VOUS AVEZ DIT « DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES » ?

***Alors fuyons …*[1]**

Aline ROBERT
Irem Paris 7

La connotation négative de l'adjectif « didactique » peut participer à cette première réaction d'un certain nombre de professeurs de mathématiques, débutants ou non. Un film qualifié de « didactique » par la critique n'est pas un film où on se précipite : il doit être plein de bonnes intentions mais lourd, indigeste, ennuyeux, sans idée nouvelle, sans intérêt finalement… Et, si ça se trouve, avec plein de vocabulaire incompréhensible !

Une certaine ambiance anti-IUFM a aggravé cette méfiance préconçue, voire ce rejet a priori, associant souvent le mot didactique à des prescriptions pas toujours justifiées, jugées même quelquefois sectaires, de formateurs IUFM. Il y a de grandes différences entre les IUFM et leurs programmes de formation, selon la taille des académies par exemple. Pourtant, malgré ces diversités, dans le premier comme dans le second degré, beaucoup de formateurs sont considérés a priori comme « coupés du terrain », et, de ce fait, un tant soit peu illégitimes pour former les futurs enseignants. Ajoutons le zeste de cette idéologie dominante si répandue en ce moment, qui donne à l'expérience, au terrain, le rôle essentiel dans la formation et dans les pratiques, faisant peu de cas de toute réflexion un peu générale, théorique, sur ces dernières, et nous comprenons pourquoi « la didactique » peut avoir si mauvaise presse, a priori. On pourrait s'interroger sur la coïncidence si bienvenue entre une politique générale de restrictions économiques et des injonctions à réduire les formations à leur partie la

1 Le mot n'est pas trop fort, ainsi mon propre neveu, alors enseignant de français débutant, a négocié avec moi de me rendre un certain service, concernant un trajet en automobile, contre mon silence absolu sur ce point.

moins « chère », mais ce serait sans doute du mauvais esprit.

Je voudrais ici plaider, de manière personnelle [2], contre ces idées a priori, en rétablissant quelques éléments précis sur ce que représente la *didactique des mathématiques* et ses apports éventuels, notamment au niveau des lycées et collèges. Les articles de Douady (1994), Houdement (2007), Hersant (2005), par exemple, apportent un éclairage complémentaire sur la liaison école/collège. Ces précisions que je vais apporter sont toutes relatives car je n'ai pas vraiment la place de donner des exemples consistants, pourtant indispensables à la compréhension d'un domaine vraiment complexe. C'est que sont en jeu les relations compliquées qui se tissent, jour après jour, entre des savoirs mathématiques à enseigner, des enseignants et des classes, formées d'élèves toujours changeants… J'ai donc choisi de donner quelques idées fortes plutôt qu'un panorama. Si, grâce à la bibliographie, quelques lecteurs vont y regarder de plus près, mon objectif sera atteint !

Je vais commencer par un exemple, limité, pour illustrer un certain nombre de questions qui relèvent du champ de la didactique. Je présenterai ensuite succinctement quelques spécificités de nos recherches, car la didactique des mathématiques, c'est d'abord et avant tout un champ de recherches. Cela devrait déjà tenir lieu de rectification implicite d'une partie des griefs évoqués au début. Je complèterai le tableau en indiquant très brièvement quelques grandes démarches utilisées en didactique des mathématiques, surtout en France et quelques résultats. Cela m'amènera à discuter des formations des enseignants. Je terminerai en évoquant le problème de l'enseignement en classes de milieu défavorisé, avant de conclure sur des perspectives.

2 Ce que j'écris n'engage que moi, traduisant une expérience singulière.

1) Un exemple de questionnement relevant du champ de la didactique des mathématiques

Je vais donner un exemple, nécessairement limité, pour aborder mon propos : l'enseignement de la racine carrée en troisième de collège. L'étude de cet enseignement relève de notre champ de recherches lorsque les apprentissages sont analysés en relation avec la spécificité de la notion et avec l'enseignement. Des recherches didactiques effectives y sont liées même s'il reste des points non abordés.

Je vais en fait dégager à partir de ce thème un certain nombre des questionnements importants qui relèvent de nos travaux, en faisant référence au fur et à mesure à certaines des recherches déjà menées.

Confortant la difficulté de l'apprentissage de la notion, et donc son intérêt, des études, dont certaines relèvent de notre champ, ont permis de mettre en évidence des erreurs récurrentes d'élèves qui font partie des données sur lesquelles nous travaillons.

• Les élèves peuvent être amenés à confondre les expressions : «élever au carré» et «dont le carré est» d'une part et même « l'opposé du carré » et le « carré de l'opposé » d'autre part. Dans Comiti, Grenier, Margolinas (1995) une des interactions étudiées entre un élève et l'enseignant est précisément celle de l'élève Michael qui écrit $-(1)^2$ et qui lit un « carré négatif » au lieu de l'opposé d'un carré.

• La définition est compliquée à énoncer et difficile à comprendre. De plus, pour les élèves, le statut de la racine carrée n'est pas net.

En 4ème, c'est une valeur numérique introduite par la touche " √ " de la calculatrice dans les problèmes utilisant le théorème de Pythagore. Elle n'a pas d'existence propre, c'est la solution positive d'une équation de la forme $x^2 = a$ avec a positif mais le rapport que font et feront les élèves entre les solutions de l'équation $x^2 = a$ avec $a > 0$ et $\sqrt{a}$ $\sqrt{a}$ la solution positive de cette équation peut rester très confus.

En 3ème, c'est un nombre, mais pas comme les autres, même si on peut prolonger les règles de calcul connues.

En seconde, il s'agit d'un irrationnel, d'un réel. De plus il y a un « mélange » avec des nombres connus : les racines carrées peuvent être entières, décimales, rationnelles ou irrationnelles.

De ce fait la question se pose des rapports entre valeur exacte et valeur approchée en particulier entre la classe de 4ème et la classe de 3ème. Par exemple considérer $\sqrt{2}$ comme valeur exacte peut être difficile à comprendre surtout si l'écriture exacte du résultat est $\sqrt{2} + 3$. Pour les élèves ce calcul n'est pas terminé !

• Une lettre (a) est souvent perçue comme un nombre positif par les élèves, et même, comme un entier naturel. Ceci peut être « caché » dans la simplification de $\sqrt{a^2}$ en 3ème et renforcé par l'utilisation géométrique pour calculer la mesure de la longueur de l'hypoténuse dans un triangle rectangle.

• Et la racine de la somme et la somme des racines ? Une erreur qui résiste au temps et qui est encore très présente en 2nde et même après, chez un certain nombre d'élèves, dans certains exercices. Cependant, des renseignements importants manquent à ces données, notamment l'origine précise de ces erreurs en relation avec l'enseignement reçu, leur répartition dans les classes, leur évolution précise. Mais la mise en évidence de ces erreurs et dysfonctionnements dans l'utilisation de la notion peut tout de même orienter les recherches et contribuer à focaliser des questionnements. Par exemple on peut considérer que la question du sens de la notion se pose de manière particulière, en relation avec la technique : comment concilier ici sens, lié à la nature de la notion et technique, liée à l'usage de la calculatrice et aux opérations sur les radicaux ?

Pour préciser cette idée de sens, pour mieux comprendre ce qu'est la racine carrée en mathématiques, comment et pourquoi l'utiliser, nous avons recours à l'histoire de la notion ainsi qu'à l'histoire de l'inscription de la notion dans les programmes scolaires. C'est un deuxième axe de questionnement didactique.

Une étude didactique menée par Assude (1996) a permis de mettre ainsi en évidence plusieurs périodes dans l'enseignement de la notion liées aux évolutions des savoirs et techniques mathématiques sur les questions suivantes : quel objet mathématique présente-t-on aux élèves ? A quoi peut-il servir ? Manque-t-il des éléments ? Elle a donc étudié ce que nous appelons la *transposition didactique* [3] c'est-à-dire la transformation qu'il y a entre le savoir savant et le savoir enseigné [4].

3 Concept développé par Chevallard, 1985, qui caractérise le décalage entre le fonctionnement savant (du savoir) et son fonctionnement dans l'enseignement.
4 Nous nous inspirons ici du Document de formation n° 8 rédigé par F. Cissé (2006) et du mémoire de DEA de A. Dumail, non publié.

La méthode utilisée a été de regarder pour la racine carrée, l'évolution des programmes en ce qui concerne :

— le statut (nombre, fonction, irrationnel, opération, …),
— le calcul (extraction / approximation),
— les opérations (algèbre des radicaux).

T. Assude a trouvé trois périodes : avant la réforme des mathématiques dites « modernes », pendant la réforme, après la réforme.

1ère *période* : avant la réforme ou période « classique » (jusqu'en 1970)

L'objet « racine carrée » fait partie du domaine de l'arithmétique. Calculer une racine carrée est une opération. On utilise un algorithme pour l'extraire. On obtient une écriture décimale et par le développement décimal illimité ou non, on a une indication sur la nature de ce nombre. Simplifier, rendre rationnel le dénominateur d'un quotient où figure des racines carrées est effectivement utile dans les calculs car il n'y a pas de calculatrice ! On a ainsi affaire surtout à un outil.

A la fin des années 1950, l'algorithme d'extraction commence à disparaître de l'enseignement (il est supprimé en 1962) et la notion d'opération comme noyau organisateur de l'enseignement est remis en cause.

2ème *période* : pendant la réforme ou période « moderne » (de 1970 à 1978)

Structures et fonctions remplacent les manipulations. La notion de fonction devient l'un des noyaux organisateurs de l'enseignement au collège et la racine carrée est la bijection réciproque sur $\mathbf{R}^+$ de la fonction carrée. L'utilisation des tables est peu à peu délaissée avec l'apparition des machines, un moyen moderne de calcul développé à partir des années 1960, même si dans les classes les calculatrices sont introduites plus tard. La notion d'approximation prend une place importante. Les réels sont construits à partir des nombres décimaux et des développements décimaux illimités. Les irrationnels s'effacent, $\sqrt{a}$ est un réel dont l'existence et l'unicité sont assurées par la définition même. L'objet « racine carrée » est au centre de l'enseignement.

3ème *période* : après la réforme ou période « contemporaine » (après 1978)
Il y a un retour en arrière partiel.

Les nombres réels disparaissent des programmes de collège mais sont supposés préconstruits au lycée. Alors les racines n'ont plus de statut précis ! Ce sont des objets sur lesquels on fait des opérations. Cependant, les résidus de calculs sur les racines sont moins justifiés voire pas du tout, du fait des nouveaux moyens de calcul.

Ainsi la racine carrée n'est plus une opération, ce pourrait devenir une fonction mais ce n'est pas le cas, alors même que c'est le recours aux propriétés de la fonction carrée qui assure l'existence, l'unicité et la nature de ce nombre. C'est que l'outil « fonction » est manquant au collège.

Maintenant la racine carrée d'un nombre positif A est « l'(unique) nombre » positif dont le carré vaut A ». Pourquoi existe-t-il toujours ? Pourquoi est-il déclaré unique ? Que représente le carré de A si A n'est pas un nombre déjà connu ? On prolonge plus généralement aux « nombres » introduits de cette façon toutes les opérations arithmétiques usuelles mais de manière implicite, avec en plus des emprunts partiels à l'algèbre lorsqu'il s'agit de calculer une somme du type $3\sqrt{a} + 8\sqrt{a} = 11\sqrt{a}$. Technique pour le moins isolée du sens.

Tout se passe comme si, pour reprendre les propos de T. Assude, le passage du savoir savant au savoir enseigné s'est arrêté en cours de chemin : on peut se demander si, au-delà de la rupture entre l'utilisation de la racine carrée en classe de 4ème et de 3ème de collège, il n'existe pas certains « manques » dans l'introduction de la notion, tant sur son existence que rien ne garantit plus que sur sa nature.

Oui mais est-ce que ça gêne les élèves ? Est-ce que cela rend compte de leurs difficultés ? Notre troisième question se rapporte alors à l'enseignement de la notion, compte tenu de ce qui précède : comment se passent les enseignements ? Quelles sont les relations avec ce qui précède – accentuent-ils ou essaient-ils de pallier les manques éventuels ? Quels choix, quelles alternatives peut-on proposer ?

Des études didactiques, dispersées au fil du temps, montrent une certaine diversité, notamment sur les définitions utilisées par les enseignants. L'ensemble des séances s'inscrit cependant dans des grandes lignes communes, particulièrement ce qui concerne les exercices, régularités qu'on retrouve dans les manuels : mais la part de la spécificité de ce contenu précis et des exigences des programmes est difficile à dégager des habitudes plus personnelles des enseignants (cf Assude, 1989, Bessot, 1993, Bronner, 1997, mémoire de master de A. Dumail par exemple).

Une autre démarche s'inspire des travaux de G. Brousseau (1998) : on peut ainsi tenter de mettre au point une introduction à la notion ou à une de ses propriétés engageant les élèves dans un problème qui les oblige à y avoir recours, si possible même avec des moyens de s'auto-contrôler.

E. Roditi (1996) a ainsi élaboré et utilisé dans ses classes une séance dont l'objectif est d'aider les élèves à surmonter une double difficulté déjà signalée : celle de considérer $\sqrt{a}$ comme un nombre et celle d'effectuer des opérations sur ces nombres. La situation qu'il propose aux élèves amène à la multiplication des racines carrées introduites comme coefficients d'agrandissement de carrés successifs. Cependant l'adoption de cette situation par des enseignants a été étudiée et a révélé bien des pièges (mémoire de DEA de D. Poiret, non publié), notamment selon les valeurs numériques adoptées et les déroulements choisis en classe. D'autres auteurs ont cherché à légitimer l'utilisation « naturelle » que les élèves font de leur calculatrice faisant le lien entre cette utilisation et la théorie. Ce type de travail s'inscrit dans une démarche générale de recherche d'adaptation de l'enseignement des mathématiques aux nouvelles technologies, voire aux nouveaux médias. Les auteurs y voient un enjeu majeur de survie de la discipline scolaire mathématique, et un travail spécifique de didacticien…

Ainsi Chevallard, 2004, a énoncé et démontré le résultat suivant, garantissant l'égalité de deux racines carrées dont la calculatrice affiche l'égalité des n premières décimales seulement :

Soit a, b et c trois entiers tels que $a\sqrt{b}$ et $\sqrt{c}$ aient la même partie entière et les mêmes n premières décimales. Si $a\sqrt{b} + \sqrt{c} < 10^n$ alors $a\sqrt{b} = \sqrt{c}$.

En effet, $a\sqrt{b}$ et $\sqrt{c}$ ont la même partie entière et les mêmes n premières décimales donc :

$$0 \leq |a\sqrt{b} - \sqrt{c}\,| < 10^{-n}.$$

Or $\quad 0 \leq a\sqrt{b} + \sqrt{c} < 10^{n}.$

En multipliant membre à membre ces deux encadrements de réels positifs, on obtient :

$$0 \leq |a\sqrt{b} - \sqrt{c}\,| \times (a\sqrt{b} + \sqrt{c}\,) < 10^{-n} \times 10^{n}$$

ou encore : $\quad 0 \leq |a^2 b - c| < 10^0$

soit $\quad 0 \leq |a^2 b - c| < 1.$

Mais a, b et c sont trois entiers donc la seule possibilité est : $a^2 b - c = 0$, soit $a^2 b = c$ et donc $a\sqrt{b} = \sqrt{c}$ et les deux nombres $a\sqrt{b}$ et $\sqrt{c}$ sont bien égaux.

Il reste une dernière étape éventuelle pour un travail didactique s'inspirant de ce qui précède : après la conception (ou la reprise d'une proposition existante), c'est l'expérimentation d'un projet pour la classe, s'il y en a un (je ne connais pas d'exemple complet à citer sur le thème) – bien entendu toutes les recherches ne mettent pas en jeu cette démarche.

Que ce soit pour en tester la recevabilité par les professeurs ou ses qualités pour les élèves, cette phase ne peut être « sautée » dans les recherches mettant en jeu un tel projet d'enseignement, avec les retours qu'elle implique. En effet, pour élaborer un projet d'enseignement conforme aux programmes, susceptible d'être adopté par les enseignants, inspiré à la fois de la nature des savoirs visés et des théories ou modèles didactiques que nous adoptons (cf. ci-dessous), nous devons faire des paris, comme un ingénieur lorsqu'il conçoit une ingénierie à partir de lois physiques — d'ailleurs le mot « ingénierie » a été repris en didactique pour qualifier un projet à expérimenter (cf. Artigue). C'est d'autant plus indispensable que, dans notre champ scientifique, il n'y a pas de lois mais seulement, au mieux, des régularités ! C'est même une méthode en soi en didactique des mathématiques : le fait de tester un projet précis, où beaucoup de paramètres sont fixés par les chercheurs, permet de mieux comprendre ce qui se joue, de gagner des résultats à partir des hypothèses, de mieux en délimiter aussi la portée et les limites.

2) Naissance et première approche du champ « didactique des mathématiques »

C'est 1970 et donc, notamment la réforme des mathématiques modernes et les problèmes auxquels elle a essayé de répondre, qui marquent le début de ce type de recherches, impulsées par un groupe de chercheurs dont G. Brousseau, qui a joué un rôle déterminant.

C'est le parti pris délibéré, revendiqué, de concevoir les recherches à partir d'une analyse préalable, première, des contenus mathématiques à enseigner qui marque une des différences essentielles avec les sciences de l'éducation d'alors. Dans les deux champs, on recherche des régularités mais le cœur de ces recherches, ce qui les organise est différent – transcendant ou non les contenus enseignés [5].

En didactique des mathématiques, nous cherchons finalement à articuler une réflexion sur les mathématiques à enseigner d'une part et leur enseignement effectif d'autre part, allant jusqu'aux classes et aux apprentissages

5 Il va de soi que nous ne nous privons pas d'emprunter des résultats aux sciences de l'éducation s'il y a lieu !

des élèves. Il s'agit de mieux comprendre ce qui se joue, en faisant intervenir les savoirs et leur organisation, l'enseignement proposé, les élèves. Comprendre aussi bien les différentes possibilités que les difficultés d'enseignement, précises ou générales, à tous les niveaux de la scolarité — liées aux objets mathématiques comme dans notre exemple, ou encore, par exemple, à l'intégration des TICE dans l'enseignement, mais toujours compte tenu de ce qui se passe ou peut se passer en classe.

Il faut souligner que nous admettons une double hypothèse, forte, dans nos travaux, qui n'est pas du tout adoptée par tous les mathématiciens ni même tous les enseignants : c'est que dans les phénomènes de transmission des connaissances mathématiques enseignées, il y a des régularités, qui peuvent être invisibles au quotidien, implicites, et, qui plus est, qu'il est intéressant de dégager.

Un développement comparable s'est fait, avec un décalage temporel, dans d'autres disciplines scolaires scientifiques, comme la physique, la technologie, la géographie. La didactique du français, quant à elle, a eu une histoire un peu compliquée, diversifiée, et reste marquée par des relations différentes entre les formateurs, les universitaires et l'institution. Le « Français langue étrangère » et les sports ont aussi contribué, à leur façon, au développement de recherches sur l'apprentissage de contenus donnés.

A l'étranger, plusieurs grands courants traversent les recherches en didactique des mathématiques – même si ce n'est pas le mot utilisé. Dans la mouvance anglo-saxonne notamment, se sont développés beaucoup de travaux liés à la psychologie des élèves et des enseignants. Les conceptions ont ainsi été largement étudiées. Les didacticiens italiens ont développé pour leur part des recherches très intéressantes sur des cohortes d'élèves. Il est impossible de rendre compte ici de la richesse des travaux – de nombreux « Handbook » (livres de synthèse) permettent de s'en faire une idée. Je me limite dans ce qui suit aux travaux menés en France et dans certains pays proches, Espagne, dans une certaine mesure Belgique et Suisse, voire même Canada.

3) Quelques spécificités des recherches en didactique des mathématiques

a) Une imbrication d'approches épistémologiques élémentaires, d'éléments sur les enseignements et de connaissances sur les apprentissages des élèves.

Dans notre exemple initial nous avons illustré brièvement le premier point et esquissé le troisième.

En fait les programmes scolaires délimitent les notions mathématiques à enseigner mais ne précisent ni à quoi elles servent ni toutes les relations entre elles, y compris d'une année sur l'autre : reconstituer ce « relief », mettre en perspective les notions et les problèmes qu'elles permettent d'aborder, réfléchir à leur disponibilité à un niveau scolaire donné, comprendre l'évolution sous-jacente à la progression des programmes, constitue ce que j'appelle une épistémologie élémentaire des contenus à enseigner. On pourrait parler d'une certaine « intelligence » de ces contenus, nécessaire aux recherches didactiques.

Je voudrais insister sur le fait que, pour mettre en évidence des éléments sur le savoir à enseigner, nous pouvons être amenés à relire des éléments d'histoire et/ou d'épistémologie des mathématiques. C'est à partir de ces études que nous arrivons à comprendre le développement des notions, avec tous ses méandres. Mais notre travail diffère fondamentalement de celui de l'historien ou de l'épistémologue : nous ne faisons pas avancer les réflexions sur le sujet, nous cherchons au contraire à tirer des travaux déjà faits [6] des éléments assez globaux qui peuvent nous aider. Ainsi notamment les problèmes mathématiques ou les projets des mathématiciens [7] à l'origine des avancées. Cela nous permet de suivre les formalismes successifs qui jalonnent cette histoire [8] dans des dialectiques complexes entre sens, techniques et signes. Cela nous renseigne aussi sur les difficultés qui se sont présentées dans l'histoire et même sur les erreurs résistantes, sur l'ordre dans lequel les différentes notions sont apparues, etc. Au mieux pouvons-nous poser des questions nouvelles à ces spécialistes…

Mais il ne s'agit en aucune manière de calquer les projets d'enseignement sur cette histoire reconstituée : cette intelligence des contenus ne nous suffit pas.

L'étude des programmes s'avère aussi indispensable à intégrer à ce type d'investigation, comme nous l'avons vu plus haut. Certains chercheurs détectent ainsi des « trous » dans les programmes, mettent à jour des ruptures ou pointent des éléments laissés à la responsabilité implicite des seuls élèves. Ceci ne manque pas de créer des différences entre ces derniers ! L'étude des manuels permet de compléter encore le paysage mathématique dans lequel sont plongés les élèves.

L'algèbre élémentaire est un bon exemple de ce type d'analyses (cf. Grugeon, 2000), avec en quatrième une rupture souvent méconnue avec l'arithmétique et en seconde des attentes des enseignants de lycée décalées par rapport à ce qui a été fait en collège. Les chercheurs ont montré l'intérêt pour l'enseignement de mettre en évidence le fait que l'algèbre élémentaire n'est pas une généralisation directe de l'arithmétique : les opérations à faire sur un même exercice par exemple ne s'effectuent pas dans le même ordre, le signe égal est utilisé différemment — les deux membres d'une égalité apportent souvent le même type d'information, alors qu'en arithmétique, c'est plutôt le résultat qui est à droite. Il y a surtout un nouveau formalisme qui n'emprunte que partiellement ce qui précède, d'ailleurs les élèves en sont conscients, et la variable « x » a des statuts divers, à repérer : nombre généralisé, inconnue, paramètre, « indéterminée », variable liée : quel que soit x….

Une certaine disponibilité de l'algèbre est aussi souvent attendue au lycée, alors que les élèves, eux, n'ont appris à résoudre les exercices que quand et comme on le leur demande. Ainsi en seconde dans un exercice de géométrie faisant intervenir le théorème de Thalès et un point variable, repéré par une variable x, on obtient une équation du type $x/(x + 3) = 1/3$ à résoudre. Les élèves s'arrêtent, ils n'ont pas l'habitude de prendre l'initiative de changer de cadre de travail et de résoudre l'équation du premier degré correspondante ; alors que si on leur demande de résoudre, séparément, cette équation, ils peuvent le faire, même si le mélange est toujours difficile.

6 De nombreux articles ont paru dans la revue Repères-Irem, dont ceux de R. Bkouche (site internet) par exemple, qui peuvent donner des idées au didacticien, qui les intègre dans un autre cadre de réflexion, faisant intervenir les apprentissages.

7 Projets de réorganisation par exemple.

8 Par exemple de savoir quand, pourquoi et comment le signe « racine carrée » a été introduit.

J'ai « rencontré » un autre petit exemple frappant de ce type de difficultés l'an dernier, sans même changement de cadre : dans ce cas ce sont les analyses de programmes et de manuels qui permettent de donner une interprétation. Ainsi, dans un exercice de géométrie, on donne un parallélogramme ABCD et on demande d'abord de construire l'intersection d'une demi-droite d'origine A et des côtés (DC) et (BC) du parallélogramme. Les élèves n'ont tellement pas l'habitude de prolonger eux-mêmes les segments en demi-droites sans qu'on le leur demande, ce que nos analyses laissent voir, qu'un certain nombre d'entre eux ont préféré tracer deux demi-droites d'origine A chacune rencontrant respectivement les segments [DC] et [BC]…

D'autres chercheurs ont distingué différents types de notions, à aborder de manière différente dans l'enseignement, selon leur degré de généralisation par rapport aux notions antérieures telles qu'elles figurent dans les programmes scolaires. Etudier la multiplication des décimaux après celle des entiers amène à étendre une notion, on peut s'appuyer sur un certain sens déjà introduit, élaborer des problèmes initiaux. En revanche introduire l'ordre sur les décimaux, ou l'algèbre élémentaire demande de prendre en compte l'existence d'une rupture : avec l'ordre sur les entiers ou avec l'arithmétique ; une trop grande continuité peut amener des erreurs ou masquer les nouveaux objets.

En ce qui concerne les enseignements et les apprentissages, il faut reconnaître l'apport des grandes théories de l'apprentissage, et particulièrement celles de Piaget et Vygotski, qui précisent des conditions favorables à l'acquisition des connaissances. Mais il nous reste à les spécifier, aux mathématiques, aux grands types de notions à enseigner, aux situations scolaires.

Du côté de l'enseignement, que ce soit pour élaborer des diagnostics ou concevoir des projets d'enseignement, les questions suivantes organisent notre travail, correspondant à l'expression de grandes variables, influençant les apprentissages, adoptées par beaucoup de didacticiens.

Comment sont introduites les notions lorsqu'elles apparaissent pour la première fois ? Et la sous-question, moins souvent posée : toutes les notions « méritent-elles » des introductions analogues, comme le donnent souvent à penser les manuels ?

Quels exercices sont proposés, y compris là encore dans les manuels — selon quels critères de choix ? A-t-on affaire à une progression entre exercices faciles et difficiles, permettant de « tout » voir ? Y a-t-il des manques ? Y a-t-il d'autres moyens de classer les exercices ?

Quelle est la nature du travail proposé aux élèves, en relation avec l'exposition des connaissances : quand et sur quoi cherchent-ils, sont-ils seuls, discutent-ils entre eux ? Quand les aider, et comment ? Quelle intelligence mathématique veut-on développer chez les élèves ? En un mot, comment les connaissances mathématiques des élèves, anciennes et/ou nouvelles, sont-elles mises en fonctionnement ? Soulignons que cela met en jeu à la fois des éléments sur les contenus mathématiques choisis et sur les déroulements organisés en classe. Cependant, l'accent n'est pas mis de la même façon sur tous ces éléments dans les différents cadres théoriques choisis – nous y reviendrons très brièvement plus loin et développerons un exemple de recherches.

b) L'irruption des enseignants

Dans ce champ de recherches la prise en compte des pratiques des enseignants est petit à petit devenue fondamentale. Elle s'est faite d'abord en relation avec leurs choix de contenus et de déroulement. Qui plus est, depuis quelques années, les conditions de travail des enseignants, les contraintes qu'ils subissent, ne sont plus considérés comme des « bruits » mais font bel et bien partie des variables à prendre en compte. Autrement dit, dans la mesure où un enseignant ne détermine pas ses choix pour sa classe seulement en relation avec ce qu'il a à faire apprendre, où il doit suivre les programmes, s'inscrire dans les horaires, tenir compte des attentes des parents, collègues, élèves, tenir le coup pendant de nombreuses années, tous ces éléments peuvent être retenus, de manière diverse il est vrai, dans nos recherches.

Pour donner un exemple, les recherches sur l'enseignement de racine carrée ont montré des diversités – celles-ci sont souvent liées soit à l'expérience des enseignants car il est difficile de changer ses habitudes, soit à leur représentation de leurs élèves. Les élèves tenus pour faibles ne seront pas « embêtés » avec des notions trop théoriques… Cela nous questionne !

c) Les expériences

Ce champ de recherches ne peut se passer d'une partie expérimentale : il est indispensable de vérifier ce qui a été prévu, d'en tester les limites, …

En effet à l'origine de nos travaux, on l'a dit, il y a plusieurs « emprunts », nous croisons des dimensions épistémologiques, cognitives, scolaires, voire ergonomiques, liés au travail de l'enseignant, dans un contexte où les acteurs sont toujours variables : il y a nécessairement des impondérables, des recompositions qui ne peuvent être prévues.

Ceci implique de se donner des moyens de recueillir des données, de les analyser et d'interpréter les résultats. On retrouve le lien avec les théories déjà évoquées : il est nécessaire que les interprétations aient une certaine légitimité. Celle-ci est en partie assurée, garantie par une inscription précisée dans un cadrage théorique qui, seul, autorise la généralisation et la décontextualisation inhérentes à toute interprétation.

d) Questions de méthodologies

On entre ici dans un domaine qui dépasse largement le cadre de cet article. Cependant, je voudrais juste en dire un mot, car ces questions sont majeures pour les chercheurs. Même s'il n'y a pas de preuves de nos résultats au sens habituel en mathématiques, les régularités que nous recherchons, qui « remplacent » les théorèmes en mathématiques ou les lois en physique, s'obtiennent soit à partir de convergences de résultats partiels, soit parce que des prévisions se vérifient ou que des explications peuvent être données, notamment au sein d'un modèle, soit par des constats quantitatifs.

Quoi qu'il en soit, nous traitons souvent des données diverses, recueillies dans des classes ordinaires ou au cours d'expérimentations, dont des vidéos tournées en classe et transcrites, des productions d'élèves, des entretiens, mais aussi des programmes scolaires, des analyses de savoirs mathématiques, ou encore des données liées aux établissement scolaires. Des méthodologies strictes règlent ainsi le travail de recherche, établies à partir de différents cadrages théoriques, qui servent à préciser et à expliciter les choix et découpages que nous sommes obligés de faire pour recueillir et traiter les données. Quelles variables nous autorisons-nous à retenir ou à négliger ? Par exemple nous ne retenons pas en général les facteurs affectifs dans nos analyses. Et ne pas tenir compte explicitement des facteurs affectifs est légitime, cohérent, car, dans nos cadres théoriques, nous travaillons sur des éléments cognitifs, indépendants de la variabilité affective des acteurs (qui est traitée comme un paramètre).

4) Cadrages théoriques : la théorie de l'activité, parmi d'autres.

Je ne peux pas entrer dans les détails des différentes démarches suivies par les chercheurs en didactique mais je voudrais signaler quelques grandes lignes de ce que je connais le mieux, puisque les travaux que je mène s'inscrivent dedans – la théorie de l'activité, même si je dis, avant, un mot des autres théories utilisées fréquemment.

De manière très générale, ce qui différencie les différentes approches, c'est la nature de leur inscription dans des théories plus larges (théories anthropologiques, théories de l'apprentissage) et le découpage correspondant adopté dans les analyses qui sont faites ainsi que le fait d'élaborer ou non un modèle de référence qui organise systématiquement les recherches.

Quoi qu'il en soit la quête du sens du savoir mathématique à enseigner, du pourquoi des notions (à quoi elles « servent ») et des manières de les utiliser est première et organise les travaux.

a) Deux théories classiques en Didactique des Mathématiques : la Théorie des Situations Didactiques et la Théorie Anthropologique du Didactique

Ces deux théories majeures en didactique des mathématiques en France ont été décrites dans d'autres articles — comme, par exemple, ceux de Kuzniak, 2005, Brouseau, 2005, Matheron Y. et Noirfalise R., 2005, et Noirfalise, 2007.

De fait je n'en dirai que quelques mots car il est impossible de les résumer brièvement sans les dénaturer.

La théorie des Situations Didactiques (TSD) a été élaborée par G. Brousseau, qui a travaillé d'abord et essentiellement à l'école élémentaire et elle est souvent présentée aux futurs professeurs d'école.

G. Brousseau, qui a largement contribué à l'émergence du champ scientifique, a élaboré un modèle d'apprentissage, présenté dans de nombreux ouvrages et articles. Son travail a évolué, s'est enrichi mais on peut en retenir quelques grands traits, présents dès le début. Il est cependant impossible d'en rendre compte brièvement !

Disons que la notion de situation fondamentale y est au cœur, qui modélise un procédé didactique forçant en quelque sorte les élèves à utiliser les mathématiques à acquérir. Le problème correspondant est évidemment élaboré à partir du sens profond de la notion, tel que les analyses préalables permettent de le dégager. Les élèves n'ont pas d'autres recours que d'utiliser la seule connaissance mathématique qui permet de le résoudre, qui est la connaissance visée. A condition toutefois qu'ils jouent le jeu proposé ! De plus c'est au sein même du problème qu'ils trouvent des éléments leur permettant de savoir si leur démarche est correcte, ils n'attendent pas l'avis de l'enseignant (cf. l'exemple du puzzle, Brousseau, 2005).

Du point de vue des déroulements, G. Brousseau a notamment dégagé l'intérêt de la succession des phases d'action (résolution brute), de formulation (explicitation) et de validation (justification). Pour analyser les classes ordinaires, il a introduit la notion de contrat didactique, qui modélise les attentes, éventuellement implicites du professeur vis-à-vis des élèves et réciproquement. Il s'agit évidemment d'éviter que ce soit par effet de contrat que les élèves choisissent une procédure au lieu d'être guidés par le sens…

Les analyses ultérieures ont raffiné le modèle, en introduisant notamment le milieu, constitué des ressources présentes pendant le travail des élèves et qui s'avère ou non adapté. De même ont été introduits des microcontrats, permettant à l'enseignant des régulations fines.

On peut évoquer l'idée d'un « potentiel » théorique d'apprentissage des situations, prévisible grâce au modèle.

Du côté des enseignants, dans les recherches s'inspirant de la TSD, Margolinas, 1995 puis d'autres auteurs après elle ont présenté une analyse des connaissances du professeur et de leur jeu en classe organisé en niveaux structurant le milieu. Pour elle, travailler (pour un professeur), c'est « mettre en jeu » des connaissances de différents niveaux, y compris sur les mathématiques et sur les élèves. Etudier le travail, c'est mettre en évidence ces connaissances et leurs interactions entre ces niveaux et ensuite réfléchir aux moyens de faire acquérir ces connaissances. Beaucoup de ces connaissances concernent la manière qu'a le professeur de concevoir les contenus, au sein d'un programme, d'élaborer les exercices à proposer et d'interpréter les connaissances des élèves. Ce type d'investigation assez globale ne nous semble pas prendre en compte la chronologie des séances ni surtout leur déroulement précis qui deviennent ainsi relativement secondaires. Les modalités de mises en actes, par exemple tout ce qui concerne la façon de reprendre une idée d'élève, les différentes aides, ne sont ainsi pas détaillées, voire n'ont pas trop de place.

Une autre approche, tout aussi impossible à résumer brièvement a été introduite par Chevallard (1992, 1999) et s'est aussi largement développée. Cette théorie anthropologique du didactique (TAD),) est présentée dans certains IUFM aux PLC2. Elle spécifie au didactique des éléments inspirés par une vision anthropologique de l'homme dans le monde. Elle se caractérise notamment, en terme de praxéologies mathématiques : le modèle met à disposition des chercheurs des moyens systématiques, voire systémiques, pour établir une description exhaustive de l'offre mathématique d'une institution concernant une notion ou plusieurs notions. Cela s'adapte aux programmes, manuels, ou même savoirs mathématiques plus ou moins savants. Les unités d'analyse sont ainsi les types de tâches, chaque type de tâche est associée à une (des) manière(s) de la résoudre (technique) et à des possibilités de justification (présentes ou non dans ce qui est analysé) – appelée aussi « technologie », inclus dans une théorie.

Du côté des déroulements, un découpage systématique est proposé, de la première rencontre à l'exposition des connaissances en passant par le travail de la technique et de la technologie, indépendamment des classes, des enseignants et des notions (Chevallard, 1999). Dans ces recherches, par « essence », l'importance des déroulements effectifs et les spécificités des sujets singuliers ne sont pas premiers.

Du côté des enseignants, c'est l'exhaustivité des tâches à proposer, assorties des techniques et technologies qui les accompagnent qui systématiquement organisent un certain nombre d'analyses, de manière générique. Les questions de temps passé sur une notion, ou encore celle du nombre de tâches choisies, de la manière de concilier ancien/nouveau, ne sont souvent pas abordées directement. En revanche les différents moments de l'étude proposés aux élèves sont soigneusement analysés, avec notamment la détection précise de procédés didactiques comme l'ostention, qui permet aux enseignants de « montrer » aux élèves le savoir au lieu de le faire trouver (pour dire vite, cf. Bloch, site internet). La répartition du travail entre enseignants et élèves en fait partie, tout comme l'avancée du « temps didactique », scandé par les déclarations explicites de ce qui a été « fait », ou « vu ».

Dans ces modèles, soulignons qu'il n'y a pas vraiment de place pour des sujets singuliers, ni pour des différences – même entre notions, même si leur analyse y est toujours centrale, première (travail sur le sens). La question des différences selon les classes ne se pose pas non plus directement. On peut parler de didactique « stricto sensu », selon une expression de J. Rogalski, où les sujets ont un rôle générique, voire épistémique et sont, de ce fait, tous équivalents, ou encore d'une science des procédés didactiques – en théorie de l'activité on s'intéresse au contraire aussi aux processus didactiques individuels.

b) la Théorie de l'Activité

A la suite de G. Vergnaud (1990, 2002), je m'inscris dans un courant de recherches en didactique des mathématiques qui s'inspire de la Théorie de l'activité : l'ambition est ici de donner toute leur place non seulement aux contenus et à la situation scolaire mais encore aux sujets singuliers.

Nos analyses visent ainsi à aborder les questionnements décrits précédemment en reconstituant les activités mathématiques des élèves, considérées comme un intermédiaire de qualité, légitime, entre l'enseignement et l'apprentissage [9]. Du même coup nous étudions les pratiques et les activités des enseignants, car ce sont elles qui nous donnent accès aux activités des élèves, en tout cas en classe. Dans cette démarche, les activités désignent quelque chose d'inaccessible : ce qui est pensé, dit, pas dit, fait, pas fait par l'acteur. Mais on peut s'en approcher, plus exactement nous étudions les activités possibles des élèves, celles qu'il est bien possible qu'un certain nombre d'entre eux aient faites.

Pour étudier ces activités possibles des élèves nous croisons les tâches réellement proposées (les énoncés) et les déroulements organisés. En effet, ce sont les mises en fonctionnement des connaissances mathématiques induites par les activités des élèves qui contribuent aux apprentissages. Pour mieux les caractériser, nous cherchons, par exemple, si les énoncés proposés amènent les élèves à utiliser des connaissances non indiquées dans le contexte du travail, ou à introduire des intermédiaires et des étapes, ou encore à mélanger différents domaines, à travailler

9 Même si il manque des informations tirées d'autres dimensions.

dans différents cadres (Douady, 1987) ou différents registres (Duval, 2002) : autant de « variables » aux mains des enseignants, autant de choix d'adaptations des connaissances qui n'amènent pas les mêmes apprentissages… Mais nous devons compléter par tout ce qui peut se passer en classe, en repérant tout spécialement ce qui peut avoir une influence sur le travail effectif des élèves, modifier les mises en fonctionnement de leurs connaissances.

Les activités des élèves sont de plus à analyser dans une double temporalité [10] : celle du temps de la séance de classe, le temps des apports d'informations et d'explications, des résolutions d'exercices, du travail en classe, et celle du temps long, du travail personnel, des phénomènes d'assimilation, de mémorisation, de mises en place d'algorithmes et d'automatismes…

Ce qui complique encore les analyses, c'est le fait que les activités des élèves dépendent des pratiques des enseignants, lesquelles sont à intégrer elles aussi dans diverses temporalités. Ces pratiques d'enseignants sont prédéterminées en partie par des contraintes, et ne sont pas toutes en relation directes avec les apprentissages des élèves. Il y a des effets rétroactifs liés aux expériences précédentes et à la représentation de la classe actuelle, il y a l'anticipation des évaluations, qui peuvent conditionner certains choix. Sans parler des contraintes liées aux programmes et aux horaires, de plus en plus réduits en mathématiques. Sans parler des attentes de l'institution, des collègues, des parents quelquefois…

Du côté des enseignants les analyses précédentes permettant de mettre en évidence des invariants et des relations entre les pratiques et les apprentissages.

Par exemple, on a pu constater que ce sont les choix intermédiaires des enseignants, locaux, c'est-à-dire liés à la conduite de la classe, qui varient le plus entre les enseignants ; dans le même temps ce sont ces choix locaux, notamment en termes de choix de déroulements qui semblent le plus stables pour chaque enseignant expérimenté, par delà les classes et les contenus, pour un même établissement (recherches les plus récentes, à partir d'analyses de plusieurs séances d'un même enseignant). Au contraire, l'intervention des contraintes, communes à tout un groupe d'enseignant, liées au métier, conduit à comprendre pourquoi leurs pratiques sont analogues à certains égards, au niveau global.

Autre exemple : les répétitions de tâches proposées aux élèves en classe sont en relation avec la réussite de tâches analogues au contrôle mais pourraient accentuer la difficulté d'aborder d'autres tâches, notamment par un effet de contrat « aggravé ». Cependant il n'est pas évident que le travail sur des tâches plus complexes « profite » à tous les élèves de la même façon, même si un travail autonome et long est organisé.

Enfin cette démarche permet d'aborder l'intégration des TIC dans l'enseignement (cf. Vandebrouck).

Des nouvelles questions se présentent dans cette perspective, liées notamment à la notion de Zone Proximale de Développement des connaissances des élèves et à la manière d'en tenir compte dans l'enseignement. Cette notion a été introduite par Vygotski et traduit l'hypothèse suivante : les élèves dis-

10 Ce postulat est en relation avec les temporalités des régulations dans la théorie de l'activité.

poseraient à tout moment de connaissances pas encore acquises mais très proches de l'être ; une des manières de transformer ces pré connaissances en connaissances serait d'y être aidé par un enseignant (ou un pair), ce dernier montrant son utilisation de la connaissance en question.

L'enjeu est ainsi celui de la transformation des actions en activités, des connaissances fragiles, voire transitoires en connaissances. On peut penser à tout ce qui concerne l'installation et la consolidation des dialectiques nécessaires entre sens et techniques, entre mémorisation et raisonnements.

L'enseignant peut jouer sur les combinaisons de plusieurs variables, notamment celles dont on a déjà parlé : les tâches proposées (nature et quantité) en relation avec la nature des contenus visés et la nature du travail demandé aux élèves. Mais on peut aussi se demander, plus finement, s'il n'y a pas des régularités à trouver du côté des effets qui tiendraient à des interventions précises des enseignants. Est-ce que la qualité des exemples et contre-exemples, particuliers ou génériques, les commentaires (dont les analogies et les métaphores), la nature des évaluations, bilans et aides, plus ou moins décontextualisés, à différents moments du travail des élèves, plus ou moins adaptés au travail en cours peuvent jouer de manière non aléatoire ? Par exemple faire produire des exemples aux élèves n'engendre sans doute pas les mêmes activités qu'en écouter… donner individuellement un contre-exemple peut n'être pas utile au même moment pour chaque élève, et le contre-exemple peut devoir être modifié. Le travail en groupes favorise vraisemblablement la production d'exemples ou de commentaires proches des connaissances actuelles des élèves. Les aides constructives des enseignants, étudiées par M. Pariès s'inscrivent également dans ce paysage.

Certaines études anglo-saxonnes qui mettent en avant un enseignement « centré sur l'élève » exploitent d'une certaine manière ce type de dialectiques, dans la mesure où non seulement les tâches sont conçues pour faire travailler les élèves dans une certaine autonomie (cf. paradigme piagétien) mais encore les déroulements organisés par les enseignants sont pensés pour « coller » au plus près aux élèves : ceci peut s'interpréter en termes vygotskiens en évoquant un travail qui se placerait autant que possible dans cette Zone Proximale de Développement des connaissances des élèves que nous venons d'évoquer.

Enfin, il n'est pas exclu qu'une problématique analogue puisse être construite pour les pratiques, entre activités constructives et productives, si toutefois on peut transposer à ce domaine du développement l'idée de pré connaissances proches d'être acquises, ce qui est tentant… Notre objectif serait d'étudier ce qui peut contribuer à installer, voire accélérer, les transformations d'actions du professeur en activités, voire en schèmes, que ce soit en formation initiale ou non. Là encore le formateur peut jouer sur la combinaison de plusieurs variables, dont la nature des tâches proposées, le caractère plus ou moins collectif du travail organisé sur les pratiques, les commentaires et bilans à en tirer, le moment où interviennent les commentaires et aides et qui les fait.

5) Et alors ? Didactique, enseignants et formations…

Finalement… que produisent ces recherches ? Qu'en faire ?

Globalement j'évoquerai d'abord une meilleure compréhension des apprentissages et non-apprentissages de contenus mathématiques, une meilleure appréhension de la complexité (cf. Lattuati, 1995). Elles permettent de dévoiler en partie ces réseaux de phénomènes qui se jouent en classe de mathématiques, de mettre au jour des choix, des alternatives, de nouveaux possibles... Elles permettent de réfléchir aux formations, nous y reviendrons.

Même si quelques propositions pour enseigner autrement, toutes proportions gardées, peuvent apparaître, ces recherches n'ont pas pour objectif de donner des « recettes » d'enseignement.

De fait les enseignants peuvent être intéressés par ces recherches mais il n'y a pas une coïncidence parfaite avec leurs préoccupations. L'échelle du temps joue beaucoup : souvent les programmes avancent plus vite que les recherches ! De plus les recherches portent sur des domaines précis, limités, leur portée n'est pas connue pas plus que leurs limites. D'ailleurs, comme des recherches en didactique [11] l'ont déjà montré, les enseignants s'emparent assez peu, même en formation initiale [12] des travaux didactiques, c'est difficile en tout cas. Sont en cause notamment :

- l'échelle des recherches – trop peu de séances concernées sur une même année scolaire,
- le travail de mise au point de l'enseignant avant les séances, souvent important, avec des décalages éventuels par rapport aux programmes et beaucoup d'implicites à décoder (sur l'esprit et non la lettre des séances),
- le changement de contrat trop important par rapport aux habitudes, qui nécessite d'être mis en place pendant un certain temps,
- le temps « perdu » pendant les séances (il y a souvent un important travail autonome des élèves),
- la tension nécessaire à la gestion des séances – les élèves peuvent résister, ils peuvent avoir du mal à passer d'un travail autonome aux corrections,
- la difficulté de savoir si l'essentiel de ce qui était visé par le concepteur est « passé »,
- la difficulté d'évaluer les résultats des séances sur les élèves…

Alors est-ce qu'on peut utiliser ces recherches en formation ?

Trois idées me semblent importantes.

La première est une conséquence directe de nos résultats sur les pratiques, et concerne les qualités des formations et tout particulièrement les formations continues. Très schématiquement [13] nous suggérons de former en travaillant à partir des pratiques, en en respectant la complexité et les différentes cohérences individuelles. Nous pensons que le travail collectif a un rôle essentiel, qu'une certaine durée des formations est nécessaire, notamment pour tenir compte de la stabilité et de la cohérence des pratiques en formation continue et qu'il est indispensable d'aborder les contraintes et les marges de manœuvre de l'enseignant en classe, voire les contradictions même en formation initiale. Enfin nous donnons une grande importance aux modalités de formation qui doivent être élaborées

11 Bolon, 1996, Roditi, 2005, Vergnes, 2001.
12 Masselot, 2000.

13 Ces idées sont développées dans Robert, Grugeon et Roditi (2007).

soigneusement dans chaque cas. Cela devient un véritable outil aux mains des formateurs. Ces modalités peuvent être travaillées en fonction de variables : diversités des terrains et des pratiques, robustesses des situations, types de situations - vidéo ou non par exemple, complémentarités des types de formation…

La deuxième idée concerne les formateurs : pour nous, le formateur ne peut pas seulement être un « super enseignant », autrement dit son expérience singulière n'est pas toujours un bagage suffisant.

Par exemple, (cf. Robert, 2005), le formateur est amené à analyser diverses pratiques en relation avec les activités possibles des élèves, et cela sans se placer lui-même comme une référence pour tous. Il doit pouvoir repérer des éléments à généraliser dans une pratique singulière, tout en promouvant les adaptations nécessaires. Il peut avoir besoin de « mots pour le dire » — contribuant à outiller sa propre expérience. Il doit avoir accès aux ressources disponibles, les critiquer et les exploiter dans des délais temporels raisonnables. En particulier dans cette perspective, c'est le formateur qui se charge d'une partie de l'adaptation éventuelle des éléments de recherches aux pratiques des enseignants — c'est ce que nous appelons la double transposition (transposition partagée par le chercheur vers le formateur et le formateur en direction des formés).

Ce point de vue n'est pas partagé par tous.

La troisième idée concerne la réflexion sur certains choix en formation initiale dans les IUFM. Cela concerne notamment la hiérarchie éventuelle à introduire entre les diverses connaissances qui peuvent être en jeu. Le savoir professionnel doit-il porter essentiellement sur des outils à maîtriser pour aborder les mathématiques à enseigner ? S'agit-il d'armer les enseignants débutants en leur apprenant d'abord à appréhender les contenus mathématiques à enseigner ?

Pour ma part, je pense que les questions de déroulement effectif des séances sont aussi importantes que celles des savoirs, dès la formation initiale, mais à condition de ne pas disjoindre contenus, gestion prévue et gestion effective. Ainsi, non seulement la gestion effective de la classe n'est pas secondaire à mes yeux, mais surtout elle n'est pas à concevoir de manière indépendante des contenus. Le plus important serait ainsi le travail de l'enseignant sur l'adéquation entre le choix des tâches à proposer aux élèves et celui des déroulements (le travail à partir de vidéos tournées en classe est particulièrement bien adapté à ce type de formation).

Il s'agit d'éviter que l'enseignant choisisse un (vrai) bon problème pour aborder une notion, mais qu'il ne respecte pas les différentes phases de travail des élèves qui leur permettent de profiter de ce problème. Et réciproquement, quels que soient les choix de gestion, si le travail sur les choix mathématiques n'y est pas, l'enseignement peut ne pas engendrer « suffisamment » d'apprentissages pour tous les élèves.

Nous avons ainsi proposé des outils permettant de mettre du relief sur les mathématiques enseignées (types de notions, niveaux de conceptualisation, trame, adaptations des connaissances — cf. Robert, 1998,2007b) et sur les déroulements possibles en classe, compte tenu des contraintes de toutes sortes. C'est l'ancrage dans le travail réel des enseignants, en relation avec le travail possible des élèves en classe (leurs activités possibles), que nous essayons ainsi d'aborder d'emblée, avec toute la complexité de ce travail et les allers-retours entre travail réel, travail possible et travail souhaité.

6) Le cas de l'enseignement dans les classes difficiles

On dirait que j'ai l'esprit de contradiction ! Après avoir défendu les recherches centrées sur un contenu, je vais terminer en reprenant un certain nombre de recherches qui justement ne sont pas centrées sur un contenu. Mais attendez la suite…

a) Des diagnostics côté « élèves » assez nombreux mais encore insuffisants

Ces diagnostics ont été faits en primaire, au collège et quelquefois en lycée, de manière disciplinaire et non disciplinaire selon les cas.

Les résultats doivent être nuancés selon les niveaux, notamment primaire et secondaire (cf. différences dans Bautier et Rochex, 1998, entre leur livre « l'expérience scolaire des nouveaux lycéens » et leur livre avec Charlot « Ecole et savoirs dans les banlieues et ailleurs»).

Ces diagnostics sont cependant encore insuffisants et le réseau Reseida [14] par exemple essaie d'avancer davantage, à la fois en regardant plus précisément les relations entre pratiques et apprentissages, en distinguant les différentes disciplines et en s'intéressant aux effets différenciateurs dans une même classe, y compris défavorisée. Car il y a des différences !

14 Groupement de chercheurs issus de plusieurs champs, sociologues, didacticiens, psycho-linguistes, et travaillant de concert sur ces problèmes.

L'idée de *cumul de facteurs différenciateurs* est très présente, interdisant de pointer séparément tel ou tel facteur comme « responsable » de tel ou tel effet chez les élèves.

De plus, on est amené à penser que si on arrive à ce que les élèves de classes défavorisées ne décrochent pas (suivent, même avec des résultats faibles), on a déjà beaucoup gagné — c'est une idée que des enseignants débutants n'ont pas au début…

On peut dégager des constantes dans les résultats des recherches (qui ne sont pas statistiques, pas encore !), qui sont très générales et ne concernent pas tous les élèves, ou à des degrés divers.

Notamment, certains élèves s'installent, à l'école, dans une « posture » éloignée de la posture intellectuelle attendue, avec un rapport au savoir « limité à l'action » par exemple ; sans que l'un soit réductible à l'autre, ils effectuent souvent les tâches proposées sans les associer à une activité (mathématique en classe de math) ni à un apprentissage, ou ils accordent à la tâche un sens qui n'est pas celui que vise l'enseignant. Des malentendus ou des décalages entre ce qui est demandé par l'enseignant et l'activité que semblent faire les élèves sont ainsi pointés, sans qu'on puisse toujours ni les détecter complètement, ni être sûr qu'à plus long terme quelque chose ne s'installe pas quand même chez des élèves, en relation avec les interventions du professeur (soit en termes d'automatismes, soit si leur action permet que ces interventions tombent, de temps en temps, dans leur Zone Proximale de Développement…).

Des interrogations sur l'influence des pratiques langagières de l'enseignant en relation avec les « registres » langagiers et cognitifs utilisés par les élèves se posent aussi, du même ordre, peut-être différentes selon les champs disciplinaires (cf. Bautier, 2006).

Nous pensons qu'il y a lieu de préciser ces questions selon les niveaux scolaires et les champs disciplinaires. Nous y voilà !

b) Du côté des pratiques des enseignants

Les pratiques des enseignants, en classe, sont questionnées par les sociologues qui estiment que le travail spécifique nécessaire pour que les élèves en difficulté ne décrochent pas voire apprennent, n'est pas toujours fait.

En particulier, les facteurs cités précédemment peuvent être aggravés par l'adoption, non critique, de formes scolaires introduites ces dernières années (ateliers en maternelle, pédagogies différenciées), et de certains programmes « ambitieux » (secondarisation des objets d'enseignement dès le primaire) ; cela peut renforcer la nécessité d'un travail enseignant spécifique.

Cependant, et nous retrouvons l'idée de cumul déjà évoqué, et sans que ces résultats aient été précisément formalisés, on peut penser que tout ce passe comme si des hantises contradictoires habitaient les enseignants du secondaire engagés dans la bataille des ZEP, exerçant dans ces classes difficiles : hantise de la peur des élèves devant la tâche et réciproquement hantise de réduire les tâches proposées trop ou trop souvent (notamment suite à la diffusion des travaux sociologiques évoqués) mais aussi hantise de l'impasse, de l'arrêt du temps didactique, voire du « décrochement » des élèves. Les expériences précédentes des enseignants (individuelles et collectives) les amènent, y compris dans leurs prévisions, à se méfier des connaissances des élèves, à douter de leur capacité de capitalisation et d'adaptation et à redouter tout ce qui pourrait faire apparaître des comportements asociaux.

Des résultats analogues et plus généraux ont été pointés dans le premier degré où ML Peltier, D. Butlen et al. (2002) ont dégagé des couples de logiques contradictoires qui « habitent » à des degrés divers les PE exerçant en ZEP : logique de socialisation/logique des apprentissages, logique de la réussite immédiate/logique de l'apprentissage, logique de remédiation/logique de l'apprentissage, temps de la classe/temps de l'apprentissage, individuel/public/collectif, projet/apprentissage.

La complexité des pratiques est ainsi bien mise en évidence et l'impossibilité d'aborder la question de manière simple me semble claire.

c) Mais…

Un deuxième niveau d'investigations et d'interrogations me semble indispensable, celui du travail du didacticien sur les contenus mathématiques, qui commencerait, d'une certaine manière, là où le travail du sociologue s'arrête...

Ainsi, au collège, la conviction que partagent beaucoup d'enseignants de devoir rassurer ces élèves, les encourager pour (avant de) les engager dans un apprentissage amènerait souvent à faciliter les tâches proposées : ce peut être par des découpages en sous tâches qui deviennent de ce fait plus simples, ce peut être en laissant plus de temps, en répétant, voire en encourageant constamment et en multipliant les enrôlements. Mais comment éviter de découper en sous tâches trop simples ? Comment gérer le temps de recherche, les corrections ? Comment enrôler les élèves et les maintenir dans l'activité ? Comment éviter les débordements ? Ceci ne relève pas de la généralité mais doit être modulé selon les disciplines, les tâches, etc. Quelles difficultés sont ainsi levées, lesquelles subsistent ? Seul un travail spécifique, sur les mathématiques, peut dégager des éléments de réponse, indispensables, à mon avis.

De même certains enseignants cherchent à motiver les élèves en privilégiant des situations qui font sens pour eux : mais ce sens est lié à leur quotidien et non à un sens « scientifique » et peut aboutir à des confusions dommageables. Dans sa thèse B. Ngono montre précisément comment un travail à partir de jeux mathématiques peut ne servir strictement à rien quant aux acquisitions de connaissances !

On peut encore aller plus loin. Lorsque les élèves agissent, tracent une figure, calculent, …, ce n'est pas pour autant qu'automatiquement ils utilisent des connaissances ou en acquièrent de nouvelles. Les travaux des sociologues pourraient être spécifiés en termes de difficultés encore plus grandes en ZEP qu'ailleurs de la transformation de l'action des élèves en activité, dans la mesure où l'engagement dans l'action n'est déjà pas garanti. Les enseignants développent donc d'abord des pratiques permettant au moins d'engager et de maintenir ces élèves dans l'action, dépassant les seuls encouragements. Mais ces stratégies d'engagement dans l'action, qui sont indispensables, peuvent être particulières et rendent peut-être plus difficile l'accès des élèves aux activités conduisant à la construction de leurs connaissances. Ainsi la pédagogie différenciée qui prive des bilans collectifs décontextualisés mais permet un engagement minimal de beaucoup d'élèves ; le choix volontaire et systématique d'habillages concrets, qui ne permettent pas de distinguer le registre mathématique du registre familier sous prétexte de motivation, peuvent (en effet) brouiller l'objectif final des exercices proposés.

Favoriser la construction des connaissances en ZEP nécessite-t-il dans ces conditions des pratiques spécifiques ou la majoration de certaines activités habituelles ? Nous prétendons que c'est là que commence un travail de didacticien, y compris de recherches !

Certains didacticiens ont déjà expérimenté positivement l'introduction d'intermédiaires comme la production de bilans collectifs (cf. Butlen, 2007), qui ne réduisent cependant pas les tâches. Mais ils ont montré les limites de ce type d'enseignement (aux marges). Il y a encore là tout un travail de recherches didactiques spécifique aux mathématiques pour déblayer les inconnues importantes dont, encore une fois, on ne peut pas faire l'économie !

Alors, je n'ai pas tant que ça l'esprit de contradiction…

En conclusion, je voudrais revenir sur deux points qui me paraissent essentiels.

Le premier tient aux ressources que la didactique des mathématiques est en mesure de fournir aux enseignants. Il a déjà été dit que tout ce que les didacticiens produisent n'est pas susceptible d'intéresser les enseignants et, que, même si une recherche s'avère pertinente, il peut être nécessaire de « transposer » certains résultats, de les adapter pour que des enseignants puissent en tirer profit : les travaux publiés ont souvent une certaine portée mais aussi certaines limites, pas toujours évidentes. Ces adaptations, à différentes classes par exemple, ou à différents enseignants, nous semblent être en grande partie aux mains des formateurs, dont, encore une fois, une des missions indispensables est précisément le travail de réception et d'adoption critique des ressources. C'est un des grands intérêts de revues comme Repères IREM de pouvoir diffuser à la fois des recherches, des travaux intermédiaires entre ces recherches et l'exercice du métier d'enseignant, des investigations historiques, ou encore des réflexions et des expériences, témoignages d'innovations des collègues, qui peuvent à leur tour être lues « autrement » par les chercheurs.

Le deuxième point tient à l'importance de s'appuyer sur de l'expérimental collectif dans la diffusion des travaux (d'ailleurs beaucoup plus développé que chez nous dans certains pays comme le Japon). Que ce soit pendant des formations ou dans un établissement donné, il me semble qu'il est beaucoup plus envisageable d'essayer quelque chose collectivement qu'individuellement. Cela permet d'en discuter, d'en éclaircir à la fois les tenants et les aboutissants et de compléter ce qui manque, quitte à modifier ensuite ces choix, de comparer les différents déroulements sans mettre en cause les personnes, voire de dégager des régularités, et, qui sait, de publier un article collectif dans Repères IREM… Ca ne vous rappelle rien ?

Bibliographie

Artigue M (1990) Ingénierie didactique, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol 9/3, 281-308

Assude, T. (1989), Racines carrées : conceptions et mise en situations d élèves de $4^{ème}$ et $3^{ème}$, *Petit x,* 20.

Assude T. (1996) Un phénomène d'arrêt de la transposition didactique : un exemple avec l'objet «racine carrée» *Bulletin de l'APMEP*, 403, 135-143.

Bautier, E. Rochex J.Y. (1998) *L'expérience scolaire des nouveaux lycéens, démocratisation ou massification*, Armand Colin.

Bautier E. (2006) Le rôle des pratiques des maîtres dans les difficultés scolaires des élèves : une analyse de pratiques intégrant la dimension des difficultés socialement différenciées, *Recherche et Formation*, 51, 105-118

Bessot A., (1993), Une étude du contrat didactique à propos de racine carrée, *Petit x,* 36.

Bolon J. (1996) *Comment les enseignants tirent-ils parti des recherches faites en didactique ?* Thèse de doctorat, Université Paris 7, Paris.

Bronner A., (1997), Les rapports d'enseignants de $3^{ème}$ et de 2^{nde} aux objets « nombre réel » et « racine carrée », *Recherches en didactique des mathématiques* vol 17/3, 55-80.

Brousseau G. (1998) *Théorie des situations didactiques*, La pensée sauvage.

Brousseau (2005) Recherche en éducation mathématique, *Bulletin de* *l'APMEP,* 457, 213-225

Butlen D. (2007) *Le calcul mental, entre sens et technique*, Presses Universitaires de Besançon

Butlen D., Peltier M.L., Pezard M (2002) Nommés en REP, comment fontils ? Pratiques de professeurs d'école enseignant les mathématiques en REP : contradiction et cohérence, *Revue française de Pédagogie* 140, 41-52

Charlot B., Bautier E., Rochex J.Y. (1992) *Ecole et savoir dans les banlieues et ailleurs*, Armand Colin

Chevallard Y. (1985) *La transposition didactique*, La pensée sauvage, Grenoble.

Chevallard, Y. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées pour une approche anthropologique, *Recherches en didactique des mathématiques,* vol 12/1, 73-112

Chevallard Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol 19/2, pp.221-265.

Chevallard Y., (2004), La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire : transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire, *Actes de la 3ème université d'été Animath,* Saint Flour(Cantal)

Cissé F. (2006) Un dossier sur racine carrée à l'usage des formateurs (collège/lycée), *Document pour la formation des enseignants*, Cahier bleu n°8, IREM, Université Paris 7.

Comiti C., Grenier D., Margolinas C. (1995) Niveaux de connaissances en jeu lors d'interactions en situation de classe et modélisation de phénomènes didactiques, in *Différents types de savoirs et leur articulation*, La Pensée sauvage

Douady R. (1987) Jeux de cadres et dialectique outil/objet, Recherches en didactique des mathématiques vol 7/2, .5-32.

Douady R. (1994) Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir, *Repères IREM*, 15, 37-61.

Duval R. (2002) Comment décrire et analyser l'activité mathématique ? Cadres et registres, in *Actes de la journée en hommage à Régine Douady,* IREM, Université Paris 7, 83-105

Grugeon B (2000) L'algèbre au lycée et au collège. Une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire : conception, exploitation et perspectives. 5-39 ; in Grugeon, Guichard, Capponi ,Janvier, Delgoulet Eds, L'algèbre au lycée et au collège. *Actes des journées de formation de formateurs.* Boisseron, IREM de Montpellier

Houdement C. (2007) A la recherche d'une cohérence entre géométrie de l'école et géométrie du collège, *Repères IREM* 67, 69-84

Kuzniak A. (2005) La théorie des situations didactiques de G. Brousseau, *Repères IREM* 61, 19-35

Lattuati M., Robert A., Penninckx J. (1999) *L'enseignement des mathématiques au lycée, un point de vue didactique,* Ellipses.

Margolinas C. (1995) La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations, in *Les débats de didactique des mathématiques*, la Pensée sauvage

Matheron Y. et Noirfalise R. (2005) Construire un savoir professionnel pour le professeur de mathématiques, quelques exemples d'outils apportés par la théorie anthropologique du didactique, *Petit x* 70, 30-47.

Masselot P. (2000) *De la formation initiale en didactique des mathématiques (en centre IUFM) aux pratiques quotidiennes en mathématiques, en classe, des professeurs d'école – une étude de cas,* Thèse de doctorat, Université Paris 7, Paris.

Ngono B. (2003) *Etude des pratiques des professeurs des écoles enseignant les mathématiques en ZEP, effets éventuels de ces pratiques sur les apprentissages,* Thèse de doctorat, Université Paris 7, Paris.

Noirfalise R. (2007) Calculer avec les grandeurs : l'usage des unités dans les calculs, *Repères IREM,* 68, 21-32.

Paries M. (2004), Comparaison de pratiques d'enseignants de mathématiques, relations entre discours des professeurs et activités potentielles des élèves, *Recherches en didactique des mathématiques* Vol 24/3, 251-284.

Pariès M. (2007) Enseigner les mathématiques en ZEP et ailleurs, analyses de pratiques d'enseignants expérimentés au collège, *Cahier de Didirem* n°55, IREM, Université P7

Pariès M., Pouyanne N., Robert A., Roditi E., Rogalski M, (2007) Mettre du relief sur les mathématiques à enseigner *Document pour la formation des enseignants*, cahier bleu n°9, IREM, Université P7

Peltier M.L. Edr (2004) *Dur, Dur d'enseigner en ZEP*, La pensée sauvage, Grenoble.

Robert A. (1998) Outils d'analyses des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol 18/2 pp. 139-190.

Robert A. (2003) De l'idéal didactique aux déroulements réels en classe de mathématiques : le didactiquement correct, un enjeu de la formation des (futurs) enseignants (en collège et en lycée), *Didaskalia* n°22, 99-116.

Robert A. (2005) De recherches sur les pratiques aux formations d'enseignants de mathématiques du second degré : un point de vue didactique. *Annales de didactique et sciences cognitives* Vol 10 pp.209-250

Robert A. et Vandebrouck F. (2003) Des utilisations du tableau par des professeurs de mathématiques en classe de seconde *Recherches en didactique des mathématiques* vol 23/3, pp. 389-424

Robert A., Grugeon B.et Roditi E.(2007) Diversités des offres de formation et travail du formateur d'enseignants de mathématiques du secondaire, P*etit x* 74, 60-90

Roditi, E. (1996) La racine carrée en troisième. Étude d'une activité, *Document pour la formation des enseignants,* Cahier vert n°17, IREM, Université P7

Roditi E. (2005) *Pratiques enseignantes en mathématiques ; entre contraintes et liberté pédagogique,* Paris : L'Harmattan.

Sensevy G.., Mercier A., Schubauer-Leoni M.L., Leutenegger F. (2007), *Agir ensemble : l'action didactique conjointe du professeur et l'élève*, Presses Universitaires de Rennes

Vandebrouck F. *La classe de mathématiques : activités d'élèves et pratiques d'enseignants*, à paraître (Octarès, Touluse).

Vergnaud G. (2002) La conceptualisation, clef de voûte des rapports entre pratique et théorie, in *Actes de la Desco de l'Université d'Automne Analyse de pratiques et professionnalité des enseignants*, Paris

Vergnaud G. (1990) La théorie des champs conceptuels, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol10/2.3, 133-170.

Vergnes D. (2001) Les effets d'un stage de formation en géométrie, *Recherches en didactique des mathématiques,* vol 21/1-2, 99-122.