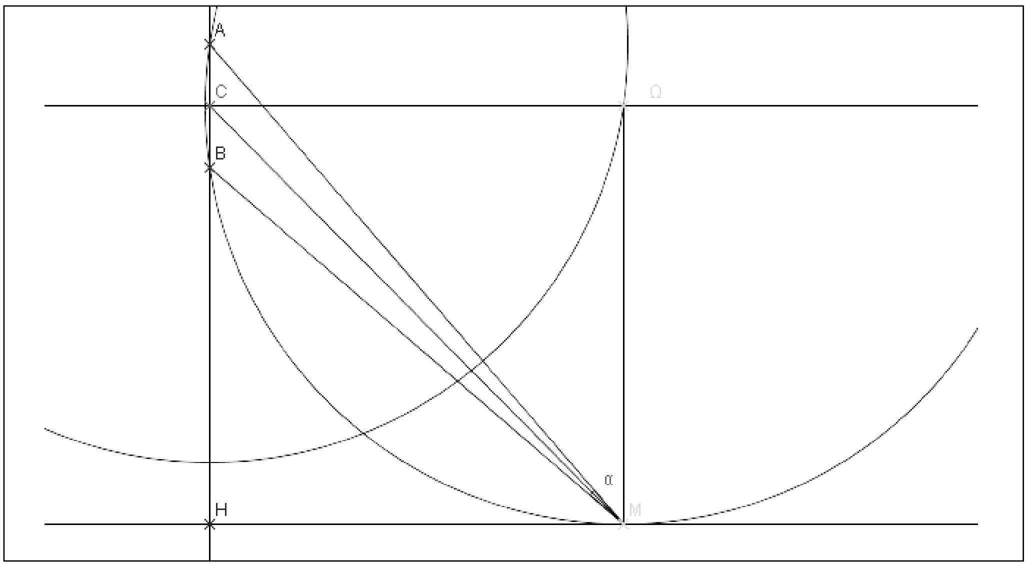
— Soit $d$ la perpendiculaire à (AB) passant par H. Tracer la perpendiculaire à $d$ passant par Ω. Elle coupe $d$ en le point M optimal, qui s'avère être le point de tangence entre le cercle de centre Ω et de rayon ΩA et la droite $d$.

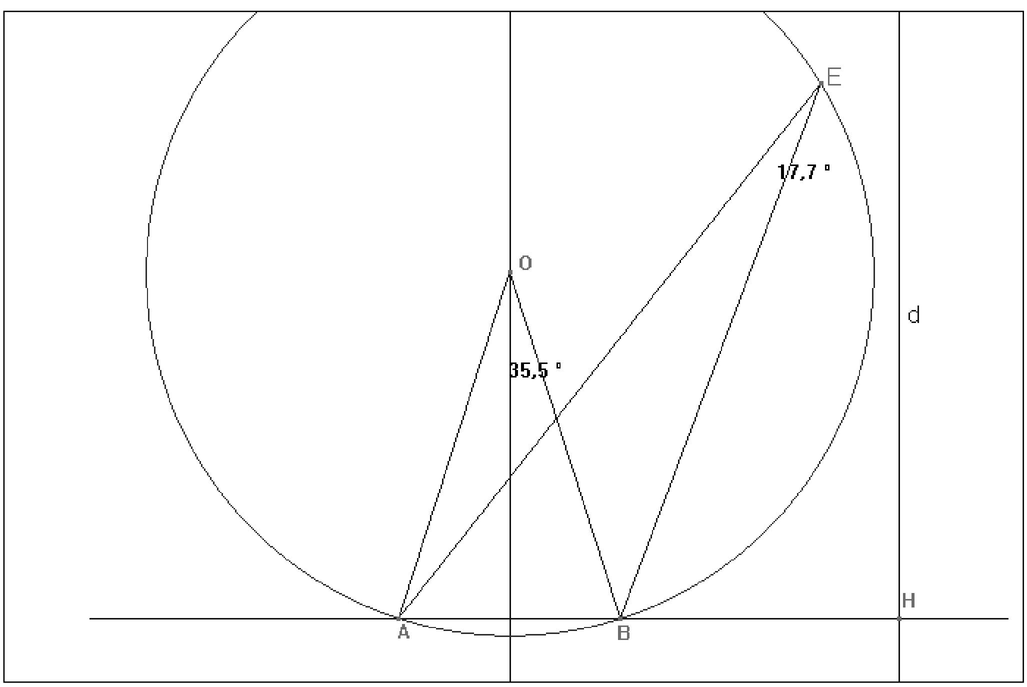
Le programme de tracé avec la médiatrice, le cercle de centre $A$ et de rayon $CH$, et enfin le point $M$ optimal, est illustré par la figure du haut de la page suivante. La correction du programme de tracé sera faite rapidement à la séance suivante.

Présentons à présent une autre approche, suggérée par Mireille Sauter, qui permettrait d'amener de façon un peu moins artificielle la bonne conjecture.

On remarque que si on déplace un point $E$ sur le grand arc d'un cercle qui a pour centre un point $O$ situé sur la médiatrice de [$AB$], et passant par $A$ et $B$, l'angle de visée $\widehat{AEB}$ ne change pas (angle inscrit qui vaudra la moitié de l'angle au centre $\widehat{AOB}$ ). Si on se situe à l'extérieur de ce cercle, l'angle de visée sera plus petit que si on se situe sur le cercle.

On peut illustrer cette démarche par la figure du bas de la page suivante.


A
C
Ω
B
α
H
M


E
17,7 °
O
d
35,5 °
H
A
B

Ainsi, si on trace la droite $d$ où on doit chercher le point $M$, on peut déplacer le point $O$ sur la médiatrice de $[AB]$ et ainsi modifier la taille du cercle de centre $O$ passant par $A$ et $B$. Quand ce cercle vient toucher $d$, le point de tangence aura donc un angle de visée plus grand que tous les autres points de $d$, qui seront à l'extérieur du cercle ; c'est notre point $M$ optimal, ce qui clôt notre étude du problème.

Hormis le travail sur les angles et sur la modélisation d'un problème concret aboutissant à un problème d'optimisation, cet énoncé présente un intérêt vis-à-vis du lien entre l'usage du logiciel Cabri et la liaison conjecture-démonstration. Il s'inscrit pleinement dans la catégorie des activités qui laissent un doute sur les conjectures et valorisent la production d'une démonstration. En raison des imprécisions sur les mesures d'angle, le logiciel Cabri a amené les élèves à émettre une conjecture qui s'est révélée ensuite mathématiquement fausse, même si elle nous donne un moyen simple de construire un point acceptable physiquement ; puis il les a aidés à en formuler une autre. La démonstration a permis alors de valider ou invalider chaque conjecture, et ainsi d'être certain de la solution du problème.

Outre le fait de permettre d'expliquer et comprendre pourquoi une réponse donnée est vraie, et d'être sûr de son exactitude, la démonstration joue ici un rôle déterminant dans la recherche de la solution. C'est elle qui convainc les élèves de la bonne réponse.

Le logiciel de géométrie dynamique, loin d'affaiblir le besoin de preuve, redonne au contraire ici à la démonstration toute son importance dans la démarche mathématique.

**Bibliographie**

1°) Les exemples d'énoncés proposés dans l'introduction de l'article ont été étudiés dans le groupe de l'IREM de Lyon « Géométrie dynamique » auquel participent *Alain Colonna, Béatrice Frackowiak, Maryvonne Le Berre, Jean-François Zucchetta.* Une publication doit paraître à ce sujet fin 2008.

La séance sur la transformation d'essai au rugby s'est notamment inspirée d'un exercice du *Transmath, 1ère S*, édition Nathan.

2°) *Initiation au raisonnement déductif au collège.* Une suite de situations permettant l'appropriation des règles du débat mathématique.
*English title :* Introduction to deductive reasoning at high school (ZDM/Mathdi)
*Deutscher Titel :* Einfuehrung in das deduktive Denken in der Sekundarstufe 1 (ZDM/Mathdi)
*Auteur(s)* **:** Arsac Gilbert ; Chapiron Gisèle ; Colonna Alain ; Germain Gilles ; Guichard Yves ; Mante Michel
*Editeur* **:** Presses Universitaires de Lyon Lyon, 1992

3°) *Les pratiques du problème ouvert.* (octobre 2007)
Un livre de Gilbert Arsac et Michel Mante, co-édité par l'IREM et le CRDP de l'académie de Lyon