VARIATIONS PEDAGOGIQUES SUR UN ARTICLE DE GEOMETRIE ANALYTIQUE D'HATON DE LA GOUPILLIERE PARU EN 1872

Christian GERINI [1]

I. — Introduction

Cet article est le fruit du travail d'un groupe d'étude de la presse scientifique et technique au XIX ème siècle. Ce groupe a été fondé et est animé par Christian Gerini et Norbert Verdier au sein du Groupe d'Histoire et de Diffusion des Sciences d'Orsay (GHDSO – Université Paris–Sud). Il s'est fixé des objectifs qui relèvent de différents domaines.

La première mission consiste évidemment en une activité de prospection et de localisation des documents, d'identification des auteurs et des réseaux d'auteurs qu'ils impliquent, de recherches biographiques et bibliographiques les concernant. Les lignes éditoriales et l'organisation des contenus de ces périodiques sont évidemment un élément d'appréciation de l'organisation et de l'évolution des sciences et des techniques de l'époque considérée [2].

L'étude des contenus, qui nécessite une bonne formation initiale dans les disciplines représentées, relève davantage encore de la recherche en histoire des sciences et des techniques. Il faut par exemple être mathématicien pour entrer dans le détail de certains articles des *Annales de mathématiques pures et appliquées* de Gergonne, du *Journal de mathématiques pures et appliquées de Liouville*, ou des *Nouvelles annales de mathématiques* de Terquem et Gérono [3] ; mais il faut aussi être historien des mathématiques pour

1 Maître de conférences en histoire et philosophie des sciences, agrégé de mathématiques. Université du Sud Toulon Var, BP 20132, 83957 La Garde cedex. Membre des laboratoires GHDSO (Paris 11 Orsay) et I3M (Universités de Toulon et Nice). Courriel : gerini@univ-tln.fr

2 Voir par exemple l'étude comparée des lignes éditoriales du *Journal* de Liouville et des *Annales* de Gergonne dans : Gérini C., Verdier N., *Les « Annales de mathématiques » : des Annales de Gergonne au Journal de Liouville*, Quadrature, n°61 (juillet 2006), p. 32-38.

3 Les deux premiers rédacteurs en 1842 de ce journal destiné aux candidats aux Ecoles Polytechnique et Normale.

les replacer dans le contexte de l'évolution de la discipline [4].

Ce travail conduit évidemment à constater l'intérêt que peuvent représenter certains textes pour la communauté des chercheurs (en histoire et philosophie des sciences, en didactique, etc.) et par les enseignants à tous les niveaux.

L'objectif ultime de notre groupe est donc de « médiatiser » ces périodiques (numérisation et mise en ligne en libre accès, communications écrites ou orales dans des revues ou des colloques, vulgarisation scientifique pour toucher un large public, éditions partielles augmentées, etc.).

Les origines (cursus et matières enseignées) des membres de notre équipe les ont conduits à s'appuyer plus particulièrement sur des textes étudiés pour renouveler leur pédagogie dans leur enseignement, et pour inciter d'autres collègues à le faire et à communiquer sur les résultats de ces expériences pédagogiques souvent riches.

En ce qui concerne les revues de mathématiques, nous avons cheminé à travers elles tout en tentant de réinvestir (et en incitant d'autres enseignants à le faire aussi) dans notre pédagogie des textes, des articles, des démonstrations, des exercices remontant aux époques fondatrices des cours abordés, ou du moins intéressantes pour leur compréhension. Bref, nous avons tenté de relier l'enseignement d'aujourd'hui à ses sources et de faire peut-être renaître, chez des élèves parfois découragés, un intérêt pour cette science par le biais de son histoire en les amenant à faire eux-mêmes des investigations qui les posent en découvreurs et leur redonnent une place active au centre de leur apprentissage. Les mathématiques leurs sont apparues comme un édifice en perpétuelle construction, et non comme une science figée et impériale, voire totalitaire (le discours dominant consistant à dire depuis déjà de nombreuses années que la réussite dans de nombreuses études passe par les mathématiques).

Ainsi, une collaboration entre quatre auteurs (Olivier Bordellès, Bernard Schott, Jean-Jacques Seitz & Norbert Verdier) a consisté en une exploration de l'algorithme d'Euclide (pour le calcul du PGCD de deux nombres entiers), à travers une note d'un mathématicien français parue dans les *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences*, et en l'utilisation de ce travail dans des cours et travaux dirigés en lycée et à un niveau de premier cycle universitaire: ces expériences feront, nous l'espérons, l'objet d'une présentation dans un futur numéro de Repères.

Nous avons choisi ici de présenter un exemple mettant en valeur la diversité et la complémentarité des approches, puisqu'il s'agit d'une étude d'un champ (relevant de la géométrie analytique) basée sur un article d'histoire donnant une liste de propriétés de certaines courbes et les références historiques de leurs démonstrations. Outre une variation pédagogique autour d'une famille de courbes définies par leur équation polaire, cet article a permis une initiation des étudiants à la recherche documentaire — classique ou via les nouvelles technologies de l'information et de la communication —, et les a conduits à « remonter » l'histoire grâce aux indications bibliographiques données par l'auteur.

4 Et il s'agit aussi souvent de philosophie, tant les matières que nous connaissons aujourd'hui étaient encore largement imbriquées à l'époque. Voir par exemple l'intime rapport de Gergonne à la philosophie dans: Gérini C., Verdier N., *Les Annales de Gergonne (1810-1832) et le Journal de Liouville (1836-1874), une mine de textes numérisés à exploiter dans notre enseignement*, Repères Irem, n°67 (avril 2007), Topiques éditions, Metz, 2007, p. 32-38.

II. — Variations sur la « Note sur les courbes que représente l'équation $\rho^n = a \sin n\omega$ » par M. Haton de la Goupillière.

La famille des « spirales sinusoïdales », courbes d'équation polaire $\rho^n = a \sin n\theta$ offre, aux valeurs particulières de n, des courbes paramétrées et polaires couramment étudiées ou proposées en exercices en classes terminales ou en premier cycle universitaire. Un article de Haton de la Goupillière, paru en mars 1876 dans les Nouvelles Annales de Mathématiques, recense un nombre important de ces cas et de leurs propriétés, avec de nombreuses références bibliographiques. Utilisé en séances de travaux dirigés, cet écrit offre deux intérêts au plan didactique.

1— L'auteur donnant les références d'articles (des *Nouvelles Annales* ou du *Journal de Liouville* par exemple), il permet d'initier les élèves ou étudiants à la recherche documentaire sur Internet ou en bibliothèque, de les familiariser avec l'histoire de la construction des mathématiques, et de leur faire prendre conscience des époques où les mathématiques qu'on leur enseigne ont été développées. Il leur donne à voir une science en marche, et non figée.

2— En fonction du niveau du cours concerné (nous tentons par exemple cette expérience en deuxième année d'IUT de Génie Mécanique), cet article — et les textes auxquels il renvoie — est riche de propriétés renvoyant à des démonstrations et études de courbes à développer avec les élèves.

Nous nous proposons ici de montrer quelques exemples de ces utilisations dans les deux champs que nous venons d'énoncer.

NOTE SUR LES COURBES QUE REPRÉSENTE L'ÉQUATION

$$\rho^n = A \sin n\omega;$$

PAR M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE.

1. Les courbes représentées en coordonnées polaires par l'équation

$$(1) \qquad \rho^n = A \sin n\omega$$

jouissent de propriétés fort remarquables, et se sont souvent présentées, dans des recherches d'un ordre élevé, à des géomètres tels que Maclaurin, Euler, l'Hôpital, Fagnano, Riccati, Lamé, MM. Serret, O. Bonnet, W. Roberts, etc. Leur théorie mériterait certainement d'être vulgarisée. A ce titre, il ne sera peut-être pas inutile d'en placer un court résumé sous les yeux des personnes qui se livrent à l'étude de la Géométrie. J'ai eu soin d'y mentionner les sources où l'on retrouverait les démonstrations, toutes les fois qu'elles ont été publiées à ma connaissance. Pour les autres cas, la recherche de ces démonstrations pourra fournir un exercice, en général facile.

II.1 *Les Nouvelles Annales de Mathématiques et Haton de la Goupillière.*

Les *Nouvelles Annales de mathématiques* sont l'un des trois premiers grands périodiques français du 19ème siècle consacrés aux mathématiques après les *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées* de J.D. Gergonne et le *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées de Liouville* (cf. Repères-IREM N° 67, p. 68-88). Se démarquant de Liouville, Terquem et Gérono ont lancé en 1842 ce journal plus spécifiquement dédié aux candidats à l'Ecole polytechnique et à l'Ecole normale. Sa longévité (il perdura jusqu'en 1927) a été ensuite la preuve de son utilité.

On y trouve évidemment la résolution de nombreux problèmes en rapport avec les programmes des concours des deux écoles ci-dessus mentionnées, des corrigés d'épreuves, des articles de réflexion élargissant le champ des précédents, mais aussi des synthèses historiques sur tel ou tel concept ou champ des mathématiques.

L'article de Haton de La Goupillière (1833-1927), « Note sur les courbes que représente l'équation $\rho^n = a \sin n\omega$ », publié dans le tome 11 de la deuxième série des Nouvelles annales (1876, p. 97-108) fait partie de cette dernière catégorie. Il conclut une série de travaux qu'il avait publiés sur les spirales sinusoïdales, mais laisse certaines questions ouvertes. L'auteur fut lui-même élève de l'École polytechnique (en 1850), puis s'éleva rapidement dans la hiérarchie scientifique de la France de la deuxième moitié du 19ème siècle : directeur de l'école des Mines, membre de l'Académie des Sciences, etc.

a) Présentation de l'article.

Après avoir donné à des étudiants de deuxième année d'IUT un cours que nous qualifierons de « classique » sur les courbes paramétrées et polaires, et les avoir familiarisés avec ces notions sur des exercices représentatifs, nous leur avons proposé d'utiliser l'histoire des mathématiques, et cet article plus particulièrement, pour découvrir d'autres courbes, d'autres propriétés, et les relations qui peuvent exister entre des cas semblant *a priori* étrangers. Nous avons emprunté à l'auteur lui-même les lignes leur donnant l'intention de son article (ci-contre). Les « géomètres » cités dans cet extrait étaient pour la plupart connus des étudiants via les formules du cours d'analyse générale portant leurs noms : ce fut l'occasion de détailler leurs biographies et de les situer dans la chronologie historique, les élèves n'ayant en général aucune idée de cette dernière. L'auteur précise que ces courbes peuvent également s'écrire avec un cosinus à la place du sinus, ce qui est facile à démontrer. Il donne ensuite une longue série de quarante trois « propriétés générales » de ces courbes, propriétés que l'on peut diviser en deux catégories :

1 — Au cas par cas ($n = 1$, $n = 2$, $n = 1/2$, $n = 3/2$, $n = 2/3$, etc.), il nomme les différentes courbes correspondantes, et cite des études ou articles de référence s'y rapportant : cercle, lemniscate de Bernoulli, cardioïde, limaçon de Pascal, conchoïde du cercle, épicycloïde (référence à Salmon, *Higher Plane Curves*, N° 110), fonction elliptique de première espèce (référence à un article de William Roberts dans le *Journal de Liouville*, t. 12, première série), podaire du centre de la lemniscate (référence à un article des Nouvelles annales signé Giuseppe Sacchi, T. 19 de la 1ère série), etc.

2 — Il énonce ensuite, toujours avec des références bibliographiques, les propriétés de ces courbes au cas général (n quelconque). Il se cite par exemple souvent lui-même à plusieurs reprises, par exemple :

> 3. Lorsque n est un nombre entier et positif, les courbes (1) sont le lieu des points, tels que le produit de leurs distances aux n sommets d'un polygone régulier soit égal à la $n^{ième}$ puissance du rayon du cercle circonscrit (HATON DE LA GOUPILLIÈRE, *Journal de l'École Polytechnique*, XXXVIII^e Cahier, p. 89).

Mais il énonce aussi des propriétés démontrées récemment ou beaucoup plus anciennes, qui permettent de montrer aux élèves la longue marche historique des mathématiques sur ce seul cas particulier des courbes $\rho^n = a \sin n\omega$. Elles concernent l'ensemble des caractéristiques que l'on peut chercher à mettre en évidence en géométrie analytique concernant des courbes définies en coordonnées polaires ou paramétriques (rayon et centre de courbure, longueurs d'arcs, aires, propriétés géométriques particulières, etc.). Par exemple :

> 17. Le cercle osculateur intercepte sur le rayon vecteur une corde qui est une fraction constante $\frac{2}{n+1}$ de ce rayon (MACLAURIN, *Traité des fluxions*, Chapitre XI, proposition XXXIV, corollaire IV, année 1740; NICOLAIDES, *Analectes*, p. 65).

Ou encore :

> 16. La projection du centre de courbure sur le rayon vecteur décrit une courbe semblable à la première dans le rapport $\frac{n}{n+1}$ (J.-A. SERRET, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1re série, t. VII, p. 118).

Il nous donne enfin des propriétés supposées de ces courbes, problèmes ouverts ainsi proposés aux lecteurs des Nouvelles annales (essentiellement les professeurs de lycées et les élèves candidats aux grandes écoles de l'époque). Ainsi, pour ne prendre qu'un exemple :

> 19. Le rayon de courbure de la développée des courbes (1) est égal à la fraction $\frac{1-n}{1+n}$ de la longueur comprise sur la normale de cette développée entre le rayon vecteur de la proposée et son centre de courbure (à démontrer).

Cette longue liste de propriétés permet une utilisation didactique de cet article à tous les niveaux de difficulté habituellement rencontrés dans les cursus actuels, du plus simple (cours des classes terminales) au plus complexe (cours sur les fonctions elliptiques, intégrales multiples, cinématique, etc.). Par exemple, la propriété 16 citée ci-dessus est extraite d'une *Note sur les intégrales eulériennes de seconde espèce* de Serret parue comme l'indique l'auteur dans le *Journal de mathématiques pures et appliquées* de Liouville en 1842 (p. 114-119) et peut-être utilisée sur ce seul point comme exercice sur les propriétés des courbes étudiées, ou dans un cadre plus complexe dans l'étude des fonctions et intégrales eulériennes. Les *Nouvelles Annales* ayant été largement diffusées dans les lycées, on les trouve aujourd'hui dans de nombreuses bibliothèques [5], et nous renvoyons le lecteur à ces sources originales s'il souhaite consulter la liste complète des propriétés énoncées par Haton de la Goupillière. Ce dernier ne manque évidemment pas de mentionner le travail de Mac Laurin, en 1718, qui a été le premier à étudier cette famille de courbes dans son *Tracatatus de curvarum constructione*, Philosophical Transactions, 1718.

Au niveau qui nous a intéressé, à savoir le cours de géométrie analytique de deuxième année d'IUT en génie mécanique (nouveau programme pédagogique national), nous nous sommes contentés d'étudier le premier des deux aspects détaillés ci-dessus : l'étude de quelques courbes aux cas particuliers, leurs rapports avec leurs représentations paramétriques lorsque celles-ci étaient possibles.

b) Recherche documentaire et historique

Cela a d'abord été l'occasion pour nous d'initier les étudiants à la recherche documentaire et à l'histoire des mathématiques à partir des données de Haton de la Goupillière sur ce sujet particulier.

Précisons ici les conditions pratiques dans lesquelles cette expérience fut menée. Nous avons utilisé des séances d'une heure trente de travaux dirigés avec un groupe de 25 élèves. Nous disposions d'un vidéoprojecteur et d'ordinateurs connectés à Internet. Nous

5 On trouve par exemple l'intégrale du document à la bibliothèque universitaire de la faculté des sciences de l'Université de Provence, centre St Charles (Aix-Marseille I), sous la cote 60422.

avons dû évidemment dans un premier temps exposer de façon classique aux étudiants les courbes paramétrées et les courbes polaires, ainsi que leurs plans d'étude. Les deux premières séances de travaux dirigés ont été consacrées à la résolution de quelques exercices suffisants pour leur faire assimiler ces connaissances incontournables (étude des épi et hypo cycloïdes en particulier). La troisième fut l'occasion de leur exposer les fonctionnalités des moteurs de recherche permettant d'atteindre rapidement des sites pour notre sujet, et de les amener à découvrir deux bases de données intéressantes pour la suite : NUMDAM (numérisation de documents anciens en mathématiques, programme CNRS avec lequel nous avions mené à bien la numérisation des *Annales* de Gergonne) et GALLICA (programme de numérisation de la bibliothèque nationale de France).

Le cours magistral suivant fut consacré à une vidéo projection du texte d'Haton de la Goupillière, et à une sélection des extraits sur lesquels nous allions travailler. Mission a alors été confiée aux étudiants, sur la base de ces textes et de leurs indications historiques (noms d'auteurs, citations d'articles et d'ouvrages antérieurs), de faire pour la semaine suivante une recherche personnelle (nous avions évidemment choisi des extraits impliquant un maximum de recherches solutionnables sur NUMDAM et Gallica) et un travail facultatif mais recommandé de démonstration d'une propriété de la lemniscate de Bernoulli (Voir le résumé de ce sujet d'étude en annexe 2). Un rendu écrit de ces recherches a été demandé pour la semaine suivante.

Les élèves avaient évidemment découvert une multitude d'exemples de courbes et de références historiques. Ce fut leur première surprise. Notons ici leur étonnement au vu de certains sites, et essentiellement sur les exemples associant mouvements mécaniques et étude mathématique (n'oublions pas qu'il s'agit d'étudiants en génie mécanique)[6].

Ce qui les étonna aussi assez fortement, ce fut la jonction quasi-systématique, sur les sites découverts, entre les mathématiques et les références historiques relatives aux sujets traités (nous en avons profité pour leur décrire dans ses grandes lignes l'intérêt de la recherche en histoire des sciences pour leur compréhension).

Les deux dernières séances de travaux dirigés ont été consacrées à la reprise de certaines études collectées lors de leurs recherches, et à la démonstration de certaines propriétés énoncées par Haton de la Goupillière: les élèves passaient eux-mêmes au tableau pour exposer leurs découvertes, après les avoir proposées à titre d'exercice. Nous avions évidemment effectué un tri et nous avons alors proposé aux étudiants d'alimenter une base de données pour les années suivantes avec les exemples que nous n'avions pas le temps de traiter. Cet aspect les a d'ailleurs autant motivés que la recherche documentaire : le fait de réaliser un corpus d'exercices et d'exemples pour leurs successeurs était en effet pour eux extrêmement valorisant, et ce travail a été fait en dehors des heures de cours. Il faut cependant mettre un bémol à ce niveau de leur travail : leurs propositions furent souvent et malheureusement identiques, un certain nombre d'entre eux s'étant contentés de lais-

6 En particulier, à partir de la lemniscate de Bernoulli et la courbe du trois-barres illustrée par un quadrilatère articulé et les jambes d'un cycliste, la courbe synodale, problème typique de cinématique, et les nombreuses animations trouvées sur Internet. Le site le plus apprécié (car jugé le plus convivial et simple) fut celui de Robert Ferréol (Professeur de mathématiques en mathématiques supérieures au lycée Carnot à Paris : http://www.mathcurve.com/

ser les plus motivés faire les recherches et proposer des sujets.

c) Quelques résultats.

Sur Haton de la Goupillière lui-même, une rapide investigation à l'aide d'un moteur de recherche a fourni aux étudiants sa biographie. Ils ont pu constater que ce mathématicien (ils ne le connaissaient *a priori* que grâce à l'article des Nouvelles annales que nous leur avions présenté) avait entre autres choses été directeur de l'école des Mines, et avait joué un rôle important dans le champ qui les concernait (le génie mécanique). On trouve en effet rapidement sur Internet l'extrait suivant :

« *M. Haton de la Goupillière est né en 1833 et a fait partie de la promotion de 1850 de Polytechnique. Aujourd'hui directeur de l'École supérieure des Mines, il a publié de nombreux travaux de Mécanique rationnelle, ainsi qu'une nouvelle et intéressante théorie de la Géométrie des masses ou Géométrie de l'espace hétérogène, réunissant en un corps de doctrine autonome, d'abord les règles relatives à l'intégration d'un ordre déterminé de fonctions, ensuite les théories du centre de gravité, du moment d'inertie et du potentiel. Le Traité général des mécanismes, où la classification est fondée sur le mouvement relatif des organes mis en communication, le Cours de machines, où la question des machines à vapeur est étudiée à fond, le Traité théorique et pratique des engrenages, enfin le Cours d'exploitation des Mines, constituent les principales publications didactiques de M. Haton de la Goupillière. Il a pris, en outre, une part importante aux travaux de la Commission du grisou* » [7].

7 Livre du centenaire (Ecole Polytechnique), 1897, Gauthier-Villars et fils, TOME I, p. 450 et suiv.

Le personnage est en lui-même intéressant pour montrer aux élèves l'interconnexion entre des disciplines qui leur paraissent malheureusement souvent fort éloignées, à savoir ici la mécanique et les mathématiques (c'est d'ailleurs une source des difficultés à enseigner ces dernières dans les filières technologiques). La mécanique leur est présentée de façon concrète, sur des études de situations qui ne font appel qu'à des mathématiques simples, alors que le cours de mathématiques aborde des contenus plus ardus, voire plus abstraits : ainsi, les calculs de moments d'inertie, d'aires, de volumes, sont-ils effectués en mécanique par discrétisation, ou directement par des logiciels adaptés, alors que le cours de mathématiques s'intéresse à toutes les formes d'intégration en n'importe quelle dimension (intégrales simples, généralisées, multiples, curvilignes, etc.), et ne s'arrête pas qu'aux seuls objets possédant suffisamment de symétries pour appliquer des formules toutes prêtes.

La même investigation leur a fait apparaître très rapidement le nombre important d'avancées mathématiques fournies par Haton de la Goupillière : le rapport intime des mathématiques à la mécanique (dissociées uniquement depuis le 19ème siècle) leur est apparu à la seule lecture des titres de ses articles dans le Journal de Liouville :

– Des centres de courbure successifs. Série II, 4, (1859), p. 183-193

– De la courbe qui est à elle-même sa propre podaire. Série II, 11, (1866), p. 329-336.

– Théorème sur le tautochronisme des épicycloïdes quand on a égard au frottement. Série II, 13, (1868), p. 204-208.

– Méthodes de transformation fondées sur la conservation d'une relation invariable entre les dérivées de même ordre. Série III, 2, (1876), p. 241-256.

Les références d'Haton de la Goupillière à ses propres contributions dans les Nouvelles Annales ont complété cette prise de conscience d'une construction conjointe par les mathématiques et la mécanique des propriétés de celle–ci.

Evidemment, la recherche des différentes courbes citées par Haton de la Goupillière les a conduits sur le site http://www.mathcurve.com, déjà mentionné en note, et leur a permis d'en découvrir l'historique et les nombreuses illustrations, ainsi que leur rapport intime à des problèmes de mécanique tels que les systèmes « échange bielle-manivelle » (courbe de Watt, quadrilatère articulé, etc.) ou les courbes synodales. Le fait de relier ainsi la mécanique, la cinématique, et l'analyse, nous paraît être fondamentalement nécessaire : les élèves ont le sentiment qu'il existe entre les matières scientifiques — et particulièrement entre la mécanique et les mathématiques — des barrières infranchissables.

Ce travail de recherche documentaire leur a permis en outre de découvrir la richesse des fonds numérisés par les programmes Gallica et Numdam (qu'aucun étudiant ne connaissait). Ils ont pu en effet trouver de nombreux articles sur le thème étudié directement sur « Gallica-maths », partie du programme de Gallica numérisé et publié par le programme national NUMDAM sur le site de sa cellule MathDoc [8]. Cela a été pour nous l'occasion de leur montrer l'importance des publications scientifiques et techniques mises en ligne à ce jour en « open access », et plus particulièrement en ce qui concerne les périodiques : *Annales de Gergonne*, *Journal de Liouville*, *Journal de l'école Polytechnique* (pour partie), etc. Ici aussi, ils ont pu s'apercevoir de l'imbrication naturelle des divers champs scientifique. On trouve en effet dans ces journaux des rubriques de mécanique, d'optique, de météorologie, de statique etc., et même de philosophie mathématique et d'arithmétique politique [9].

Mais la recherche de documents cités par l'auteur leur a ouvert aussi d'autres horizons documentaires, par le biais des ouvrages numérisés ou disponible en prêts entre bibliothèques (PEB). Ainsi ont-ils pu par exemple consulter en ligne l'ouvrage « A treatise on the higher plane curves: intended as a sequel to A treatise on conic sections » de George Salmon, paru en 1852 chez Hodges & Smith, et disponible sur le site de l'université du Michigan [10]. Découvrant le site http://www.sudoc.abes.fr,

8 http://www-mathdoc.ujf-grenoble.fr/cgi-bin/edbm_jmpa/JMPA?first=1&maxdocs=300&au=Haton+de+la+Goupilli%E8re&type=html&format=complete

9 Par exemple, de Gergonne lui-même dans ses *Annales* (T. VI : 1815-1816) : *Quelques remarques sur les élections, les assemblées délibérantes et le système représentatif*. Cet article intéresse autant l'enseignement des mathématiques (on peut étudier avec des élèves de lycée les démonstrations faites par Gergonne) que celui de l'histoire (il nous renseigne sur le fonctionnement du vote censitaire, autant au plan des assemblées nationales que dans les corps de l'armée).

10 Un passage de l'introduction a permis là aussi, outre le travail de traduction, de leur montrer l'importance de la circulation des idées et des connaissances dans le monde du 19ème siècle : « The plan upon which I have proceeded has been, to take the less recent Geometry as represented in previous elementary treatises (Lardner's Algebraic Geometry, and the Chapters on Curves in Gregory's Examples, being those which I have most frequently consulted), and to incorporate with this what appeared to me most important in the works of modern Geometers. Poncelet's Traité des Propriétés Projectives and Chasles' Aperçu Historique were principally useful in the first Part of this Treatise, but have also afforded some materials for the present volume. I had hoped to have derived much assistance from M. Chasles long-promised Traité de Géometrie Supérieure, more especially as he is understood to have given much attention to Curves of the third degree; but his work, though daily expected here, has been de-layed too long for me to benefit by it. Plücker's works on Analytic Geometry I was not acquainted with when the first edition of the Conies was published, but I have repeatedly had occasion to acknowledge my obligations to them in the following pages. And I have, besides, made use of the Geometrical Papers which seemed to me most interesting in the later volumes of Crelle's and Liouville's Journals, and in the Cambridge and Dublin Mathematical Journal. »

ils ont appris à y effectuer des recherches bibliographiques et comment commander certains ouvrages en PEB (possibilité que nous n'avions évidemment pas le temps d'exploiter).

II.2 *Étude de courbes et démonstrations de propriétés à partir de l'article d'Haton de la Goupillière.*

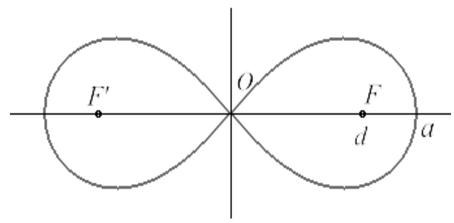
Ces recherches de documentation ont été faites, nous l'avons dit, en dehors des cours et travaux pratiques de mathématiques, et recensées, ordonnées, et exposées à l'ensemble du groupe lors d'une séance dédiée à ce travail.

L'exploitation de l'article et des ressources engrangées (dont, évidemment, des ouvrages contemporains sur la géométrie analytique) a pu alors se faire sur des exemples cités par Haton de la Goupillière. Des démonstrations de propriétés particulières ont été étudiées dans les textes auxquels renvoie l'auteur et dans des ouvrages actuels. Les étudiants ont pu se rendre compte de la pertinence des premières. Nous donnons ici à titre d'exemple les deux études mentionnées plus haut :

1— celle de la lemniscate de Bernoulli, que les élèves avaient précédemment découverte sous sa forme paramétrée : l'article d'Haton de la Goupillière les a conduits à la regarder sous sa forme polaire et à chercher les démonstrations qui permettent de passer de l'une à l'autre. Cela a été pour eux l'occasion de découvrir les multiples courbes (et leur histoire) de la famille des « spirales sinusoïdales ».

2— celle de la propriété 16 ci-dessus, faite à partir de la démonstration donnée par Serret dans l'article cité par Haton de la Goupillière.

a) La lemniscate de Bernoulli.



Cette courbe avait été étudiée à partir de sa représentation paramétrique, sans aucune précision géométrique à la base. Un logiciel de calcul avait permis d'obtenir facilement, après l'étude purement mathématique, un tracé précis, sans les foyers F et F'.

$$\begin{cases} x(t) = a\dfrac{\sin t}{1+\cos^2 t} \\ y(t) = a\dfrac{\sin t \cos t}{1+\cos^2 t} \end{cases} \qquad (1)$$

Les recherches faites à partir des données historiques d'Haton de la Goupillière conduisirent les étudiants à trouver une autre définition de cette lemniscate, et plus généralement de celle de l'ovale de Cassini. Ils découvrirent que l'ovale de Cassini est le lieu des points M de coordonnées $(x; y)$ tels que MF.MF' = k^2 où F et F' sont deux points distincts donnés dans le plan, et k une constante non nulle arbitraire.

La démarche pour leur faire voir le lien existant entre l'ovale de Cassini ainsi défini, la courbe donnée par Haton de la Goupillière comme étant la lemniscate de Bernoulli (à savoir ici : $r^2 = a \cos 2\theta$), et la courbe étudiée sous sa forme paramétrée a consisté :
1 — à leur faire trouver une équation quadratique de l'ovale de Cassini :

Si O est le milieu de FF' et OF = d , on a :

$$MF^2 = (x + d)^2 + y^2 \text{ et } MF'^2 = (x - d)^2 + y^2$$

donc :

$$MF^2.MF'^2 = ((x + d)^2 + y^2)((x - d)^2 + y^2) = d^4 - 2d^2x^2 + 2d^2y^2 + (x^2 + y^2)^2$$

Le lieu recherché a donc pour équation :

$$(x^2 + y^2)^2 - 2d^2(x^2 - y^2) = k^4 - d^4 \quad (2)$$

Il fut alors aisé de leur faire tracer sur ordinateur différentes courbes en fonction des valeurs de k et d, et de retrouver la lemniscate au cas particulier $k = d$.

2 — à leur faire démontrer, justement, que dans ce dernier cas, on retrouvait tout d'abord la courbe citée par Haton de la Goupillière. Ils obtinrent d'abord, à partir de (2), la formule :

$$(x^2 + y^2)^2 = 2d^2(x^2 - y^2) \quad (3).$$

En passant en coordonnées polaires, ils parvinrent rapidement à :

$$r^2 = 2d^2 \cos 2\theta \qquad (4)$$

Il est à noter ici que la notation générale pour les « spirales sinusoïdales » est aujourd'hui la même que celle de Haton de la Goupillière, c'est-à-dire qu'on remplace dans (4) le terme $2d^2$ par la lettre a, ce qui revient à poser : $a = d\sqrt{2}$, ce que les étudiants ont donc fait spontanément, parvenant finalement à l'équation :

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta \qquad (5)$$

3 — à terminer la démonstration de la jonction recherchée, à savoir le passage de (1) à (5) ou de (5) à (1). Il a fallu alors leur donner l'idée de poser dans (1) $\cos t = \tan \theta$, même si certains d'entre eux avaient trouvé la démonstration sur Internet. Ils parvinrent alors rapidement à partir de (1) à :

$$x^2 + y^2 = a^2 \frac{1-\cos^2 t}{1+\cos^2 t} = a^2 \frac{1-\tan^2 \theta}{1+\tan^2 \theta}$$

et donc à (5).

Nous n'avons pas la place ici de détailler les autres études réalisées sur cette famille de courbes recensées par Haton de la Goupillière. On peut évidemment faire avec des élèves un travail similaire au précédent sur des courbes qu'on leur présente en général sous forme d'exemples ou d'exercices déconnectés de leur histoire : limaçon de Pascal, cycloïdes, cardioïdes, etc.

Nous avons donc aussi utilisé le renvoi par Haton de la Goupillière à un article de Serret pour leur faire étudier la démonstration de la propriété 16 de sa liste par Serret lui-même.

b) La démonstration de Serret

Serret démontre bien la propriété 16, mais dans une formulation un peu différente. Tout d'abord, il s'intéresse aux « spirales sinusoïdales » de la forme particulière : $r^m = 2^{m-1} \cos mt$, mais à bien y regarder, cela n'enlève rien à la généralité du résultat annoncé par Haton de la Goupillière. En outre, ces courbes ne sont pas immédiatement l'objet de l'article de Serret paru dans le *Journal de Liouville* en 1842 [11] : il s'intéresse aux applications des intégrales eulériennes de deuxième espèce — à savoir la fonction Γ —, et plus particulièrement à la longueur de la lemniscate, que l'on retrouve donc aussi dans cet article, et à l'aire de la surface qu'elle délimite. Ce sont des considérations plus générales qui l'amè-

11 Alfred Serret, *Note sur les intégrales eulériennes de seconde espèce*, Journal de mathématiques pures et appliquées (dit Journal de Liouville), Série 1, 7, 1842, p. 114-119.

nent à s'intéresser d'un peu plus près aux courbes $r^m = 2^{m-1} \cos mt$ dans leur ensemble, et ses réflexions sont intéressantes à double titre :

1— il avoue son impuissance à démontrer la généralité d'une propriété. Parlant de « l'épicycloïde extérieure de module 1 », il ajoute : « Cette courbe jouit, comme on sait, d'être semblable à toutes ses développées. Cette considération m'a porté à rechercher si parmi les courbes représentées généralement par l'équation précédente, il ne s'en trouverait pas qui jouissent de cette même propriété, qui jusqu'ici n'a été reconnue qu'aux épicycloïdes (comprenant la cycloïde) et à la spirale logarithmique ; mais je ne suis arrivé à aucun résultat satisfaisant ». Outre le fait que les élèves peuvent voir ici la démarche — et l'échec — d'un mathématicien sur une question ouverte, son propos fait lien avec la partie du cours sur les développées de courbes.

2— il compense l'échec précédent par la démonstration de la propriété 16 qu'il énonce ainsi : « Il est bon toutefois de signaler une propriété géométrique assez curieuse de ces courbes : c'est que la projection du rayon de courbure sur le rayon vecteur est à ce rayon vecteur dans un rapport constant ou, en d'autres termes, que la projection du centre de courbure sur le rayon vecteur engendre une courbe semblable à la première ». Le rapport cité par Haton de la Goupillière ($\dfrac{n}{n+1}$) n'arrive qu'en conclusion de l'article de Serret (où il s'exprime d'ailleurs, nous allons le voir, sous la forme $\dfrac{m}{m+1}$).

L'article de Serret a donc permis de passer à l'étape suivante dans l'étude des courbes paramétrées et polaires : longueur, courbure, développée, etc. Il offre aussi l'avantage de montrer l'importance des fonctions et intégrales eulériennes sur des questions aussi pratiques, couramment rencontrées en mécanique.

La lecture de l'article de Serret auquel renvoie Haton de la Goupillière est ardue. Serret citant le cas de la lemniscate de Bernoulli, il fut donc plus aisé, à partir de l'étude de celle-ci (§ précédent), de démontrer les formules qu'il avance uniquement pour cette courbe.

Partant de sa courbe d'équation $r^m = 2^{m-1} \cos mt$, il donne comme allant de soi les formules suivantes :

On trouve en effet cette expression du rayon de courbure,

$$R = \frac{2^{\frac{m-1}{m}}}{m+1} (\cos mt)^{\frac{1}{m}-1};$$

de plus pour déterminer l'inclinaison i de la normale sur le rayon vecteur, on obtient la formule

$$\text{tang}\, i = -\text{tang}\, mt;$$

Puis il conclut :

et la valeur qui en résulte pour la projection du rayon de courbure sur le rayon vecteur est

$$\frac{2^{\frac{m-1}{m}}}{1+m} (\cos mt)^{\frac{1}{m}} \quad \text{ou} \quad \frac{r}{1+m}.$$

Quant à l'équation de la courbe décrite par la projection du centre de courbure sur le rayon vecteur, elle sera évidemment

$$r^m = \frac{\left(\frac{2m}{1+m}\right)^m}{2} \cos mt;$$

elle se déduira donc de l'équation générale

$$r^m = \frac{(2a)^m}{2} \cos mt,$$

en faisant

$$a = \frac{m}{1+m}.$$

Une séance de travaux dirigés suffit à faire démontrer ces formules au cas particulier de

$m = 2$, c'est-à-dire de la lemniscate (on peut reprendre l'équation de Haton de la Goupillière : $r^2 = a^2 \cos(2\theta)$). C'est un excellent moyen de faire utiliser les diverses formules du cours aux élèves, et de les faire travailler à la fois sur l'analytique, le géométrique, et évidemment sur l'aspect historique en leur donnant ensuite à titre de travail personnel la recherche d'autres démonstrations de cette propriété, et, à titre de devoir, la démonstration des formules générales données par Serret.

III. — Conclusion

D'autres courbes référencées par Haton de la Goupillière peuvent être ensuite proposées aux élèves, en suivant une méthodologie identique ou en les proposant simplement à titre d'exercices : cardioïde, hyperboles, enveloppes de droites, etc.

L'utilisation de textes originaux a pour intérêt de faire émerger l'histoire des mathématiques dans leur enseignement, et donc de repositionner les élèves en acteurs, au lieu de spectateurs, en « découvreurs » au lieu de « suiveurs ». Les richesses des fonds documentaires leur apparaissent en provoquant chez eux un réel étonnement. Il n'est qu'à taper « lemniscate de Bernoulli » sur un moteur de recherche pour dérouler une pelote sans fin qui fait découvrir d'innombrables horizons, et des connexions entre les savoirs qui ne sont pas toujours enseignées.

Un autre intérêt consiste en l'utilisation des « vides » laissés par les auteurs (des textes anciens comme des démonstrations que l'on trouve en ligne) : les combler par les démonstrations manquantes ou à peine suggérées motive les élèves qui ont alors l'impression de terminer ou compléter une œuvre inachevée, donc de participer à son élaboration. Ainsi par exemple, sur le site de mathcurve, peut-on voir les diverses formes (paramétrée, polaire, etc..) de la lemniscate de Bernoulli, mais avec pour seule indication de la démonstration de ces équivalences les changements de variables nécessaires. Faire apparaître le raccourci et guider les élèves pour achever ou faire entièrement les démonstrations éludées est une approche pédagogique très positive : elle revient en fait à leur proposer un exercice, à la différence près qu'ils en ont eux-mêmes découvert la nécessité et l'énoncé sous-jacent aux raccourcis constatés. Les nombreuses questions non résolues dans la longue liste donnée par Haton de la Goupillière en sont un autre exemple.

Mais cette activité a servi aussi à montrer comment les mathématiques se construisaient pas à pas dans les journaux de cette époque : les étudiants ont pu voir le nombre important de questions proposées par certains auteurs, puis résolues par d'autres, parfois de diverses manières. L'émulation entre mathématiciens passait souvent par cette compétition, ces défis qu'ils se lançaient à travers cette dialectique des questions-réponses ou des problèmes non résolus. Nous en donnons un exemple dans l'annexe 1 ci-après (une question posée par Roberts au T. VI de la première série des *Nouvelles Annales* (1847) et résolue par Brocard au T. 11 de la deuxième série (1872). Il n'est qu'à leur faire constater dans les différents périodiques l'importance des rubriques « questions proposées », « problèmes résolus », « réponse à la question proposée », etc. pour leur faire apercevoir cette émulation qui régnait entre les mathématiciens de tous rangs (y compris les élèves, car on y trouve des solutions proposées par des élèves des collèges et des lycées de l'époque [12]),

12 Par exemple, une solution d'un problème de géométrie « *par M. Devaux, élève du lycée Charlemagne (classe de M. Rouché)* », *Nouvelles Annales*, T. 15, p. 226-227. Le même volume (année 1856) comporte pas moins de 12 contributions d'élèves (essentiellement des solutions de problèmes posés antérieurement).

et donc pour leur faire voir les mathématiques comme une science plus hésitante (des démonstrations sont contredites ou améliorées par d'autres, toujours dans le cadre de cette émulation, voire de cette compétition), plus incomplète, moins « figée » et élitiste, bref plus « humaine » qu'elle ne leur paraissait depuis souvent de nombreuses années.

Bibliographie et références Internet :

Briot, Charles & Bouquet, Jean-Claude, 1851, *Leçons de géométrie analytique*, Paris, Dezobry & Magdeleine (ed.), 1851. (Cité dans les *Nouvelles Annales*, 1858, p. 377). Ouvrage réédité pendant plus d'un siècle. Numérisé par NUMDAM pour Gallica et par Google (adresses ci-après).

Ecole Polytechnique, 1894, *Livre du centenaire*, Gauthier-Villars, Paris, 1894.

Gergonne, Joseph-Diez, *Annales de mathématiques pures et appliquées*, Mensuel, 1812-1832, numérisé par Numdam (adresse internet ci-après).

Gérini, Christian & Verdier, Norbert 2006. *Les « Annales de mathématiques » : des Annales de Gergonne au Journal de Liouville*, in : Quadrature, N°61 (juillet-septembre 2006), EDP Sciences, Paris, 2006, 31-38.

Gérini, Christian & Verdier, Norbert 2007. « Les Annales de Gergonne (1810-1832) et le Journal de Liouville (1836-1874) : une mine de textes numérisés à exploiter dans notre enseignement. », *Repères*, 67, 55-68, Topiques éditions, 2007.

Gispert, Hélène 2001. « Les journaux scientifiques en Europe » in Blay, M. & Nicolaïdis E. (dir*), L'Europe des sciences, constitution d'un espace scientifique*. Paris : Le Seuil, p. 191-211, 2001.

Haton de La Goupillière, 1876, « Note sur les courbes que représente l'équation $\rho^n = a \sin n\omega$ », *Nouvelles annales de mathématiques*, T. 11, 2ème série, p. 97-108.

Liouville, Joseph, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 1836-, numérisé par Numdam pour Gallica (adresses ci-après).

Mac Laurin, Colin, 1718, *Treatise of Fluxions,* Edinbourg, 1742.

Mac Laurin, Colin, 1742, « Tractatus de curvarum constructione », *Philosophical Transactions*, No. 356 ; Londres, 1718.

Salmon, Georges, *A treatise on the higher plane curves: intended as a sequel to A treatise on conic sections*, Hodges & Smith, 1852.

Serret, Alfred , « Note sur les intégrales eulériennes de seconde espèce », *Journal de mathématiques pures et appliquées* (dit *Journal de Liouville*), Série 1, 7, 1842, p. 114-119

Terquem, Olry et Gerono, Camille-Christophe, *Nouvelles annales de mathématiques*, 1842-1927 (en cours de numérisation).

Sites Internet :

http://www.numdam.org http://www-mathdoc.ujf-grenoble.fr

http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history http://www.mathcurve.com

http://gallica.bnf.fr http://books.google.fr/ http://www.sudoc.abes.fr

ANNEXE 1

Question 166

(voir 1^re série, t. VI, p. 341).

PAR M. H. BROCARD.

Le lieu géométrique des projections orthogonales du centre de la lemniscate de Bernoulli sur ses tangentes a pour équation polaire

$$\rho^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \cos \tfrac{2}{3} \omega.$$

(W. ROBERTS.)

L'équation polaire de la lemniscate étant

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta,$$

on en tire

$$\operatorname{tang} V = \frac{r}{r'} = -\cot 2\theta;$$

d'où

$$V - 2\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Mais, ρ et ω étant les coordonnées d'un point du lieu, on a

$$\rho = r \cos(\omega - \theta)$$

et

$$V = \frac{\pi}{2} + \omega - \theta;$$

on déduit de là

$$\omega = 3\theta,$$

et, pour l'équation du lieu,

$$\rho^2 = a^2 \cos^3 \frac{2\omega}{3},$$

ou

$$\rho^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \cos \tfrac{2}{3} \omega.$$

On trouverait de même que le lieu des projections du centre de cette nouvelle courbe sur ses tangentes, ou la deuxième podaire de la lemniscate, a pour équation

$$\rho^{\frac{2}{5}} = a^{\frac{2}{5}} \cos \tfrac{2}{5} \omega;$$

et d'une manière générale que les podaires successives des courbes

$$\rho^m = a^m \cos m\omega$$

appartiennent à la même famille (*).

Brocard, H., 1872, *Nouvelles annales de mathématiques*, T. 11, 2ème série, p. 283-284 en réponse à la question 166 posée par Roberts, W., 1847, *Nouvelles annales de mathématiques*, T. 2, 1ère série.

ANNEXE 2

Sujet d'étude donné directement à un groupe après avoir réalisé l'expérience décrite dans l'article

SUJET D'ETUDE SUR LES SPIRALES SINUSOÏDALES

Effectuer des recherches internet (et copier les URL) sur :

1. Courbes planes paramétrées
2. Courbes polaires
3. Lemniscate de Bernoulli
4. Cardioïde
5. Ovale de Cassini
6. Spirale sinusoïdale
7. Courbe synodale
8. Limaçon de Pascal
9. Haton de la Goupillière
10. *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées*
11. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*
12. *Liouville (Joseph)*
13. *Gergonne (Joseph-Diez)*
14. *Note sur les intégrales eulériennes de seconde espèce* de Serret.
15. *NUMDAM*
16. Gallica

<u>Sujet d'étude :</u>

1/ Etudier et représenter graphiquement la courbe (lemniscate de Bernoulli) définie paramétriquement par :

NOTE SUR LES COURBES QUE REPRÉSENTE L'ÉQUATION

$\rho^n = A \sin n\omega$;

PAR M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE.

I. Les courbes représentées en coordonnées polaires par l'équation

[1] $\rho^n = A \sin n\omega$

jouissent de propriétés fort remarquables, et se sont souvent présentées, dans des recherches d'un ordre élevé, à des géomètres tels que Maclaurin, Euler, l'Hôpital, Fagnano, Riccati, Lamé, MM. Serret, O. Bonnet, W. Roberts, etc. Leur théorie mériterait certainement d'être vulgarisée. A ce titre, il ne sera peut-être pas inutile d'en placer un court résumé sous les yeux des personnes qui se livrent à l'étude de la Géométrie. J'ai eu soin d'y mentionner les sources où l'on retrouverait les démonstrations, toutes les fois qu'elles ont été publiées à ma connaissance. Pour les autres cas, la recherche de ces démonstrations pourra fournir un exercice, en général facile.

$$\begin{cases} x(t) = a\dfrac{\sin t}{1+\cos^2 t} \\ y(t) = a\dfrac{\sin t \cos t}{1+\cos^2 t} \end{cases} \quad (1)$$

(On pourra faire l'étude au cas particulier a = 2.)

2/ On appelle ovale de Cassini le lieu des points M de coordonnées (x, y) tels que $MF.MF' = k^2$ où F et F' sont deux points distincts donnés dans le plan, et k une constante non nulle arbitraire.

- Montrer que si F et F' sont sur (Ox) et O milieu de [FF'], elle a pour équation :

$$(x^2 + y^2)^2 - 2d^2(x^2 - y^2) = k^4 - d^4 \quad (2), \text{ où } d = OF = OF'.$$

- On se place dans l'hypothèse k = d. Montrer en passant en coordonnées polaires que (2) est équivalente à : $r^2 = 2d^2 \cos(2\theta)$ (3). Etudier la courbe polaire ainsi définie.
- Montrer que si $a = d\sqrt{2}$, alors (1) est équivalent à (3).
- En déduire que la lemniscate de Bernoulli est un cas particulier de l'ovale de Cassini qui est elle-même un cas particulier des « spirales sinusoïdales » d'Haton de la Goupillière (voir sa définition dans l'encadré ci-dessus.).