CALCULER AVEC LES GRANDEURS : L'USAGE DES UNITES DANS LES CALCULS

Robert NOIRFALISE
Irem de Clermont-Ferrand
et CII Didactique

Le texte ci-dessous est le compte-rendu d'un atelier réalisé lors de l'université d'été «Le calcul sous toutes ses formes» qui s'est tenu à Saint-Flour en Août 2005. User des unités dans les calculs est une question d'actualité, les nouveaux programmes de collège en recommandent l'usage dans les calculs portant sur des grandeurs. A l'aide d'outils d'analyse empruntés à l'approche anthropologique du didactique, nous avons abordé la question de la légitimité d'une telle pratique et examiné quelques problèmes didactiques engendrés par celle-ci.

1. — Introduction.

Discrètement présentes tout au long des programmes de mathématiques du collège, les grandeurs ont fait une entrée que l'on peut remarquer dans la structuration des nouveaux programmes de sixième, ceux qui sont entrés en application à la rentrée 2005 : « Grandeurs et mesures » forme un des quatre domaines d'études avec « Organisation et gestion de données », « Nombres et calculs » et « Géométrie ». Ce qui est nouveau est que « Grandeurs et mesures » constitue un domaine d'étude ainsi officialisé avec un statut analogue aux trois autres domaines, lesquels structuraient l'étude à mener dans les anciens programmes. Une autre nouveauté apparaît aussi avec l'énoncé explicite, dans l'introduction générale présentant le programme pour le collège, de l'objectif « calculer avec les unités relatives aux grandeurs étudiées et avec les unités de quelques grandeurs quotients et grandeurs produits ». On peut alors se demander ce que cette prescription implique en termes de pratique dans la résolution de problèmes effectifs, ce que nous avons examiné dans l'atelier. On peut aussi s'interroger sur la légitimité d'une telle pratique, sur ce qui peut gêner, interdire ou autoriser le développement effectif de celle-ci dans les classes de collège. Telle est une des questions que pose l'usage des unités dans les calculs et plus généralement la gestion des grandeurs : est-ce une pratique que les enseignants de mathématiques, dans leur ensemble, reconnaissent comme leur ou non ? Il peut, pour le moins, y avoir débat sur la question, débat déjà ancien comme nous le verrons, et renouvelé avec les nouveaux programmes de collège : débat qui revient à s'interroger sur le territoire de notre discipline et sur ses frontières. Pour interroger la viabilité d'une pratique didactique, on peut s'interroger sur son devenir au fil des classes, aussi avons nous fait le choix d'examiner ce qui pourrait advenir d'une telle pratique si on étendait son usage à d'autres niveaux scolaires et en particulier au lycée.

2. — Place des grandeurs dans l'enseignement des mathématiques ?

Dans les années 1970, la vision moderniste des mathématiques, la centration sur les structures connues des nombres, entiers naturels, relatifs, rationnels, réels, ont fait que les grandeurs, avec leurs espèces différentes ont été réduites, par isomorphisme, aux structures numériques.

La place à accorder aux grandeurs dans l'enseignement des mathématiques est une question qui est loin d'être nouvelle. Nous renvoyons, pour plus de détails sur ce sujet à l'article de Chevallard et Bosch [1]. Nous pouvons citer quelques extraits de ce que Lebesgue disait déjà sur le sujet en 1935 lorsqu'il publia dans la revue « l'enseignement mathématique » différents articles sur le sujet :

> « La mesure des grandeurs : il n'y a pas de sujet plus fondamental. La mesure des grandeurs est le point de départ de toutes les applications des mathématiques et comme les mathématiques appliquées ont évidemment précédé les mathématiques pures, la logique mathématique, on imagine d'ordinaire que la mesure des aires et des volumes est à l'origine de la géométrie: d'autre part cette mesure fournit le nombre, l'objet même de l'Analyse… Je me suis efforcé de traiter les questions de façon aussi simple et concrète que possible… Cela peut paraître quelque peu archaïque à l'époque où les considérations abstraites et savantes jouent un rôle capital jusque dans les sciences expérimentales, mais ceux à qui sont dues ces considérations ont pu se mouvoir dans l'abstraction … parce qu'ils avaient un sens aigu de la réalité. Après, mais après seulement le passage à l'abstrait peut être profitable. »

Jean Alain Roddier, organisateur de l'U.E. « le calcul sous toutes ses formes » nous a donné à lire un ouvrage publié en 1741 et rédigé par Bernard Lamy dont le titre est évocateur : "*Elemens de mathématiques ou traité de la grandeur en général*". Celui-ci commence par un premier chapitre ainsi libellé *"La science de la grandeur en général doit être regardée comme les élémens de toutes les mathématiques*".

Les rédacteurs des commentaires des programmes de mathématiques de la classe de troisième, ceux de 1999, posaient quant à eux également bien le problème [2] :

> « Aujourd'hui la science mathématique s'est largement affranchie de la question des grandeurs (l'ensemble des nombres, par exemple, se construit formellement, sans référence aux grandeurs). Théoriquement, les mathématiques peuvent donc à la fois se développer et se transmettre sans référence à la notion de grandeur.
>
> Historiquement, c'est bien à partir d'un travail sur les grandeurs qu'ont été construits

1 Chevallard.Y et Bosch M. (2000/2001) les grandeurs en mathématiques au collège. Partie I. Une Atlantide oublié in Petit x n'54, p.3/32. Notons que le contenu de l'atelier s'inspire très largement de cet article.

2 Ministère de l'Education nationale (1999): mathématiques, programmes et accompagnement, Ed CNDP

la plupart des concepts et théories mathématiques. Il serait d'autant plus dommageable de perdre de vue cette filiation que c'est elle qui permet d'assurer le lien avec les autres disciplines.

S'il a été possible aux mathématiques de s'émanciper de la notion de grandeur, c'est sans doute qu'elles avaient accumulé quantité d'expériences et de résultats dont il semble que l'enseignement de base ne puisse faire l'économie ».

Il apparaît ainsi, si les mathématiques ont pu dans leur développement s'affranchir de l'étude des grandeurs, que celle-ci est constitutive de leur construction et qu'il est ainsi légitime de se demander quelle place accordée à cette étude dans un parcours scolaire.

On peut, en un premier temps, examiner en terme de type de tâches[3], ce qui doit être l'objet d'études et qui concerne les grandeurs selon les nouveaux programmes de sixième :

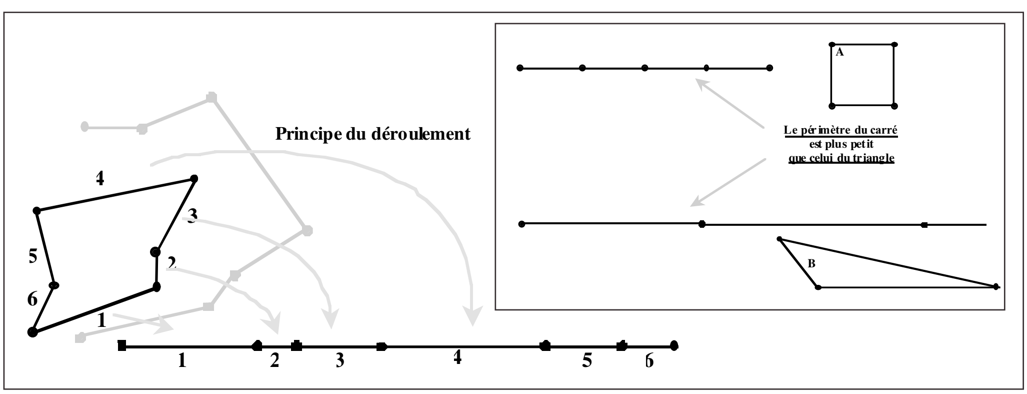
T_1 : Comparer des périmètres. Cette comparaison pourra se faire techniquement par comparaison des mesures de ceux-ci donc par un travail numérique. N'oublions pas cependant que d'autres techniques existent pour de telles comparaisons telles que, par exemple, celle consistant à "dérouler" les périmètres et à les comparer visuellement comme l'illustrent les deux schémas ci-dessous. [Nous citons ici cette technique de comparaison pour rappeler qu'un travail sur les grandeurs ne passent pas en nécessité par un travail sur les nombres et que là aussi on pourrait discuter la légitimité d'une telle pratique dans un cours de mathématique.]

T_2 : Comparer des angles. La comparaison doit en un premier temps se faire par superposition

T_3 : Mesurer des angles à l'aide d'un rapporteur. Il appartient au professeur de mathématiques d'apprendre aux élèves le maniement du rapporteur comme outil de mesurage des angles.

T_4 : Comparer des aires. Là aussi, la comparaison peut se faire à l'aide de techniques non numériques par superposition, par découpage et recollement.

Bien sur, des types de tâches impliquant des calculs :



3 Voir en Annexe une présentation de ce que nous appelons type de tâches

T_5 : Calculer le périmètre d'un polygone

T_6 : Calculer le périmètre d'un cercle

T_7 : Calculer des durées

T_8 : Calculer des horaires

T_9 : Calculer l'aire d'un rectangle

T_{10} : Calculer le volume d'un parallélépipède rectangle

Ce qui a trait aux changements d'unités :

T_{11} : Effectuer des changements d'unités pour les longueurs et les masses.

T_{12} : Effectuer des changements d'unités pour les aires

T_{13} : Utiliser les unités de volume, les relier aux unités de contenance et effectuer des changements d'unités.

3. — Les problèmes examinés dans l'atelier :

Après avoir rapidement présenté quelques outils empruntés à l'approche anthropologique du didactique, approche développée par Yves Chevallard, outils présentés en annexe, nous avons proposé aux participants de l'atelier de nous questionner sur l'usage des unités dans les calculs à partir des problèmes suivants :

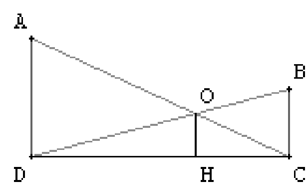
1. *Un problème de changement d'unités :* Une pression de 1 atmosphère vaut 101,3 kPa. Dans la littérature scientifique de langue anglaise[4], on trouve souvent les pressions exprimées en PSI, c'est-à-dire en *pound per square inch* ou livre-force par pouce carré. On a :
   $1\text{Pa} = 1\text{N/m}^2$;
   1 livre-force = 1lbf = 4,448 N ;
   1 pouce = 1 in = 2,54 cm.
   Que vaut 1 atmosphère en PSI ?

2. *Un calcul avec unités :* La masse volumique du zinc est de 7,29kg/L. Quelle est, en grammes, la masse de 9 cm^3 de ce métal ?

3. *En intégrant les unités dans les calculs résoudre une équation du second degré :* Soit un projectile lancé verticalement vers le haut à la vitesse initiale de 35 m/s.

   Au bout de combien de temps le projectile atteindra–t-il la hauteur de 20 m ? (On prendra g, l'accélération égale à 10m/s^2 et on négligera les frottements)

4. *Un petit usage en géométrie de l'analyse dimensionnelle :*



Dans la configuration géométrique ci-dessus on a (AD) *et* (BC) *perpendiculaires à* (DC). O *l'intersection de* (AD) *et* (DB) *se projette orthogonalement en* H *sur* (DC) *;*

On pose a = AD, b = BC, c = DC *et* h = OH. *Je sais que h s'obtient comme rapport du produit de a et b et de leur somme à moins que cela ne soit l'inverse mais je ne me souviens plus du sens du rapport.*

On a $h = \dfrac{a+b}{ab}$ *ou bien* $h = \dfrac{ab}{a+b}$.

Sans calcul, retrouver le bon rapport.

5. *Le problème des cyclistes : Comment expliquer qu'en descente un cycliste de petit gabarit descende moins vite (en roue libre) qu'un cycliste de plus grand gabarit ?*

4 Certaines pompes pour vélos sont à la fois graduées en atmosphère et en PSI : les graduations 160 psi et 11atm coïncident.

4. — Calculer avec des grandeurs.

A. *Calculer avec des nombres abstraits ou concrets ?*

« Quand un nombre est énoncé sans que l'on indique la nature des unités qu'il représente, on le nomme nombre abstrait ; dans le cas contraire, il s'appelle nombre concret ; ainsi 7 est un nombre abstrait, et quand on dit 7 litres, le nombre est concret. Nous mentionnons ces dénominations parce qu'on risque de les rencontrer dans les anciens ouvrages d'arithmétique, mais nous devons avertir que la seconde tend à donner une idée inexacte. Un nombre concret n'est pas un nombre, c'est une grandeur. Quand on dit 7 litres, le nombre est 7, le mot litre complète l'idée, mais ne la modifie pas. (Source : encyclopédie imago mundi) »

Calculer avec des nombres, dès lors qu'ils sont abstraits, nous sommes, en mathématique, rompus à le faire. Peut-on calculer avec des nombres concrets, c'est-à-dire avec des grandeurs ? Montrons comment on peut le faire en résolvant dans un premier temps le problème n°1 avec une technique qualifiée de « concrète » car elle opère avec des nombres concrets. Nous comparerons ensuite cette technique avec une autre, que nous qualifierons d'abstraite car elle utilise des nombres abstraits. Didactiquement, dès lors qu'un type de tâches est objet d'apprentissage, et que plusieurs techniques peuvent lui être associées, on peut légitimement se demander si une technique est plus simple à mettre en œuvre qu'une autre, si l'une a une portée plus grande, si leurs technologies sont faciles, difficiles à élaborer : le travail de l'enseignant va ainsi être plus ou moins difficile. La réussite des élèves peut aussi dépendre des choix faits : si la technique est plus simple, avec une technologie facile à mobiliser, on peut s'attendre à une plus grande réussite, à un apprentissage plus court… Notons que cela pourrait faire l'objet d'un travail expérimental intéressant visant à valider ou invalider certaines hypothèses portant sur la facilité technique de réalisation d'un type de tâches donné.

Solutions du Problème n° 1 :

Une pression de 1 atmosphère vaut 101,3 kPa. Dans la littérature scientifique de langue anglaise, on trouve souvent les pressions exprimées en PSI, c'est-à-dire en *pound per square inch* ou livre-force par pouce carré. On a :

1Pa = 1N/m^2 ;
1 livre-force = 1lbf = 4,448 N ;
1 pouce = 1 in = 2,54 cm.

Que vaut 1 atmosphère en PSI ?

Solution 1. Nous avons :

$$1\text{atm} = 101{,}3 \text{ kPa} = 101300 \text{ Pa} = 101300\ \frac{N}{m^2}$$

Or 1lbf = 4,448 N , donc $1\text{N} = \frac{1}{4{,}448} lbf$

et 1 in = 2,54cm , donc $1\text{cm} = \frac{1}{2{,}54} in$ et

$1 \text{ m} = 100\text{cm} = \frac{100}{2{,}54} in$.

$$\text{D'où : } 1 \text{ atm} = 101300\ \frac{N}{m^2} = 101300\ \frac{\frac{1}{4{,}448} lbf}{(\frac{100}{2{,}54} in)^2} =$$

$$= \frac{101300\, x 2{,}54^2}{4{,}448 x 100^2} . \frac{lbf}{in^2} \approx 14{,}69 PSI \ .$$

Nous avons une tâche t appartenant au type de tâche T « effectuer un changement d'unités pour une pression ». La technique concrète est donnée à voir dans ce qui précède. Elle consiste à remplacer 1N par sa valeur en lbf, 1 m^2 par sa valeur en in^2 et à opérer de façon classique un calcul.

Quelle pourrait être une technologie de cette technique ? Ce peut être un petit discours, qui justifie l'adéquation de la technique à la tâche :

> Si 1Newton vaut "*x*" livre-forces alors 101300 Newtons valent 101300 fois "*x*" livre-forces. C'est la force qui s'exerce sur 1 m^2. Si 1mètre-carré vaut "*y* fois plus" qu'1 pouce-carré alors la force s'exerçant sur 1 pouce carré vaut "*y* fois moins" que celle s'exerçant sur 1 m^2.

La représentation fractionnaire utilisée pour représenter la grandeur quotient[5] conduit à voir que techniquement, il suffit alors de remplacer N (à voir comme 1N) par sa valeur en *lbf*, ceci au numérateur et m^2 (à voir comme $1m^2$) par sa valeur en in^2. C'est formellement simple à mettre en œuvre.

Une esquisse de théorie serait une mise en forme de ce qui précède qui aurait le mérite de généraliser ce que l'on vient de voir dans un cas particulier.

Il convient tout d'abord de distinguer des espèces de grandeurs : nous avons ici, la grandeur « pression », la grandeur des « forces » et celle des aires, la première étant quotient de la seconde par la troisième. La grandeur des aires est elle-même le produit de la grandeur des longueurs par elle-même. L'ensemble des espèces de grandeurs est donc muni d'un produit et d'un quotient. Quelques règles que l'on peut énoncer pour rendre compte de la technique et de la technologie vues ci-dessus :

R1 : Soit G une espèce de grandeur, u et v deux grandeurs non nulles de G : si l'on a $u = \lambda v$ *alors* $v = \frac{1}{\lambda}u$ (λ *réel non nul)*. Cette règle énonce le rapport entre deux unités dans G.

R2 : Soit G une espèce de grandeur : g, u et v trois grandeurs de G, avec u et v non nuls : Si $g = \mu u$ et $u = \lambda v$ alors $g = \mu(\lambda v) = (\mu\lambda)v$. Changement d'unités dans G.

R3 : Soit $G = G_1 \times G_2$ une espèce de grandeur produit et g une grandeur de G : u_1, v_1 deux grandeurs de G_1 non nulles, et u_2 et v_2 deux grandeurs non nulles de G_2, alors si l'on a $g = \lambda u_1.u_2$ et $u_1 = \mu v_1$ et $u_2 = \gamma v_2$ on a $g = \lambda(\mu v_1).(\gamma v_2) = (\lambda\mu\gamma)v_1.v_2$.

R4 : Soit $G = G_1 / G_2$ une grandeur quotient et g une grandeur de G : u_1, v_1 deux grandeurs de G_1 non nulles, et u_2 et v_2 deux grandeurs non nulles de G_2, alors si l'on a $g = \lambda u_1/u_2$ et $u_1 = \mu v_1$ et $u_2 = \gamma v_2$ on a $g = \lambda(\mu v_1)/(\gamma v_2) = (\lambda\mu/\gamma)v_1/v_2$.

Ce type de construction théorique qu'il ne s'agit pas, bien sûr, de développer au collège, pourrait en revanche asseoir avec une légitimité retrouvée au sein des mathématiques des pratiques de changements d'unités où on use des unités dans les calculs.

Autre solution : technique abstraite. Nous la qualifions d'abstraite en opposition à la précédente. Le problème revient à déterminer la force exprimée en *lbf* s'exerçant sur une surface d'1 pouce carré. On peut envisager de

5 Ce qu'il conviendrait de justifier : nous supposons ici que cela a été fait précédemment.

convertir d'abord les newtons en livre-forces puis les mètres carrés en pouces carrés (on pourrait alternativement commencer par opérer sur les aires puis sur les forces). La technique consiste à tenir le petit discours suivant :

- Avec une pression valant 1 atmosphère, sur 1 m² s'exerce une force de 101300 N . Or 1N vaut $\frac{1}{4{,}448} lbf$ donc sur 1 m² s'exerce une force de $\frac{101300}{4{,}448} lbf$
- Convertissons mètre carré en pouce carré : 1 pouce vaut 2,54 cm donc 1cm vaut $\frac{1}{2{,}54} pouces$ et 1 mètre vaut 100 fois plus soit : 1 m² vaut donc $(\frac{100}{2{,}54})^2 in^2$ (environ *1550 in*²).
- La force s'exerçant sur 1 in^2 sera donc $(\frac{100}{2{,}54})^2$ fois moins grande que sur 1 m² soit de $\dfrac{\frac{101300}{4{,}448}}{(\frac{100}{2{,}54})^2}\ lbf$. La pression en PSI est donc : $\dfrac{\frac{101300}{4{,}448}}{(\frac{100}{2{,}54})^2}$ psi $\approx$ 14,69 psi .

Une comparaison des deux techniques tend à montrer que la seconde est une technique qui embarque sa technologie alors que la première aurait l'avantage de s'en séparer ce qui libère l'esprit et ainsi la rend d'application plus simple.

Il apparaît ainsi pour les changements d'unités, que l'on dispose avec l'usage des unités dans les calculs, d'une technique plus simple dans sa mise en œuvre que celle que nous avons qualifiée d'abstraite ci-dessus, qui était celle pratiquée avec les anciens programmes de collège. Le lecteur pourra aussi s'en convaincre en comparant les deux techniques pour résoudre le problème n° 2 (on suppose connu que la masse est le produit de la masse volumique par le volume).

B. *Résoudre une équation du second degré avec les unités :*

On sait résoudre une équation du second degré « $ax^2 + bx + c = 0$ » en considérant les coefficients a, b, c comme des nombres. Peut-on étendre la technique de résolution au cas où on considère a, b et c comme des grandeurs, comme des nombres concrets ? Examinons le problème n° 3 :

> Soit un projectile lancé verticalement vers le haut à la vitesse initiale de 35 m/s.
>
> Au bout de combien de temps le projectile atteindra–t-il la hauteur de 20 m ?

- On a g = – 10m/s² (En orientant l'axe vertical vers le haut) : g , l'accélération, est un élément de l'espèce de grandeur [LT⁻²].
- $v = gt + v_0$: équation homogène, les termes (monômes) sont des éléments de [LT⁻¹]
- $d = \frac{1}{2} gt^2 + v_0 t$: équation homogène, tous les termes (monômes) sont des éléments de [L].

On est amené à résoudre l'équation du second degré :

$$-\frac{1}{2} gt^2 - v_0 t + d = 0 \quad (E) .$$

Remplaçons g , v_0 , et d par leurs valeurs (comme grandeurs). (E) devient :

$$-\frac{1}{2}.(-10.\frac{m}{s^2})t^2 - 35\frac{m}{s}t + 20m = 0 \quad \text{(E1)}$$

Divisons par 1m et multiplions par $1.s^2$:

$$5t^2 - 35\,s.t + 20\,s^2 = 0$$

(équation homogène en T^2)

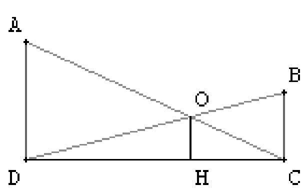
Puis, calculons Δ :

$\Delta = 35^2 s^2 - 400s^2 = 825s^2$ et $\sqrt{\Delta} = 5\sqrt{33}s$, d'où :

$$t = \frac{35s \pm 5\sqrt{33}s}{10} = \left(\frac{7 \pm \sqrt{33}}{2}\right)s \quad .$$

Formellement, les lettres pour désigner les unités et la lettre pour désigner l'inconnue ne se démarquent pas suffisamment, ce qui a fait dire aux participants de l'atelier qu'ils préféraient s'en tenir à un calcul classique avec des nombres, la technique usuelle leur paraissant ainsi plus assurée. On peut cependant garder à l'esprit qu'il peut être utile de contrôler l'homogénéité des termes et que l'on doit prendre des précautions dans le choix des unités de façon à ce que celles-ci soient cohérentes entre elles.

C. *Un petit usage en géométrie de l'analyse dimensionnelle*



Dans la configuration géométrique ci-dessus on a (AD) *et* (BC) *perpendiculaires à* (DC). O *l'intersection de* (AD) *et* (DB) *se projette orthogonalement en* H *sur* (DC) *;*

On pose a = AD, b = BC, c = DC *et* h = OH. *Je sais que h s'obtient comme rapport du produit de a et b et de leur somme à moins que cela ne soit l'inverse mais je ne me souviens plus du sens du rapport.*

On a $h = \frac{a+b}{ab}$ *ou bien* $h = \frac{ab}{a+b}$.

Sans calcul, retrouver le bon rapport.

Le problème peut ici être vite résolu en utilisant ce qu'on appelle l'analyse dimensionnelle : les égalités données ne sont pas à regarder comme des égalités numériques mais comme des égalités portant sur des grandeurs.

Des grandeurs égales appartiennent à la même espèce et donc en dimension on doit avoir homogénéité. Ceci écarte d'emblée, la première formule h = $\frac{a+b}{ab}$ qui n'est pas homogène : h est une longueur et la dimension du second membre est l'inverse d'une longueur.

La seconde formule, quant à elle, est homogène. Si donc l'une des deux est juste, c'est, a priori, la seconde. Nous restons prudent car des constantes cachées (1 par exemple) peuvent dissimulées des grandeurs qui seraient à prendre en considération. Il n'en reste pas moins que nous avons ici un moyen de contrôle, certes à portée limitée, sur l'obtention de formules. Le fait de travailler avec des grandeurs et non plus simplement avec des nombres abstraits donne ici un élément technique permettant des contrôles ; certes il s'agit d'une technique dont la portée est limitée mais elle n'est pas inintéressante.

D. *Utilité de l'analyse dimensionnelle pour la modélisation : un exemple, le cycliste.*

Le problème est le suivant : *Comment se fait-il qu'en descente, les cyclistes de petit gabarit descendent moins vite que ceux qui ont un grand gabarit.*

La seule référence à la gravitation ne peut expliquer le phénomène : le vecteur « accélération du mouvement » est le projeté du vecteur « accélération terrestre » sur le plan de la route. De plus avec un tel modèle, la vitesse devrait croître infiniment, ce qui ne se passe pas comme cela.

Il convient d'introduire les résistances au mouvement et en particulier la résistance de l'air. La vitesse d'un cycliste va se stabiliser lorsque la force $\vec{R}$ due à la résistance de l'air sera opposée à la force $\vec{F} = m\,\vec{\gamma}$ provenant de l'attraction terrestre :

$$\vec{R} = m\,\vec{\gamma} \qquad (1)$$

Comment déterminer $\vec{R}$: les physiciens disposent d'un principe fondamental très simple selon lequel une relation entre grandeurs physiques doit être dimensionnellement homogène[6].

$\vec{R}$ est une force donc en dimension nous avons : $[R] = MLT^{-2}$

$\vec{R}$ a priori dépend de v la vitesse du cycliste et aussi de S la surface de prise au vent du cycliste.
$[v] = LT^{-1}$ et $[S] = L^2$.

Ici, on peut voir que la recherche des facteurs déterminant $\vec{R}$ n'est pas suffisamment développée car pour avoir une formule dimensionnellement homogène il convient que la dimension [M] apparaisse de part et d'autre. On peut penser alors introduire la masse volumique μ de l'air (plus l'air est dense plus il s'oppose à la pénétration du cycliste) :
$[\mu] = ML^{-3}$.

Si l'analyse des facteurs est correcte, comme ceux-ci sont indépendants, on doit avoir (Vashy-Buckingham) : $R = k.\mu^{\alpha}v^{\beta}S^{\gamma}$, avec k une constante sans dimension.

Pouvons-nous déterminer les valeurs des exposants α, β, γ ? Oui avec l'analyse dimensionnelle :

$$MLT^{-2} = [ML^{-3}]^{\alpha}[LT^{-1}]^{\beta}[L^2]^{\gamma}$$

On trouve facilement que nécessairement $\alpha = 1$, $\beta = 2$ et $\gamma = 1$.

On a donc : $\mathbf{R = k.\mu.\ S.}\boldsymbol{v}^{\mathbf{2}}$.

Introduisons les gabarits des cyclistes : Si ρ est le rapport entre la taille d'un petit cycliste et celle d'un grand cycliste, on peut supposer que le rapport des masses va être ρ^3 alors que celui de la surface de la prise au vent va être en ρ^2.

Soit le sujet de fort gabarit de masse m, de surface de prise au vent S, sa vitesse de pointe v est telle que :

$$m\gamma = k\mu S v^2 .$$

2 Nous nous introduisons dans un territoire qui n'est pas le nôtre et nous le faisons sûrement avec les maladresses d'un débutant. La situation est sans doute plus complexe, et il conviendrait d'ajouter une résistance où la viscosité de l'air (frottement de l'air sur le corps du cycliste) interviendrait : cela conduirait à une résistance qui serait proportionnelle à la vitesse. Nos collègues physiciens savent d'expérience que c'est cette dernière qui prévaut essentiellement lorsque la vitesse est faible, alors que c'est la résistance proportionnelle au carré de la vitesse qui l'emporte quand la vitesse est plus élevée.

Pour le sujet de petit gabarit, sa masse m' est $m' = \rho^3 m$, sa surface de prise au vent $S' = \rho^2 S$ et donc sa vitesse de pointe v' vérifie :

$$m'\gamma = k\mu S' v'^2 .$$

soit $\rho^3 m\gamma = k\mu\rho^2 S v'^2$ et donc $\rho m\gamma = k\mu S v'^2$.

D'où : $v'^2 = \rho v'^2$

Ce que montre la formule : les vitesses de pointe v et v' sont dans le rapport de la racine carrée du rapport des tailles ρ : ceci explique le phénomène observé.

Application numérique : Un cycliste mesurant 1m 80 descend une pente à 60 km/h. A quelle vitesse descend un autre cycliste ne mesurant que 1m 60 ?

$$\rho = \frac{1,60}{1,80} \approx 0,889 \text{ et } \sqrt{\rho} \approx 0,943 \text{ et } v' \approx 56,6 \text{ km/h}$$

La différence est suffisamment grande pour être sensible.

Sur le net, on trouve quelques renseignements sur des valeurs possibles de $k\mu S$ sur le site http://sportech.online.fr/ : 0.40 avec un cycliste traditionnel avec bras tendus et 0.35 avec bras fléchis.

5. — Conclusion.

Faut-il introduire les unités dans les calculs comme le proposent les nouveaux programmes de collège ? La question est posée et mérite qu'on en fasse l'étude. Nous avons, avec les exercices proposés, commencé concrètement, mais modestement ce que pourrait être une telle étude ; pour certaines tâches de changement d'unités (produits et quotients) il apparaît que l'usage des unités délivre une technique qui semble plus simple que celle mise en œuvre avec des nombres abstraits. Encore faut-il qu'une telle pratique soit considérée comme légitime par les professionnels de l'enseignement de notre discipline. De même, l'usage des dimensions avec le principe de l'homogénéité autorise des modélisations, des contrôles dans l'élaboration de formules : il y a peut-être là une organisation de savoir que l'on peut emprunter à nos collègues des sciences expérimentales et introduire dans le champ des mathématiques enseignées au collège et au lycée.

Bibliographie :

Chevallard Y., Bosch M., « Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie I : une Atlantide oubliée » in *petit X* N°55, 2000/2001, pp5-32
Chevallard Y., Bosch M., « Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie II : Mathématisations » in *petit X* N°59, 2002, pp43-76
Lebesgue H., *Sur la mesure des grandeurs*, Paris, Gauthier-Villars, éd 1956
Ministère de l'Education nationale : *Enseigner au collège. Mathématiques, programmes et accompagnement*, Ed CNDP, 1999.
Pressiat A. « Grandeurs et mesures : Evolution des organisations mathématiques de référence et problèmes de transposition» in Dorier J.L. et all Actes de la XIe école d'été de didactique des mathématiques. Grenoble, La Pensée sauvage.2002.
Rouche N. « Qu'est-ce qu'une grandeur : analyse d'un seuil épistémologique » in *Repères* n°15, avril 1994, pp25-36.

ANNEXE

Présentation de quelques outils pour l'étude des problèmes posés.

Ce sont des outils empruntés à l'approche anthropologique du didactique, approche développée par Y. Chevallard. Ils sont à voir comme des éléments permettant d'outiller la pensée pour l'étude de phénomènes didactiques.

Notion d'organisation mathématique :

On considère, dans cette approche, les mathématiques comme des pratiques qui vont se décliner de façons diverses selon les organisations sociales où se tiennent ces pratiques. On peut les décrire, c'est un premier terme du modèle de description, par ce qu'on appelle en toute généralité une organisation praxéologique, ou plus spécifiquement organisation mathématique dès lors qu'il s'agit d'une pratique que l'on reconnaît comme mathématique.

Une organisation praxéologique est un quadruplet $(T, \tau, \theta, \Theta)$: T désigne un type de tâches (formé d'un ensemble de tâches spécifiques), τ désigne une technique que l'on peut appliquer pour la réalisation des tâches appartenant à T, θ une technologie, un discours qui justifie l'adéquation de la technique à la réalisation des tâches de T, et enfin Θ désigne une théorie qui, elle, peut servir à justifier le discours technologique.

Il n'est pas aisé, pour celui qui découvre cet outil de faire la distinction entre les quatre composantes du quadruplet, aussi avons-nous dans l'atelier, avant de l'appliquer aux problèmes traités, présenté l'exemple ci-dessous qui montre par son caractère quelque peu exotique la distinction entre *type de tâche*, *technique* et *technologie*.

Soit à résoudre l'équation du second degré suivante dans $\mathbf{R}^+$: $X^2 + 10X = 39$. C'est une tâche que nous connaissons bien. Une technique de résolution que nous présentons, car elle est quelque peu exotique relativement à celles qui sont davantage connues, est la suivante.

Technique :

— Diviser 10 par 4 : 2,5
— Elever 2,5 au carré et multiplier par 4 : $2{,}5^2 \times 4 = 25$
— Ajouter 39 : 25 + 39 = 64.
— Prendre la racine carrée de 64 : $\sqrt{64} = 8$
— Retrancher 2 fois 2,5 : $8 - 2 \times 2{,}5 = 3$
— La solution est 3.

Technologie : la technique présentée ci-dessus est exotique : elle peut ainsi être qualifiée relativement aux techniques que nous connaissons bien : son caractère exotique est relatif à un système culturel. Elle peut paraître étrange : elle mérite d'être expliquée. Il convient de produire un discours « technologique » la justifiant et la rendant compréhensible.

Les fonctions d'une technologie θ sont de rendre compréhensible une technique, de montrer son adéquation au type de tâches T, et aussi de **produire des techniques**.

Justifions la technique de résolution présentée ci-dessus :

La technologie s'inscrit dans un cadre géométrique : On construit un carré de côté x, et on lui adjoint un rectangle de côté x et 10. On obtient ainsi une figure géométrique d'aire 39. On va alors la manipuler par des découpages et recompositions : ainsi, dans la figure 2, on découpe le rectangle de côté x et 10 en « 4 bandes » d'aires égales, ce qui justifie dans la technique la division de 10 par 4. On recompose la figure de façon à obtenir la figure 3.

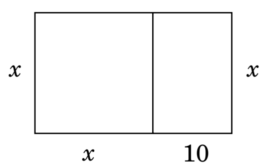


Fig 1. L'aire totale est de 39

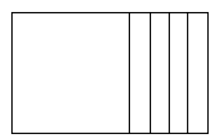


Fig 2. Le rectangle de côtés x et 10 est partagé en 4 bandes de côtés x et 10/4 = 2,5.

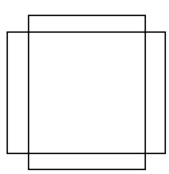


Fig 3. L'aire totale est toujours de 39

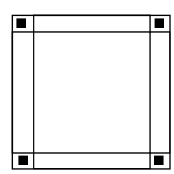


Fig 4. On complète en un carré

On complète la figure 3 de façon à obtenir un carré (cf. fig4) : Le carré obtenu s'obtient en ajoutant « 4 petits carrés », chacun d'entre eux à une aire de $2,5^2$, ce qui fait apparaître la raison pour laquelle on élève 2,5 au carré dans la technique. On multiplie par 4 et on ajoute 39 : on obtient ainsi l'aire du grand carré : 64. On peut, en en prenant la racine, obtenir la mesure de son côté : 8 et il convient de retrancher 2 fois 2,5 pour obtenir x. CQFD.

Théorie : l'algèbre pourrait se constituer comme une théorie permettant de justifier que la solution obtenue dans $\mathbf{R}^+$ est ici bien la seule et que le résultat ne dépend pas de l'espèce de grandeurs avec laquelle on travaille…