LA RUBRIQUE « POINT DE VUE » :

Un lieu de débat pour les enseignants de Mathématiques

La rubrique « POINT DE VUE » *est destinée à être un lieu de débat et un outil de réflexion pour les enseignants de mathématiques sur tous les sujets qui concernent leur profession.*

Elle accueille dans ce numéro un texte de Jean-Pierre Ferrier, de l'Irem de Lorraine, qui s'interroge sur la didactique des mesures de grandeurs.

Cette rubrique est ouverte à tous et destinée à recevoir des articles courts, d'environ trois pages…

Nous attendons vos propositions.

Le Comité de Rédaction

Point de vue

DIDACTIQUE DE LA MESURE DES GRANDEURS : L'HELICE STRUCTURALE

Jean-Pierre FERRIER
Université Henri Poincaré & Irem de Lorraine

Associer les nombres et les grandeurs qu'ils mesurent a servi de fondement à l'enseignement des nombres et des opérations pendant des décennies. C'est aussi le choix que fait Henri Lebesgue dans sa célèbre monographie pour présenter une introduction des mêmes nombres. On sait que les mathématiques modernes ont banni les «nombres concrets» qui résultaient de cette philosophie. Depuis quelques années on a cherché à réintroduire les notions de grandeur et de mesure et proposé de mettre des unités avec les nombres. Cependant on n'a pas remis en cause les choix antérieurs, pour considérer les «nombres avec unités» comme un enrichissement des nombres abstraits qui restent étudiés pour eux-mêmes dans un premier temps. Ce faisant on s'est appuyé sur des justifications théoriques discutables, comme une construction d'Hassler Whitney, témoignant d'une incapacité fondamentale à se sortir de la rigidité de pensée qui sévit depuis un peu plus de trente ans. Nous allons reprendre les choses à leur début et voir comment penser en termes de grandeurs peut faciliter la compréhension des opérations.

Le structuralisme et l'exemple de la lecture.

Le concept de structuralisme provient d'un cours de linguistique générale délivré en 1916 par Ferdinand de Saussures. Il s'applique par excellence aux mathématiques. Nous allons voir qu'on peut dégager différents niveaux de structuralisme pour illustrer les stratégies pédagogiques. Dans [f2] on présente, pour un sujet donné, le cursus des études mathématiques, de l'école élémentaire à l'université, comme suivant une hélice qui s'élève en même temps que le degré de structuralisme, hélice qui peut repasser au-dessus du point de départ et qui se double d'une hélice du sens, dans laquelle les niveaux inférieurs éclairent les niveaux supérieurs. Pour illustrer le propos, divers sujets ont été abordés, en plus de celui des nombres, comme celui de la géométrie ; on aurait aussi pu parler des phénomènes aléatoires. Comme exemple introductif, nous choisissons ici de rendre à la linguistique l'honneur qui lui est dû pour avoir introduit le structuralisme, considérant les éléments qui interviennent dans le problème de la lecture en langue française.

Au niveau le plus bas de l'hélice, on trouve l'alphabet sous une forme simplifiée, avec ses lettres de base [1] ; les voyelles correspondent à des sons ; les consonnes interviennent avec les voyelles dans la composition des syllabes, suivant la règle du 'b-a ba', ce qui induit déjà un peu de structuration : la consonne 'b' apparaît comme ce qu'il y a de commun à 'ba, bé, bi, bo, bu'. On

1 On fait abstraction ici de l'ambiguïté du 'c' et du 'g', du 'ch', des voyelles nasalisées, des diphtongues, etc.

L'hélice structurale de la lecture

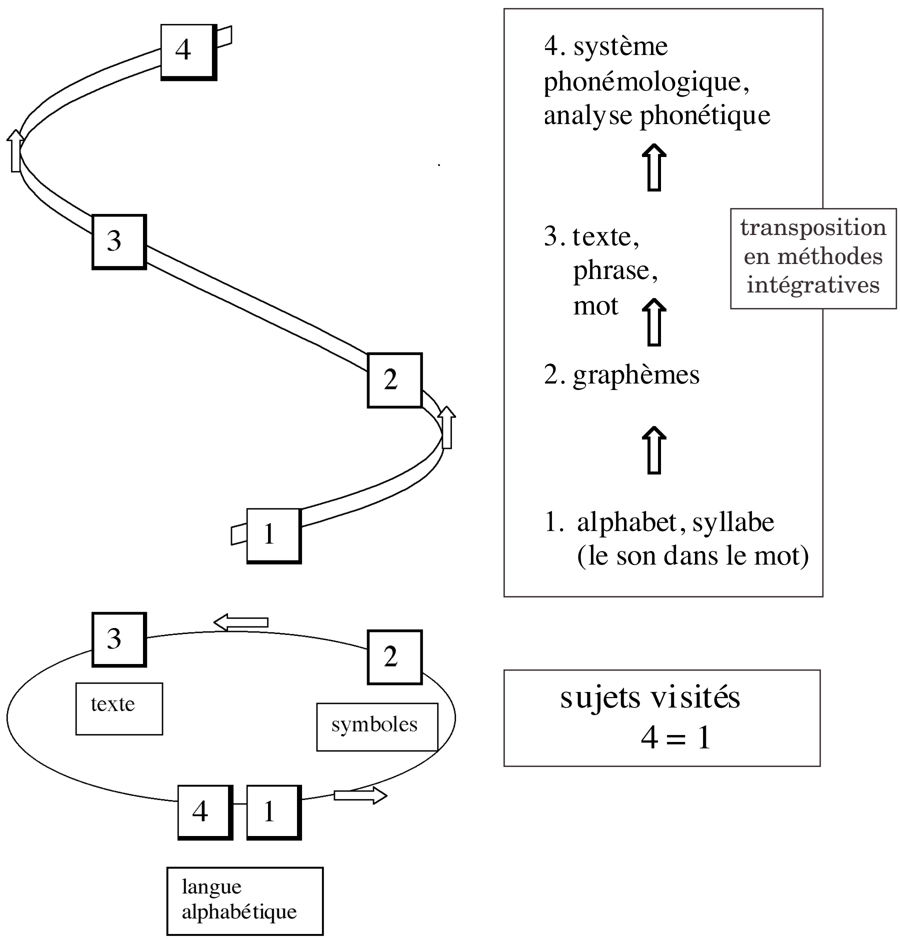

Planche 1

notera que cet alphabet simplifié est d'abord sonore, l'écriture étant ainsi primordiale, conformément au fait que c'est la langue écrite qui code la langue orale et non l'inverse.

A un niveau à peine plus élevé, dans l'alphabet complet, on trouve des associations de lettres qui produisent les graphèmes, ce qui permet de considérer 'au, eau' comme alternative à 'o' ou 'ph' comme alternative à 'f'. Mieux vaut ne pas parler de phonème, pour réserver le terme à un concept abstrait constitutif de la langue et parce qu'un phonème peut avoir plusieurs réalisations qui sont des unités phonétiques [2]. Par rapport au niveau de base, celui des graphèmes correspond à une petite extension, mais c'est déjà l'aspect graphique qui l'emporte.

Cependant ces unités ne sont là que pour constituer des mots, puis des phrases et des textes. On accède ainsi à un niveau plus élevé que le précédent.

Maintenant il y a encore au moins un niveau au-dessus de cela. On peut considérer les mots pour les comparer entre eux et considérer les commutations de sens : le fait que mon/ton/son aient un sens différent va distinguer des phonèmes m/t/s. Cela conduit à ce qu'on pourrait appeler un *système phonologique*, c'est-à-dire un ensemble de phonèmes explicatif d'une langue donnée [3]. Ce faisant on a complètement oublié les mots, de la même façon qu'en géométrie les invariants des groupes de transformations font oublier les transformations elles-mêmes. En revanche on se retrouve très exactement au-dessus du 'b-a ba' dont on est parti. L'hélice structurale est revenue sur elle-même mais en prenant de la hauteur.

Pour être un peu plus complet, il faut aussi parler de réalisation phonétique. Le message sonore est décortiqué par les phonéticiens qui opèrent une analyse de Fourier. Ils distinguent les voyelles qui sont des signaux périodiques, autrement dit des sons, et les consonnes qui sont des phénomènes transitoires, donc des bruits. Le 'b' qu'on ne peut pas prononcer ni entendre tout seul a quand même une existence phonétique. On retrouve ainsi le 'b' et sa participation à la syllabe 'ba'.

L'hélice du sens.

En même temps que l'on s'élève dans les niveaux de structure, le *sens* — non pas celui des mots mais celui de la langue — change profondément de nature. Maintenant nous n'allons pas chercher à définir précisément ce que recouvre ce « sens ». Comme notre approche est centrée sur la discipline, il ne s'agit pas du sens que peut trouver l'élève. Il s'agit d'un sens a

2 Par exemple une consonne pourra être réalisée de façon sonore ou sourde suivant sa place ; ensuite un phonème ne peut pas être défini isolément, donc au niveau structural où nous sommes encore.

3 Peut-être devrais-je employer le néologisme « phonémologique » pour signifier qu'un phonème seul n'existe pas. Les linguistes ne s'expriment sans doute pas ainsi, mais c'est l'idée de leur démarche. Noter qu'il n'y a pas a priori de solution unique, mais on impose implicitement une condition de minimalité — qui élimine par exemple une description syllabique — ce qui fait qu'on s'entendra entre spécialistes sur le choix d'un modèle. Le français d'aujourd'hui comprendrait entre 34 et 36 phonèmes ; la situation évolue d'ailleurs : on aurait tendance à confondre 'un' et 'in'.

priori, nécessaire à la construction du sens par l'élève mais sans garantie que ce dernier soit en situation de la réaliser. Pour cette raison nous nous contentons de discuter quel aspect porte sens avant quel autre, sans préjuger des conditions, par exemple d'âge, pour la traduction de ce sens chez l'élève.

C'est le niveau le bas de l'hélice qui est le plus proche des sens, du monde sensible si l'on préfère, sans qu'il en fasse directement partie cependant. En s'élevant dans le structuralisme on met en jeu des approches de plus en plus abstraites, qui s'appuient sur le sens du discours — ici du discours explicatif de la langue —, ce qui nous rapproche évidemment et dans tous les cas des mathématiques, mais en sachant bien que ces dernières n'ont pas le monopole dans ce domaine.

Les niveaux du bas vont éclairer les niveaux du haut sans que la réciproque soit vraie. Le 'b-a ba' [4] éclaire la considération d'un système phonologique. Sans cette base le système apparaîtra comme un échafaudage gratuit sans valeur sémantique, semblable à ce que pourrait être la logique formelle pour quelqu'un qui n'aurait jamais raisonné. Dans l'autre sens, s'il fallait dominer des abstractions de haut niveau pour comprendre le 'b-a ba' de base, l'apprentissage de la lecture aurait attendu longtemps et il serait réservé à quelques privilégiés.

4 Pour autant la lettre 'i' ne représente rien, même considérée comme un son. C'est a fortiori le cas l'on n'y voit qu'un symbole graphique. Il faut rattacher la lettre à un mot familier, soit en faisant reconnaître le son dans ce mot, soit en créant l'association entre le symbole et une image du mot. Maintenant un mot complet comme une conjonction ne représente rien non plus.

Les transpositions horizontales.

Le concept de transposition didactique a été introduit par Y. Chevallard [ch1]. Cette transposition opère d'un savoir savant vers un savoir enseigné, en trahissant au besoin le premier. Précisons ici que nous ne limitons pas ce savoir à un savoir enseigné universitaire. Nous y plaçons tout le savoir pérenne, dont fait ici partie le 'b-a ba' de la lecture.

Notre propos se limitera à ce que nous désignons par une transposition horizontale. Il s'agit d'une transposition didactique qui opère sur un même niveau de structuralisme. Comme le sens se construit, par enrichissements successifs, à partir des niveaux du bas, une transposition horizontale ne peut pas conduire à une entrée raisonnable pour l'apprentissage. C'est pourtant ce qui se fait, toutes disciplines confondues, dans l'enseignement d'aujourd'hui.

En matière de lecture, la transposition faite à partir des niveaux du mot, de la phrase et du texte conduit à des méthodes essentiellement *globales* [5] puisque partant du tout, demandant à l'élève d'inférer ce qu'on appelle un peu à tort la correspondance entre graphèmes et phonèmes.

En fait, puisqu'on ne peut que s'élever dans l'hélice pour ne pas perdre le

5 La culture écrite est évidemment celle des textes. La lecture n'a bien sûr d'autre but que la compréhension de textes. C'est cette idée simple, déclinée de façon structuraliste, qui fait qu'aujourd'hui on familiarise très tôt les enfants avec des textes complets, pour lesquels on fournit le message sonore correspondant avec la lecture par un adulte ou seulement le contenu par des images. C'est partant des textes que l'on descend aux phrases et jusqu'aux mots, ce qui n'est d'ailleurs pas très difficile. Pour quelques uns de ces derniers, pris dans leur globalité, on fournit aussi le message sonore et la signification.

sens, partir du niveau intermédiaire ne permettra d'accéder au 'b-a ba' qu'en passant au niveau supérieur du système phonologique.

Peut-être les méthodes dites *intégratives* résulteraient-elles même d'une transposition mêlant les niveaux intermédiaire et supérieur, ce qui expliquerait la prétention à couvrir en partie la correspondance exigée [6].

L'hélice structurale des nombres.

Venons-en aux mathématiques, à savoir aux nombres et aux grandeurs qu'ils mesurent. On va retrouver, mutatis mutandis, à peu près tout ce qu'on a dit à propos de la lecture. Je résume ici ce qui a été présenté dans [f2].

La planche 2 donne l'hélice structurale des nombres. A la base on trouve les nombres concrets, qui servent à compter ou à mesurer : on compte 3 verres, 3 crayons ou 3 livres, on mesure 3 mètres ou pèse 3 kilogrammes. Les nombres intuitifs viennent avec : le nombre 3 est ce qui compte ou mesure dans nos exemples. Plus tard l'on mesure 3,45 mètres ou l'on pèse 3,45 kilogrammes pour introduire les nombres décimaux.

C'est encore en s'appuyant sur des nombres concrets qu'on définit les opérations : addition, soustraction, multiplication et division. Par exemple on ajoute 3 mètres et 2 mètres en les mettant bout à bout pour trouver 5 mètres. Ces opérations passent immédiatement aux nombres intuitifs. C'est ainsi que les tables de multiplication se limitent à ces derniers; on n'y fait pas figurer de dimension.


DEUX 2 verres
un verre et *un* verre font *deux* verres.
Dire de même en montrant les objets :
un crayon et *un* crayon font *deux* crayons
un livre et *un* livre font *deux* livres.
Conclure un *et* un *font* deux.

Exemple d'introduction du nombre 2 et de l'addition 1+1=2 dans le manuel LIGEL1 de 1947, p 7.
L'expression « un et un font deux » se situe à niveau de structuralisme plus primitif que l'addition [7].

On monte maintenant d'un cran dans le structuralisme en considérant des lois de composition, donc le groupe additif puis l'anneau des nombres entiers relatifs [8]. Ces structures algébriques sont le pendant de la correspondance entre unités phonétiques et graphiques considérée pour la lecture.

On franchit un nouveau niveau de structure en ne considérant plus les groupes indépendamment les uns des autres et en introduisant les homomorphismes de groupes. Cela conduit aux

6 On prétend inculquer ainsi aux enfants, dès l'école maternelle, une première liste de graphèmes et de leurs équivalents phonétiques.

7 Je remercie Geneviève et Jean Brion d'avoir mis à ma disposition les deux manuels cités dans cet article.

8 Pour employer le vocabulaire usuel, j'ai dû considérer des nombres négatifs, ce qui aurait tendance à indiquer qu'il vaut mieux attendre d'avoir à introduire les nombres négatifs avant de parler de loi de composition.

L'hélice structurale des nombres

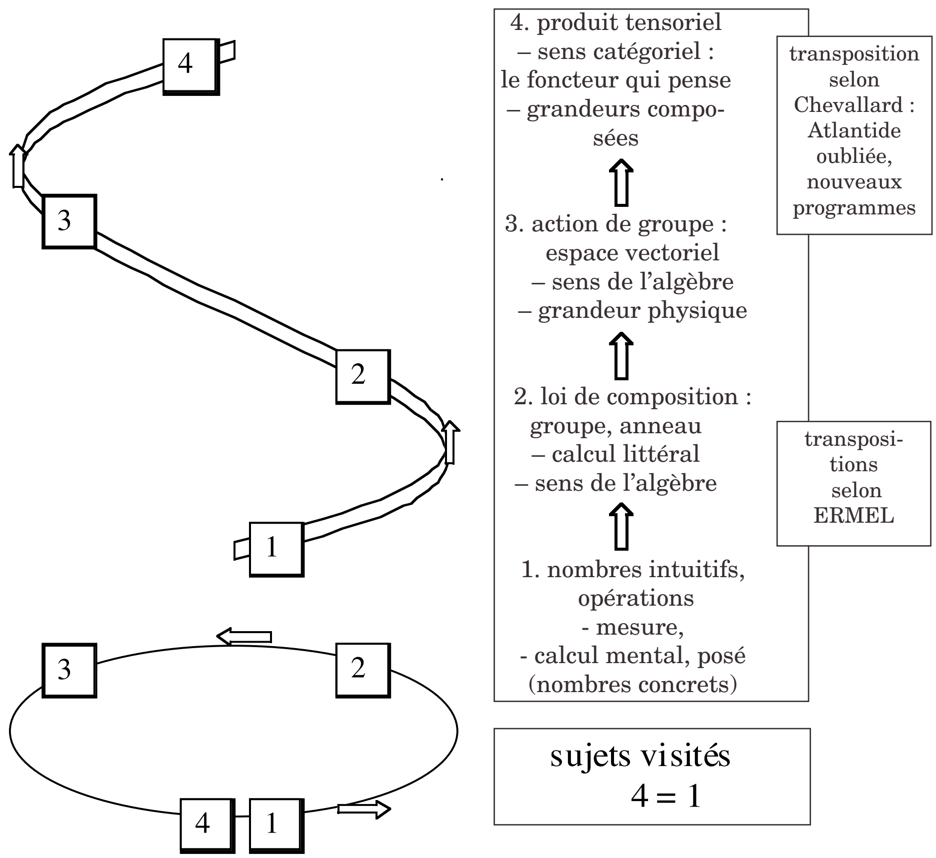

Planche 2

actions de groupe, et notamment à la notion d'espace vectoriel sur un corps.

Encore un cran et on atteint alors les applications linéaires, puis bilinéaires, lesquels mènent, en considérant un foncteur sur une catégorie, au produit tensoriel d'espaces vectoriels. Maintenant on se retrouve sur l'hélice structurale au-dessus des nombres concrets qui nous ont servi de point de départ. En effet déjà les grandeurs physiques s'interprètent comme des éléments de droites vectorielles. Les grandeurs composées sont des éléments de produits tensoriels de telles droites.

L'hélice du sens pour les nombres.

L'hélice du sens accompagne l'hélice structurale. Pour donner du sens à la notion de nombre dans l'enseignement, il faut partir des nombres concrets et intuitifs. Comme le dit Ferdinand Buisson [b], « en arithmétique on ne commence pas par lui [à l'élève] révéler les nombres abstraits, leurs rapports et leurs lois ; c'est sur des objets concrets qu'on exerce d'abord son attention… » Lors de son audition par la mission parlementaire sur l'enseignement des disciplines scientifiques et dans le prolongement de la « main à la pâte », le physicien Yves Quéré [9] explique que l'élève compte trois pommes avant d'accéder au nombre trois [q]. C'est un peu ce que nous venons de dire.

Les mêmes nombres concrets donnent un sens aux opérations, qui, comme nous l'avons dit, passent aux nombres intuitifs. Aussi est-il judicieux d'introduire très vite les quatre opérations et de faire pratiquer le calcul avant d'en enseigner les algorithmes dans le cas général. Le même Ferdinand Buisson dit bien que « le moment ne tarde pas où l'on peut lui [à l'élève] faire faire de tête et par intuition des opérations qu'il ne pourra rigoureusement raisonner que plus tard. ».

Pour être complet il faut noter que l'utilisation des lettres, pratiquée dès l'école élémentaire pour les formules d'aires et de volumes, recouvre d'abord des grandeurs. Etrangement il est aujourd'hui impossible de les utiliser en mathématiques, comme variables et paramètres, dans le second degré.

Elevons-nous un peu sur l'hélice. Il arrive malgré tout un moment où l'on doit apprendre à travailler sur des nombres abstraits. C'est le cas lorsqu'on propose une opération complexe, par exemple à l'occasion des règles de trois, ou lorsqu'on fait du calcul littéral sans paramètres.

Ce qu'on perd de sens physique avec l'absence de dimensions explicites est compensé par la possibilité d'appliquer des automatismes de calcul : passage d'un membre à l'autre dans une équation, simplification haut et bas dans une fraction etc. C'est alors le sens de l'algèbre qui remplace l'intuition immédiate.

Pour que cela s'applique aux calculs faits par l'élève, encore faut-il quelques

9 Maintenant Yves Quéré se plaint de ne pas être compris par les mathématiciens. Sans le savoir il s'adresse à ces champions de l'interdisciplinarité, qui ont inspiré les programmes. Or, comme nous le verrons, ces programmes ne respectent pas le sens de parcours de l'hélice. Le physicien se trompe en s'adressant à l'un de ses sept collègues de l'Académie des sciences, auteurs d'un texte qui critique justement ces programmes [7].

conditions. Comme le dit Henri Lebesgue [le], en parlant du rôle capital joué par les considérations abstraites et savantes, « ceux à qui sont dues ces considérations ont pu se mouvoir dans l'abstraction et faire cependant oeuvre utile précisément parce qu'ils avaient un sens particulièrement aigu de la réalité ; C'est ce sens qu'il faut s'efforcer d'éveiller chez les jeunes ; après, mais après seulement, le passage à l'abstrait peut être profitable ; lorsque que sous l'abstrait on continue à voir le concret et, dans le cas général, tous les cas vraiment utiles ». Pour celui qui n'aurait pas acquis un « sens aigu » de la réalité des opérations, ces règles qui les gouvernent sont impossibles à maîtriser et se révèlent plus piégeuses qu'utiles [10].

Aux niveaux supérieurs de l'hélice, on dispose d'une part de l'éclairage apporté par le bas avec les grandeurs physiques, simples ou composées, et du sens catégoriel, celui du « foncteur qui pense », lequel est une extrapolation du sens de l'algèbre ordinaire. C'est un secours dans la mesure où l'on peut alors se passer de refaire indéfiniment les mêmes petits raisonnements, mais si on ne les a jamais faits en les comprenant en profondeur, si l'on n'a pas une collection d'images concrètes derrière les mots creux, c'est plus un handicap qu'autre chose.

Transpositions didactiques pour les nombres.

La transposition didactique horizontale qui consiste à partir des structures algébriques pour introduire les nombres, suivant la stratégie dite des « mathématiques modernes », a fait les beaux jours du groupe ERMEL de l'INRP. Comme on le verra, on n'en est pas complètement revenu, hélas. Pire on va ajouter aujourd'hui à cette transposition se plaçant à un niveau moyen une transposition qui se place à un niveau de structuralisme encore plus élevé [11].

Partir du niveau supérieur est en effet la nouvelle tendance. La notion de nombre concret a fait l'objet de « mathématisations » diverses, comme celle de d'Yves Chevallard [ch3] qui est tirée d'un article d'Hassler Whitney [w] et que j'ai considérée dans [f2] avec quelques autres. Aucune ne présente d'intérêt véritable, puisque les produits tensoriels, dans leur conception moderne qui date d'un demi-siècle, répondent proprement à la question [12].

Cependant l'enseignant de l'école, du collège et même du lycée pourra ignorer le premier mot des produits tensoriels sans le moindre inconvénient. D'abord, dans le cas particulier des droites vectorielles, on n'y voit rien. Surtout, comme on l'a dit, c'est le

10 Il est par exemple significatif que certains enseignants de collège préconisent d'interdire la règle de changement de membre dans les équations, parce qu'elle serait responsable d'erreurs, et de suggérer d'en passer par l'application d'une même opération sur chaque membre. Mieux vaudrait traiter la raison profonde des erreurs, qui est ici la confusion entre addition et multiplication.

11 En ce sens, la doctrine pédagogique qui règne sur l'école est donc encore plus déviante pour les mathématiques que pour la lecture.

12 Indiquons à ce sujet qu'on en trouverait une présentation agréable dans le livre de Serge Lang [la]. Sinon l'encyclopédie en ligne de Springer [s] est une référence acceptable. Ici Bourbaki n'est pas optimal ; on a en effet le choix entre une édition ancienne version comportant une maladresse et une version plus récente parfaitement illisible pour le profane.

bas de l'hélice qui éclaire le haut et non l'inverse.

Les nouveaux programmes du collège.

Depuis quelques années les programmes de l'école élémentaire et ceux du collège prétendent faire une part importante à la mesure des grandeurs, mais pour commettre plusieurs contresens.

D'abord les nombres avec unités pour mesurer des grandeurs sont envisagés comme une extension a posteriori des nombres abstraits, alors que nous avons vu que mesurer des grandeurs était à l'origine du concept de nombre et donnait leur sens aux opérations. Autrement dit on s'appuie sur les deux transpositions didactiques horizontales qu'on vient de décrire.

Ensuite tout ce qui concerne la mesure reste placé dans un ghetto à la fin des programmes.

Le programme de la classe de 6ème en vigueur depuis la rentrée 2005 ne corrige en rien ces fâcheuses tendances. Pis encore, il donne la clé de la stratégie adoptée. Alors que jusqu'ici la place faite à la mesure était une concession à l'utilitarisme ambiant sans grande signification, aujourd'hui c'est sur une conception erronée mais hautement revendiquée de la Science qu'on s'appuie. C'est l'idée que les mathématiques, et avec elles leurs divers modèles, existent préalablement au monde et que l'étude de ce dernier se réduit à les appliquer. C'est ainsi qu'on parlera de « la modélisation de quelques situations » à propos du programme de sixième, belle ambition quand on se bat pour trouver un exemple vraiment pertinent en terminale scientifique. Il faut dire qu'on n'a pas peur, avec les grandeurs et leurs mesures, d'« aborder l'histoire des sciences »

Aujourd'hui, on peut lire qu'en sixième « l'utilisation d'unités dans le calcul est légitime ». Le choix de l'adjectif qualificatif est intéressant. Il nous rappelle qu'il y a quelques années cette utilisation était simplement interdite. On aurait cependant préféré un terme moins réglementaire. En même temps il ne s'agit pas que d'un droit. On devrait exiger des élèves qu'ils fassent figurer systématiquement les unités dans l'expression des résultats, comme nos collègues scientifiques nous le demandent instamment.

S'agit-il vraiment d'utiliser les unités dans les calculs d'ailleurs ? Dans les calculs on travaille de fait sur des nombres. La question de savoir où l'on doit placer la mention des unités a été discutée depuis longtemps. De mon point de vue, la meilleure façon de présenter les choses est celle que préconisait Elie Cartan en 1935 et que mentionne, sans l'approuver, Michel Delord. Sachant qu'un cahier coûte 35 centimes, on obtient le coût de 7 cahiers par :

$$35 \times 7 = 245 \text{ centimes.}$$

Ici on choisit d'abord de travailler en centimes, puis d'effectuer 35×7, et on rappelle en fin de calcul l'unité dans laquelle on a travaillé.

Dans un cas aussi simple, on aurait pu écrire les centimes après 35. Mais si l'on fait une règle de trois et a fortiori si l'on met en équation un problème, les unités devront être choisies d'abord, le calcul fait sans elles et les unités seront récupérées après.

Cela est juste pour dire qu'exprimer un résultat avec une unité n'a rien à voir avec la manipulation d'expressions algébriques, qu'elles soient justifiées par des considérations pertinentes ou non.

$$\frac{17^{\text{kg}} \times 24}{8} = 51^{\text{kg}}.$$

Dans le manuel de Courtet et Grill de 1948, p 200, on trouve une unité dans une règle de trois, mais elle est placée en exposant, suffisamment petite pour se faire oublier.

Au-delà d'aspects formels malgré tout secondaires, le reproche de voir considérés les nombres avec unités après les nombres abstraits, dans une sorte de modélisation après coup du monde physique, reste d'actualité. Les nouveaux programmes y voient l'occasion de « réinvestir les connaissances acquises en mathématiques ». Implicitement il s'agit donc d'investir en dehors des mathématiques, ce qui contredirait la légitimité concédée, à l'intérieur des mathématiques, à ces nombres avec unités. En fait, ce sont bien des situations dites de la vie courante qui sont visées.

Autre absurdité de ces programmes, il question de « grandeurs et mesures » parce qu'il faut comprendre qu'on travaillera d'abord sur les grandeurs pour ne s'intéresser qu'ensuite à leur mesure. On demande ainsi à l'élève de « se familiariser avec l'usage des grandeurs ». En quoi peut bien consister cet usage, si l'on ne mesure rien ? Alors que les grandeurs elles-mêmes sont placées en marge de mathématiques probablement plus nobles, est-ce pour ne pas se défaire du pédantisme stérilisant auquel on s'est habitué ? Il est vrai qu'on a beaucoup écrit sur les grandeurs sans la mesure, notamment dans les Irem. Cependant s'acharner à construire des opérations abstraites pour chaque grandeur, c'est ignorer que la solution aboutie est précisément donnée par la mesure. Quant à la solution primitive, qui doit être à la base de l'introduction des nombres, elle est, comme nous l'avons vu, dans l'association entre les opérations et la mesure de quelques grandeurs.

Les programmes de 5ème et 4ème qui font suite n'apportent rien de vraiment nouveau. Comme en sixième, la mesure des grandeurs concerne surtout la géométrie, puisqu'en dehors des longueurs, angles, aires, volumes on ne considère que masses, durées et vitesses en quatrième. Il est quand même surprenant de voir la géométrie éclatée entre une « géométrie des formes » et une autre des « grandeurs ». Comme Daniel Perrin [p] l'a expliqué magistralement, la géométrie des formes — au sens euclidien — se ramène à la considération des invariants que sont les longueurs, angles et aires, que les programmes placent dans la géométrie des grandeurs. D'ailleurs la topologie des formes se quantifie aussi en topologie algébrique. Si l'on veut bien admettre que la géométrie des grandeurs fait partie de la physique, autant savoir que la géométrie des formes est bien la première science physique, comme Rudolf Bkouche [bk] nous l'explique à son tour.

Certes la géométrie, comme première science hypothético-déductive, a été sacrifiée au collège avec l'abandon des cas d'égalités des triangles et avec en conséquence un statut pour la démonstration rendu purement fictif. Dans ces conditions il ne fallait donc pas attendre l'impossible des programmes.

Les nombres abstraits comme grandeurs ou la cinquième opération.

Dans un texte de Michel Delord [d], on trouve mention d'une cinquième opération dont la fonction est de voir dans les nombres abstraits des grandeurs particulières, ou si l'on préfère des nombres concrets particuliers. C'est ainsi que 15 est aussi 15 fois 1 ou 15 unités. La différence est qu'on parlera de compter plutôt que de mesurer. A ce détail près, il s'agit bien de mesurer de grandeurs.

Par la suite, je ferai opérer la multiplication *à droite* contrairement à mes habitudes, pour être en conformité avec celles de l'école élémentaire [13]. Pour cette raison j'éviterai d'utiliser « fois » qui renvoie à la multiplication à gauche et choisirai « multiplié par », malgré la difficulté de l'accord éventuel que cela entraîne.

Je serai amené à choisir d'autres nombres comme unité. Cela me gêne d'avoir à employer le terme unité à ce propos, de dire qu'on choisira la dizaine comme unité par exemple. Pourtant les manuels de l'école élémentaire l'ont déjà fait, parlant, pour la dizaine, d'une unité du second ordre ou, dans un autre cas, d'unité principale [14]. Il faut juste trouver un adjectif banal pour éviter la confusion, sachant qu'il ne s'agit pas d'une notion nouvelle. En attendant mieux, j'utiliserai le terme *subsidiaire*. Le choix revient de toute façon aux praticiens. Ce n'est pas une question sur laquelle on doive légiférer comme c'est l'habitude aujourd'hui. On emploie les mots qui permettent de bien se faire comprendre : c'est tout.

Passons en revue, d'une façon extrêmement sommaire, quelques opérations sur les nombres abstraits, entiers ou fractionnaires. Nous allons essayer de montrer que penser en termes de grandeurs simplifie l'interprétation de ces opérations. Notons, bien sûr, que l'idée d'utiliser des unités était déjà dans Lebesgue [le].

La multiplication : Par définition, 4 multiplié par 3, noté 4×3, c'est le nombre qui est compté 3 quand on choisit 4 comme unité subsidiaire.

Attardons-nous un moment sur cette multiplication. Il était déjà usuel, il y a plus d'un siècle [15], de l'introduire comme une addition répétée. Pourquoi reliait-on ainsi la multiplication à l'addition alors qu'on ne voulait pas ramener la soustraction à l'addition ou la division à la multiplication ? Ne serait-ce pas l'effet d'une tentation structuraliste ? Il y a bien dans « 3 fois 4 font 12 » la répétition 3 fois de 4. Il n'y a cependant pas explicitement la répétition d'une opération structurée ; la répétition

13 A l'écrit, comme dans le calcul posé, l'opérateur est en second. Mais à l'oral, dans les tables et dans les algorithmes, c'est inverse ; on emploie « de » pour soustraire, « fois » pour multiplier et « en » pour diviser. Ce n'est pas la place qui compte mais la fonction grammaticale ; « et » et « fois » coordonnent, alors que « de » et « en » subordonnent.

14 Je remercie Bernard Appy de m'avoir fait connaître ces pratiques, autrefois en vigueur à l'école élémentaire.

15 Comme quoi la dérive pédagogiste est aussi vieille que l'enseignement.

d'une telle opération est commune en mathématiques, mais plus savante.

D'ailleurs on ne trouve dans une multiplication que des additions du même nombre. Rien ne l'illustre mieux que la disposition en rectangle — de laquelle on tire aussi $4 \times 3 = 3 \times 4$ — qui semble primitive et indissociable du concept de multiplication. Faut-il y voir l'emprise d'une pensée ensembliste [16] ? Probablement pas [17]. Dans l'enseignement, la disposition en rectangle est bien antérieure à Bourbaki. D'ailleurs on doit avoir donné le nom de produit à l'ensemble des couples à cause de cette image [18]. Cela n'enlève rien, bien sûr, à la nécessité de savoir un jour qu'une addition répétée du même nombre est une multiplication.

Maintenant le fait que l'on puisse changer l'ordre des facteurs n'empêche pas la multiplication d'être dissymétrique, avec un multiplicande et un multiplicateur. Cela apparaît plus clairement lorsque l'un des facteurs mesure une grandeur, ce qui en fait le multiplicande, comme dans :

$$4\text{m} \times 3 = 12\text{m}.$$

Ici 12 mesure dans l'unité 1m ce que 3 mesure dans l'unité 4m. Or cette dernière façon de décrire un schéma multiplicatif, qui reste toujours le même mais pour lequel on fait subir à 3 une conversion d'unité, échange de fait opérande et opérateur.

La division : Elle présente deux aspects ; précisément 8 divisé par 4, noté 8 : 4, c'est :
2 comme taille d'une part car $8 = 2 \times 4$,
2 comme nombre de parts car $8 = 4 \times 2$,
lequel est aussi compté 2 *quand on prend* 4 *comme unité subsidiaire*.

Attardons-nous un moment également sur cette division. L'opération qui inverse naturellement la multiplication

$$4\text{m} \times 3 = 12\text{m}$$

est celle qui fait par exemple écrire :

$$12\text{m} : 3 = 4\text{m}.$$

C'est la recherche la taille d'une part dans le partage, aspect de la division que l'on donnait en premier, dès le cours préparatoire, sans parler, bien sûr, d'inverser quoi que ce soit.

Quelle opération va inverser la multiplication $4 \times 3 = 12$, exprimée comme nous l'avons fait ? On aura pris 4 comme unité subsidiaire, pour associer des groupes de 4 dans la multiplication, donc pour partager en groupes de 4 dans la division. C'est ainsi la recherche un nombre de parts, l'autre aspect de la division. A l'échange entre opérateur et opérande dans la multiplication, correspond celui entre les deux aspects de la division [19].

16 set-theoritic en anglais, collectiviste (pour collectivisante) selon Frédéric Pham.

17 Si j'insiste là-dessus, c'est parce que je m'interdis absolument de justifier l'introduction d'une notion par des arguments de science abstraite.

18 Souvenons-nous que l'élève en classe préparatoire des années 50, à qui l'on disait qu'un produit de droites représentait le plan, se montrait fort surpris.

19 Il n'y a qu'un schéma pour la multiplication ou la division, alors qu'il y a deux expressions pour la première et deux questions pour la seconde. Cependant, exiger de l'élève qu'il ait compris tout cela avant d'opérer, comme le propose Rémi Brissiaud [br], serait une erreur didactique. Il faut seulement qu'il étudie d'un côté une variété de problèmes, sans devoir tout aborder d'emblée, et de l'autre se familiarise avec une opération, identifiée par les tables et les algorithmes, laquelle unifiera les expressions et aspects rencontrés, pensant, en quelque sorte, à sa place. On retiendra donc qu'on ne peut enseigner le sens des opérations indépendamment des tables et des algorithmes de calcul.

On retiendra surtout que $4 \times 2 = 8$ donne $(8 : 4) = 2$ et que pour diviser, ici par 4, il suffit de partager en 4 une unité que l'on a rencontrée. C'est ce principe qui va conduire aux fractions.

La fraction : La fraction 3/7 est le résultat d'une division [20] ; c'est 3 divisé par 7 ; c'est :

la taille d'une part, qui n'est plus un nombre entier

non plus un nombre de parts,

mais ce qui est compté 3 *quand le septième est pris comme unité subsidiaire* [21].

On vérifie que $(3/7) \times 7 = 3$, en recomposant 7 septièmes en 1.

Maintenant 3/7 est aussi 1/7 quand on prend 3 comme unité. Autrement dit c'est $3 \times 1/7$. On devrait dire 1/7 fois 3, mais on préfère [22] dire 1/7 de 3.

Avec les fractions, toutes les divisions se ramènent ainsi à des multiplications. Au lieu de diviser par 7 on multiplie par 1/7.

La multiplication d'une fraction par un nombre : La fraction 3/7 multipliée par 4 c'est :

$3 \times 4 = 12$ en septièmes,

soit $(3 \times 4) / 7 = 12/7$.

Le produit d'un nombre par une fraction : Le nombre 4 multiplié par 3/7, qu'on désigne comme les 3 septièmes de 4, c'est :

$4 \times 1/7 \times 3$,

soit un septième de 4 multiplié par 3, soit $4/7 \times 3 = (4 \times 3)/7 = 12/7$.

On vérifie donc que $3/7 \times 4 = 4 \times 3/7 = 3 \times 4 / 7$. Remarquons que, dans ces produits, il est souvent plus efficace, quand c'est possible, de diviser « en bas » plutôt que de multiplier « en haut ». Par exemple $3/8 \times 4$ s'obtient en remplaçant chaque fraction 1/8 par la fraction 1/(8:4).

La division d'une fraction par un nombre : La fraction 3/7 divisée par 2 c'est :

3 en quatorzièmes, en divisant chaque septième en 2,

soit $3 / 7 \times 2 = 3 / 14$.

Alors $((3/7) : 2) \times 2 = 3/7$ en recomposant 2 quatorzièmes en 1 septième. On peut aussi voir $3/7 : 2$ comme $3/7 \times 1/2$ ce sui ramène au produit de fractions ci-après.

La multiplication d'une fraction par une fraction : C'est exactement comme pour un nombre ; par exemple 3/7 multiplié par 4/5, qu'on désigne comme les 4 cinquièmes de 3 septièmes, c'est :

3/7 divisé par 5 puis multiplié par 3, soit $(3 / 7 \times 5) \times 3 = (4 \times 3) / (7 \times 5)$.

On peut être tenté d'introduire le produit de deux fractions en calculant une surface.

20 Le signe de fraction n'est qu'une autre manière de représenter le symbole de division, lequel est « : » lorsque la division entière est exacte. Il est simplement plus général et beaucoup plus ergonomique.

21 Ces deux aspects de la fraction ont été considérés par Rémi Brissiaud [br] ; cependant, exiger de l'élève qu'il ait fait la synthèse avant de manipuler serait absurde. L'unification se fera par la familiarité avec la notation verticale, notation qui va aussi penser à sa place.

22 Car « fois » fait penser à la multiplication des pains de l'Evangile ; multiplier par 1/7 n'aurait pas été un miracle. Dire concurremment « 11/7 fois ... » et « 11/7 de ... » ne devrait pas choquer.

Il y a une difficulté : pourquoi la surface d'un rectangle est-elle le produit des côtés ? Pour des côtés entiers cela se vérifie. Pour des côtés fractionnaires aussi. Par exemple la surface d'un rectangle de côtés 1/4 et 1/7 est $1 / 4 \times 7$ car on place 4×7 petits rectangles de cette surface dans le carré de surface $1 \times 1 = 1$. La surface du rectangle éclaire bien le produit des fractions, mais ce n'en est peut-être qu'une justification supplémentaire a posteriori.

La division par une fraction : On la considère comme l'opération inverse du produit ; c'est ce que préconisaient Anna et Elie Cartan. Il ne faut pas abuser de cette interprétation, très structuraliste, du quotient, mais pour diviser par une fraction l'intuition a peu de prise. On se trouve dans une situation où le niveau en dessus est préférable. D'ailleurs les tentatives d'explication « naturelle » de la division par une fraction passent implicitement par l'inversion d'un processus.

On vérifie donc que diviser revient à multiplier par la fraction inversée. Evidemment cet exposé un peu sec n'est pas destiné à être reproduit tel quel dans les classes. On notera qu'il est assez proche de ce qu'on peut trouver dans des livres pour l'école primaire datant de quelques décennies. Il faudra bien sûr lui adjoindre des dessins. Ces derniers aident assurément à comprendre, mais il ne faut pas croire qu'ils soient porteurs du sens en eux-mêmes.

Grandeurs et fonctions au sortir du collège ...

La mode actuelle du retour des unités au collège est assise pour l'essentiel sur la conversion d'unités. Les exemples abondent dans l'Atlantide oubliée d'Yves Chevallard [ch2]. Or le besoin de conversion est loin d'être aussi important aujourd'hui que dans le passé. Ce sont les puissances de 10 qu'il faut bien maîtriser avec les unités modernes, et les calculs vont se faire de tête. Autrement dit, cette « algèbre » des nombres avec unités qu'on voudrait enseigner n'a plus réellement sa place. Il est assez surprenant de voir des modernistes à tout crin investir à ce point dans un passé revisité.

En même temps la mode est d'introduire les fonctions de plus en plus tôt dans le cursus. On en parlait en seconde. Maintenant on va les aborder au collège, et peut-être à l'école. Or on opère à cette occasion une transposition didactique horizontale, qui déconnecte la notion de fonction des grandeurs, si bien que l'introduction des grandeurs n'est pas exploitée là où elle aurait un rôle.

Il y a aussi une hélice structurale pour les fonctions, que nous n'avons pas représentée pour ne pas gonfler l'exposé. Au niveau du bas, il y a la dépendance fonctionnelle : une fonction est une grandeur qui dépend d'une autre, une règle de correspondance entre une variable indépendante et une variable dépendante, si l'on préfère. A un niveau supérieur de structuralisme, on trouve la définition abstraite, qui est celle des mathématiques modernes, celle qu'on trouve par exemple dans Bourbaki : une fonction est la donnée de trois ensembles, un ensemble de départ, un ensemble d'arrivée et un graphe; cependant on se limite au cas où les ensembles de départ et d'arrivée sont des intervalles. Au niveau le plus élevé, il n'y a plus de restriction sur les espaces de départ et d'arrivée ; ils peuvent être des produits tensoriels de droites vectorielles par exemple.

On retrouve ainsi le concept de grandeur qui dépend d'une autre. En même temps, les vrais mathématiciens savent se libérer des contraintes de la notation f(x), dont la lourdeur est souvent un handicap, pour s'exprimer à l'occasion comme le font les physiciens et rejoindre ainsi les pratiques du niveau de base. On trouvera dans [f1] une discussion approfondie sur le sujet.

Le choix fait pour l'enseignement d'aujourd'hui consiste à partir du niveau intermédiaire. On y ajoute juste quelques confusions inhérentes à la transposition sans doute, négligeant ainsi le rôle des ensembles de départ et surtout d'arrivée. Cela conduit à considérer des exemples de fonctions, tels que tableaux ou graphiques, pour lesquels le concept n'apporte rien. [23]

L'orientation des programmes de mathématiques, en collège comme en seconde, qui ignore la dépendance fonctionnelle, est responsable d'un décalage complet avec les besoins de la physique dans cette même seconde. Les élèves ne maîtrisent toujours pas les questions de proportionnalité. A fortiori, une proportionnalité à l'inverse du carré, comme celle donnée par la pesanteur en un point

$$g = k/d^2$$

en fonction de la distance au centre de la terre, doit-elle être expliquée par le collègue physicien qui reprend, à cette occasion, une démarche digne du défunt certificat d'études primaires : si je multiple d par 2, alors son carré est multiplié par 4, et g est divisé par 4 etc. Lorsqu'il faut reconnaître ce type de dépendance sur un graphique, les mathématiques apprises à l'école sont impuissantes. Elles ont besoin de la formule explicite et, comme elles ne savent pas gérer les paramètres, de la valeur de k. On imagine l'agrément des calculs. Il est quand même frappant que le décalage entre le programme de mathématiques et les besoins de la physique interpelle si peu les zélateurs de l'interdisciplinarité, ceux qui ont inventé les thèmes de convergence notamment. Cette schizophrénie qui frappe le monde de l'éducation est stupéfiante.

23 A l'inverse le groupe de l'IREM de Lorraine qui travaille sur les lycées professionnels a expérimenté des activités pour le collège portant sur la dépendance fonctionnelle, où l'on commence par peser des bouts de fil de cuivre, avec des résultats remarquables dans des classes pourtant difficiles [lp].

… et à l'université.

Plus tard, en première année d'université, quand va demander aux étudiants de dériver la fonction F définie par

$$F(x) = f(x) - (x - x_0 / x_1 - x_0)\, f(x_1) \\ - (x - x_0 / x_1 - x_0)\, f(x_0)\ ,$$

on s'apercevra qu'ils dérivent $f(x_1)$. Si on leur avait demandé de dériver l'expression par rapport à x pour x_0 et x_1 fixés, ils n'auraient pas commis d'erreur. Cela montre que si l'on se place trop tôt dans l'optique universitaire, alors, par l'effet d'une transposition didactique horizontale appliquée à la notation si peu naturelle qu'est $f(x)$, on interdit à jamais aux élèves devenus étudiants de comprendre les concepts qu'ils manipulent. Voilà ce qu'il en coûte de ne pas respecter le parcours suivant l'hélice.

En pratique.

La question de la mesure des grandeurs à l'école était complètement résolue dans l'enseignement d'il y a un demi-siècle. Elle arrivait progressivement avec les nombres et les opérations, elle irriguait systématiquement les problèmes. Il n'y a donc strictement rien à inventer aujourd'hui. D'ailleurs, dans le meilleur des cas, les physiciens, avec, à l'école, la « main à la pâte » qui leur est chère et qui n'est jamais qu'une leçon de choses revisitée, retrouveront-ils un peu le fil de l'enseignement traditionnel. Plus tard dans le cursus, la physique bénéficiait d'une familiarité avec les grandeurs, avec les dépendances entre elles, qui lui permettait d'avancer sans souci.

Il reste quelques questions délicates comme la différence entre masse et poids. On ne peut pas la comprendre vraiment sans disposer de la loi fondamentale de la dynamique. A l'école, je pense qu'on devrait d'abord dire que le poids résulte de l'attraction exercée sur une masse donnée par la terre ou une autre planète. On devrait expliquer qu'une même masse peut avoir un poids différent suivant l'endroit où l'on se place, parler de l'homme sur la lune par exemple. Cela dit, on compare des masses en comparant leur poids en un lieu donné, à l'aide d'une balance en général. On donnera évidemment l'unité de masse qui est le kilogramme, et les unités dérivées. En revanche je ne suis pas sûr qu'il faille donner l'unité de poids, c'est-à-dire de force. Rien n'empêche de s'exprimer ainsi : « peser 1 kg » signifie « peser comme une masse de 1 kg », sous-entendu « sur la terre ». De même : « un poids de 1kg » est « un poids égal à celui d'une masse de 1kg ».

Ce faisant on reste proche de la vie courante ; c'est une grave erreur de croire que les mathématiques, comme la Science en général, doivent systématiquement s'écarter du langage courant. On évite aussi d'encombrer la tête des jeunes enfants avoir des considérations dont ils ne peuvent absolument pas saisir la pertinence ; paradoxalement on se rapproche davantage de l'esprit de la « main à la pâte » qu'en se conformant à l'orthodoxie scientifique, laquelle prend trop souvent des allures de vérité révélée dans l'enseignement d'aujourd'hui. Autrement dit, restons modestes en tout. Ayons le goût des choses simples, comme le dit Laurent Lafforgue. Et bannissons ce scientisme fumeux qui nous envahit.

Bibliographie

[bk] Bkouche (Rudolf). *La géométrie élémentaire, une science physique ?* en ligne :

http://www.univ-irem.fr/commissions/geometrie/P4.pdf

[br] Brissiaud (Rémi). *Allègements successifs des programmes. Une légèreté didactique ?* En ligne sur le site de la Société mathématique de France à l'adresse : http://smf.emath.fr/Enseignement/TribuneLibre/EnseignementPrimaire/CahiersBrissiaud.pdf

[b] Buisson (Ferdinand). *Intuition et méthode intuitive*. Dictionnaire de pédagogie et d'instruction publique, 2ème partie, tome 2, pp 1374-1377, Hachette, 1887

[ch1] Chevallard (Yves). *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*, La pensée sauvage, réédition revue et commentée, Grenoble 1991

[ch2] Chevallard (Yves) et Bosch (Marianne). *Les grandeurs en mathématiques au collège*, Partie I : *une Atlantide oubliée*, Petit *x* 55, pp 5-32

[ch3] Chevallard (Yves) et Bosch (Marianne). *Les grandeurs en mathématiques au collège*, Partie II : *mathématisations*, Petit *x* 50, pp 43-76

[d] Delord (Michel). *A propos des nombres concrets et abstraits : un témoignage historique sur l'école primaire française*, 2004, en ligne :

http://michel.delord.free.fr/banff.pdf

[f1] Ferrier (Jean-Pierre). *La notion de fonction*, commision InterIREM du second cycle, 2004-2005, en ligne sur :

http://www3.ac-clermont.fr/pedago/maths/pages/secondcycle/

le fichier :

Actes_de_la_Commission_Inter_IREM_Second_Cycle.htm

[f2] Ferrier (Jean-Pierre). *L'hélice structurale et l'hélice du sens en didactique du calcul*, Actes de l'université d'été de Saint-Flour : le calcul sous toutes ses formes, pp 199-241, 2005

[la] Lang (Serge). *Linear Algebra*, Springer

[le] Lebesgue (Henri). *La mesure des grandeurs*, L'enseignement mathématique, Genève 1931

[lp] Lycées professionnels, groupe de l'Irem de Lorraine, en ligne sur :

http://www.irem.uhp-nancy.fr/

[p] Perrin (Daniel). Actes du colloque InterIrem sur le second degré, Limoges, 2004

[q] Quéré (Yves). Audition dans le rapport d'information sur l'enseignement des disciplines scientifiques dans le primaire et dans le secondaire, rapporteur : Jean-Marie Rolland, 3 mai 2006, en ligne :

http://www.assemblee-nationale.org/12/dossiers/enseignement_disciplines_scientifiques.asp

[s] Springer. Encyclopédie en ligne : http://eom.springer.de/