PETITE HISTOIRE DES RAPPORTS ENTRE GRANDEURS ET NUMERIQUE DANS LES PROGRAMMES DE L'ECOLE PRIMAIRE

Christine CHAMBRIS
IUFM de Versailles
DIDIREM – Irem Paris 7

Résumé : *La réforme des mathématiques modernes a introduit des modifications profondes dans l'étude des mathématiques en primaire. Les instructions de 1970 apportent en effet une double modification : affirmation d'un modèle d'apprentissage constructiviste et création du numérique. La situation des grandeurs dans le programme actuel constitue un héritage complexe de ces choix. Nous tentons de le décrypter.*

1. Introduction

En mathématiques, les grandeurs ont été un puissant moteur du développement des nombres et du calcul. Matériau initial de l'élaboration des nombres, elles ont été remplacées, dans cette construction, par les entiers à la fin du 19ème siècle. L'importance épistémologique des grandeurs dans la construction des nombres a donc fortement varié au fil du temps.

Avant la réforme des mathématiques modernes, l'enseignement des grandeurs occupe une place importante dans l'arithmétique du primaire. En 1970, les grandeurs disparaissent quasiment de l'étude des nombres, des opérations et de la proportionnalité. Dans le même mouvement, on crée une rubrique « mesures : exercices pratiques ». Les programmes ultérieurs introduisent, localement, des grandeurs dans différentes rubriques du « numérique », sans toutefois supprimer la rubrique qui leur est dédiée.

A quels besoins répond la création du domaine mesure en 1970 ? Qu'en est-il de ces besoins, aujourd'hui ? Quand les grandeurs disparaissent de l'étude d'une notion, quelles modifications dans l'étude cette disparition implique-t-elle ? Comment comprendre les évolutions récentes du programme dans le numérique impliquant, explicitement ou implicitement, des grandeurs ?

Pour étudier ces questions, nous conduisons une étude du programme de 1970 et la replaçons dans une étude plus globale des programmes de l'école primaire depuis le début de l'école obligatoire jusqu'à aujourd'hui. Nous essayons d'abord de repérer les déterminants de la création du domaine mesure en 1970. Ensuite, comme l'âge des élèves qui nous intéressent implique nécessairement « une bonne dose de concret » dans les mathématiques qu'on leur enseigne, nous essayons de comprendre en quoi les grandeurs disparaissent des programmes en 1970. Enfin, nous tentons de caractériser les retours des grandeurs dans les programmes récents. [1]

2. Histoire de la naissance du domaine mesure

2.1 Eléments du contexte

Au primaire, le programme de 1970 est connu comme étant celui des mathématiques modernes. Pour ses auteurs, il s'agit de répondre à deux types d'impératifs qui découlent d'une part « d'une scolarité obligatoire prolongée », d'autre part « de l'évolution contemporaine de la pensée mathématique ». Il ne s'agit donc,

> plus essentiellement de préparer les élèves à la vie active et professionnelle en leur faisant acquérir des techniques de résolution de problèmes catalogués et suggérés par « la vie courante », mais bien de leur assurer une approche correcte et une compréhension réelle des notions mathématiques liées à ces techniques.

En 1923 et 1938, mais pas en 1945, les instructions avaient suggéré d'introduire des démarches actives pour l'enseignement. L'introduction des instructions de 1970 se termine ainsi :

> c'est par des démarches de cette nature, faites d'actions et de réflexion, que l'enfant contribuera à construire son propre savoir et connaîtra la joie de découvrir et de créer.

En 1970, ce projet est en outre soutenu par « les progrès dans la connaissance du développement psychologique de l'enfant ».

Le programme est cependant une réécriture allégée de celui de 1945 :

> Alléger le programme [de 1945], en donner une rédaction différente qui réponde mieux aux finalités actuelles de l'école élémentaire, l'accompagner de commentaires qui, sans introduire pratiquement de terminologie nouvelle, annoncent et préparent une rénovation plus profonde et plus satisfaisante.

Avant 1970, le programme est intitulé : calcul, arithmétique et géométrie. En 1970, il devient « l'enseignement mathématique », puis « mathématiques » à partir de 1980.

Deux parties sont marquées clairement dans les programmes de 1882 et 1923 : calcul, arithmétique d'une part, géométrie d'autre part (sauf en classe enfantine et au CP où il n'y a pas de géométrie). Dans le programme de 1945, la séparation entre les deux parties n'est pas explicitée, cependant l'ordre des notions n'est pas très différent de celui de 1923.

Une modification très nette apparaît en 1970. A partir de cette date et jusqu'à

1 Nous avons consulté les programmes et instructions de 1882, 1923, 1945, 1970, 1977 à 1980, 1985, 1995, 2002.

aujourd'hui, le programme comporte trois parties. Les intitulés des différentes rubriques, voire leur nombre, varient au fil du temps, mais globalement on peut dire que depuis 1970 le découpage du programme du primaire est le suivant :

— le numérique [2],

— la géométrie,

— la mesure [3].

Le programme de 1970 est une « rédaction différente » du programme antérieur, une réorganisation aussi. Le domaine mesure rassemble d'une part l'étude des grandeurs continues usuelles, longueur, masse, durée, des instruments qui les mesurent et du système métrique qui apparaissait dans « calcul et arithmétique », d'autre part celle des grandeurs géométriques, aire et volume [4], qui relevait de la « géométrie ». [5] Les problèmes d'échelle, quant à eux, quittent le géométrique pour rejoindre le numérique et d'autres problèmes de « règle de trois ». Comment comprendre cette réorganisation du programme ?

2.2 Le domaine mesure à sa naissance

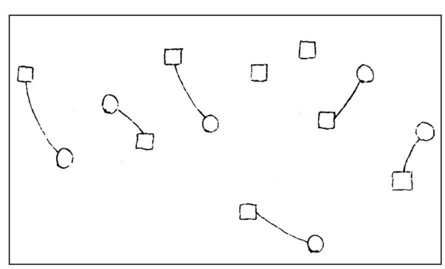
Dès les premières pages des instructions du domaine « Mesures : exercices pratiques », on trouve des expériences ou situations sur les longueurs, masses, durées, volumes à propos d'objets déjà rencontrés dans le « numérique » : les nombres et les opérations. Nous rapprochons les prescriptions respectives des deux domaines. D'abord, nous nous intéressons à l'étude des nombres entiers et des opérations sur ces nombres, ensuite à celle des nombres non entiers, décimaux puis fractions.

Dans le domaine « Nombres et opérations », on indique que :

> L'emploi systématique de la correspondance terme à terme permet de classer des ensembles et d'attribuer à chaque classe un nombre : ainsi la classe de tous les ensembles qui ont autant d'objets que l'on a de doigts dans une main définit le nombre naturel « cinq ».

On définit donc le nombre comme une classe d'équivalence d'ensembles et ces ensembles sont des ensembles d'objets discrets.

Un peu plus loin, on évoque la comparaison :



> Exemple : des objets carrés et des objets ronds sont disposés sur la table. Comparer le nombre des objets carrés au nombre des objets ronds. L'impossibilité d'épuiser les objets carrés en

2 Le numérique est, en fait, souvent découpé en plusieurs rubriques.
3 En 1970, l'intitulé est « mesures : exercices pratiques », il deviendra ensuite « mesurer », « mesurer des grandeurs », « mesure », « grandeurs et mesure(s) » en 2002. Le plus souvent nous utiliserons l'expression *domaine mesure*, indépendamment de l'époque.
4 La capacité, qui relevait de l'arithmétique, est assimilée au volume dans ce programme.
5 En 1945, l'utilisation des instruments de mesure des longueurs apparaît en arithmétique au CP et en géométrie au CE.

> faisant correspondre à chaque objet rond un objet carré permet de conclure, sans dénombrer les objets, que le nombre d'objets ronds est plus petit que le nombre d'objets carrés ou que le nombre des objets carrés est plus grand que le nombre des objets ronds.

Dans « Mesures », on retrouve la comparaison puis le nombre :

> 2.1 Une activité préparatoire à la mesure consiste, pour les enfants, à chercher des expériences permettant de répondre à des questions telles que :
>
> A est-il plus grand que B ?
>
> C contient-il autant que D ?
>
> E met-il moins de temps pour venir à l'école que F ?
>
> G est-il plus lourd que H ?
>
> Trouver des objets plus lourds que K et moins lourds que L.
>
> 2.2 Peu à peu au cours des activités précédentes, va se dégager l'idée que de nombreuses comparaisons peuvent s'exprimer en utilisant des nombres. Par exemple la longueur d'une certaine règle est double de la longueur d'un certain crayon.
>
> Si, de façon arbitraire on attribue à la longueur du crayon le nombre 1 (c'est-à-dire si on choisit ce crayon comme unité), la longueur de la règle est 2. Pour un objet donné, on peut s'intéresser à diverses mesures. (…)

Le nombre entier n'apparaît donc plus comme une classe d'équivalence d'ensembles d'objets discrets mais comme une mesure du continu : le rapport entre deux grandeurs continues de même espèce.

Dans « Nombres et opérations », l'addition est définie comme l'opération sur les nombres associée à la réunion d'ensembles :

> Soient les nombres 8 et 7.
>
> Prenons un premier ensemble de 8 objets, puis un second ensemble de 7 objets, tous distincts des précédents. La réunion de ces deux ensembles, quelle que soit la nature des objets, est un ensemble de 15 objets.
>
> On dit que le nombre 15 est la somme des nombres 8 et 7, ce qui s'écrit, en utilisant le signe + (plus) :
>
> $$8 + 7 = 15$$

Cette réunion est donc une réunion d'ensembles d'objets discrets. C'est une opération matérielle, qui plus est, sans équivoque : *on fait un tas avec deux tas*.

Si on considère que les objets *sont* les 8 cm et 7 cm qui constituent deux barres, que signifie réunir ces deux ensembles ? Combien a-t-on d'objets ?

En fait, l'addition de longueurs est évoquée dans le commentaire de « Mesures ». On y indique en effet que :

> Certaines expériences conduisent à effectuer la somme (...) de deux mesures.

Un exemple concerne alors le cas des longueurs :

> On forme une barre en mettant bout à bout deux règles dont les longueurs,

l’unité étant le centimètre, sont 12 et 5. La longueur de la barre en centimètres est (12 + 5) .

Dans « Nombres et opérations », on introduit la soustraction comme suit :

Exemple : Parmi 15 fruits, 8 fruits seulement sont des pommes.

Le nombre des fruits qui ne sont pas des pommes est alors celui qui complète l’égalité 8 + . = 15 ou . + 8 = 15

[…] On dit que 7 est la différence des nombres 15 et 8 et on écrit en utilisant le signe – (moins) :

$$15 - 8 = 7$$

Dans « Mesures », on évoque, sans donner d’exemple, les

expériences qui conduisent à effectuer (…) la différence (…) de deux mesures.

Dans « Nombres et opérations », la multiplication est définie. On se place d’emblée dans un contexte d’objets déplaçables, on choisit une disposition en rectangle pour eux et on introduit la multiplication :

Des objets sont disposés en lignes et colonnes de la façon suivante :

+ + + + + + + +
+ + + + + + + +
+ + + + + + + +
+ + + + + + + +
+ + + + + + + +

On peut répartir ces objets en 5 ensembles de 8 objets.

Le nombre d’objets est (8 + 8 + 8 + 8 + 8) qu’on écrit selon une convention généralement adoptée (8×5).

Le nombre des objets est (5 + 5 + + 5 + 5 + 5 + 5 + 5) que l’on écrit avec la même convention (5×8)

Ceci justifie l’égalité :

$$(8 \times 5) = (5 \times 8) .$$

La multiplication est donc introduite comme une addition itérée. On aurait pu écrire $3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 3 \times 5$ par définition et éventuellement associer à cette définition sur les nombres différents contextes matériels, ce n’est pas ce qui est fait. L’exemple choisi ici permet, au changement d’orientation près du quadrillage, d’obtenir la commutativité tout de suite. La disposition proposée, et c’est volontaire, ne permet pas de mettre en évidence la dissymétrie des facteurs : la définition de la multiplication est noyée dans la commutativité. Cette propriété semble même aller de soi, c’est donc à peine une propriété. A la fin de la présentation de l’étude de la multiplication, on peut d’ailleurs lire :

$(8 \times 5) = (5 \times 8) = 40$

La multiplication est commutative. Les deux nombres 8 et 5 jouent le même rôle. [6]

Par suite, de quelle commutativité s’agit-il ? L’égalité sur les nombres obtenue dans le cas discret est-elle transférable au cas du continu sous prétexte qu’on mesure aussi le continu avec des nombres ?

S’il s’agit de 5 baguettes de 8 cm mises bout à bout, sera-t-il toujours aussi évident d’une

6 C’est nous qui soulignons.

part que la longueur se calcule avec une multiplication, d'autre part que $8 \times 5 = 5 \times 8$, autrement dit qu'on obtient la même longueur en mettant bout à bout 8 baguettes de 5 cm ou 5 baguettes de 8 cm ?

De même qu'on trouvait l'addition et la soustraction dans le domaine mesure, on y trouve aussi la multiplication. On assiste cependant à un *dérapage* puisqu'il est alors question d'

> expériences qui conduisent à effectuer […] le produit […] d'une mesure par un nombre entier

On retrouve un multiplicande, la mesure, et un multiplicateur, le nombre entier. Le discours commutatif n'est pas tenable car *les deux facteurs ne jouent pas le même rôle*.

Pour la première fois, en 1970, on évoque dans le programme de l'école primaire les deux divisions : exacte et euclidienne. Cette distinction apparaît dans « Nombres et opérations ».

A propos de la division exacte, on écrit :

> Exemple : On a obtenu un ensemble de 56 objets en réunissant 7 ensembles qui comprennent chacun le même nombre d'objets.
>
> Il est naturel de désigner ce nombre par un signe (• , ❑) ou une lettre quelconque) et d'écrire une égalité entre les deux expressions du nombre de tous les objets.
>
> 56 = 7 × ❑ ou 56 = ❑ × 7 (commutativité de la multiplication)
>
> ❑ représente un nombre que l'on peut désigner directement par l'expression (56 : 7) .
>
> La division exacte est l'opération qui associe aux nombres 56 et 7 leur quotient exact (56 : 7) .

A propos de la division euclidienne, on écrit notamment :

> Exemple : on veut distribuer équitablement 17 cerises entre 3 enfants. […] On constate que :
>
> $$(3 \times 5) < 17 < (3 \times 6)$$
>
> Et aussi que $17 = (3 \times 5) + 2$
>
> Le plus grand nombre de cerises que l'on puisse donner à chaque enfant est 5 ; 2 cerises ne sont pas distribuées.
>
> La division euclidienne de 17 par 3 fait correspondre au couple de nombres (17 ; 3) le couple (5 ; 2). […]

Dans « Mesures », on indique que :

> Certaines expériences conduisent à effectuer (…) le quotient d'une mesure par un nombre entier.

Comme il s'agit ici de partager une grandeur continue en un nombre entier de parts, il ne peut y avoir de reste. Dans ce cas, la division euclidienne n'a pas de pertinence car le quotient est toujours exact mais ce n'est pas relevé. Comme pour les autres opérations, aucune allusion au paragraphe « Nombres et opérations » n'est faite dans « Mesures », si ce n'est la reprise des mots *quotient* et *produit*.

Les trois exemples du programme relatifs à la division s'appuient donc sur les grandeurs : discrètes dans « Nombres et opérations », continues dans « Mesures : exercices pratiques ».

Dans le domaine mesure, le nombre sert à mesurer le continu, il n'y a plus d'ensembles d'objets et plus de correspondance terme à terme pour le définir. L'addition correspond à une *expérience* qui ne consiste pas en la réunion de deux ensembles. A propos de la multiplication, on passe d'une approche commutative par une disposition d'objets en rectangle au « produit d'une mesure par un nombre entier ». Quant à la « division d'une mesure par un entier », elle ne peut pas être euclidienne. Ainsi, dans « Mesures », retrouve-t-on des objets du domaine « Nombres et opérations » : nombre, comparaison, addition, soustraction, multiplication, division, mais redéfinis si besoin.

En fait, le domaine « Nombres et opérations » semble restreindre l'étude du nombre entier à la mesure du discret, la mesure du continu étant cantonnée à « Mesures ». Le même choix est fait pour l'étude des opérations. D'un point de vue didactique, on peut penser que l'étude des nombres et des quatre opérations dans « Mesures », sur le continu donc, va compléter l'étude des nombres et des opérations prescrite dans le domaine numérique, sur le discret. La question de l'articulation entre les deux domaines n'affleure pas dans le commentaire. Une phrase sibylline conclut d'ailleurs l'introduction de la rubrique « Opérations. Propriétés. Pratique. » dans le domaine « Nombres et opérations » :

> Il est essentiel de comprendre que l'addition, la multiplication ne portent que sur des nombres. Il est tout aussi important que les enfants reconnaissent les situations auxquelles correspondent ces opérations.

Rien n'est dit sur la contribution du domaine mesure pour la reconnaissance des situations, la connaissance du sens des opérations.

Poursuivons notre confrontation du contenu des deux domaines avec l'étude des nombres non entiers. En 1970, ce sont les changements d'unités qui fondent le nombre décimal :

> [Au cours moyen] les enfants savent écrire et nommer les nombres naturels à partir de groupements d'objets d'un ensemble.
>
> On peut chercher à mettre en évidence le nombre des groupements d'une certaine espèce.

Tous les exemples détaillés dans la rubrique « nombres décimaux » portent sur des grandeurs discrètes. Le premier exemple est un changement d'unité en nombre entier :

> Le nombre d'habitants de la France est cinquante millions. Si l'on imagine une répartition des français en groupements comprenant chacun un million d'habitants, le nombre de ces groupements est 50.
>
> Il exprime la population de la France, le million étant choisi comme unité.
>
> Si les groupements choisis comprennent cent habitants, la population s'exprime par le nombre entier qui s'écrit : 500 000.

Un peu plus loin, il s'agit d'une population de 10 850 habitants.

> Le millier étant choisi comme unité, la population s'exprime par le nombre décimal 10,850.

Suit un autre exemple en base 4 :

> — Lorsque l'enfant est choisi comme unité, la population de la classe s'exprime par l'écriture 123,
>
> — Lorsque le « groupe » (quatre enfants) est choisi pour unité, la population de la classe s'exprime par l'écriture 12,3.

De même, le seul exemple d'opération sur les nombres décimaux fait référence au discret.

A la fin de la rubrique « définition et écriture des nombres décimaux », après la liste d'exemples de conversions d'entiers en décimaux arrive, enfin, une phrase relative au système métrique, au continu donc :

> D'autres exemples pourront être trouvés à l'occasion d'exercices de mesure utilisant le système métrique.

Nous pensons qu'on renvoie implicitement aux exercices du domaine mesure. Aucun exemple n'est développé. Comme en écho, les instructions de « Mesures » se terminent par :

> 2.5. Système métrique.
>
> L'étude du système métrique permet aux élèves de connaître notre système d'unités légales et aussi d'utiliser les nombres décimaux.

Nous indiquons maintenant le seul exemple des instructions relatif à la définition du nombre décimal qui relève du continu, on le trouve dans « Mesures » (avec un renvoi à la rubrique du numérique où on définit le nombre décimal), à propos du changement d'unités, c'est en base 10 :

> Prenons comme unité le carreau, la mesure de la surface A ou aire de A que l'on peut noter mes A ou aire A peut être obtenue par un simple dénombrement de carreaux.
>
> Dans cet exemple aire A = 28 […]
>
> Si on choisit comme unité de surface un rectangle de dix carreaux, l'aire de A est le nombre 2,8.

Ici, comme dans le numérique, le nombre décimal sert à réécrire un nombre entier dans une unité « plus grosse ». Puisque la définition du nombre décimal ne repose pas sur un fractionnement de l'unité, elle ne permet pas d'affiner la précision d'une mesure, elle ne fait que proposer une écriture nouvelle d'une information qu'on a déjà, ce qui nous semble limiter son intérêt. L'approche utilisée dans les deux domaines est identique et les nombres décimaux sont étudiés sans qu'on fractionne le continu.

Par ailleurs, les nombres décimaux sont exclusivement décrits à partir du discret, dans le numérique. Ils sont évoqués, à propos du continu pour les « exercices pratiques de mesure ». Pour cette étude, on retrouve que la rupture discret / continu correspond effectivement au découpage numérique / mesure.

Venons-en aux fractions. Dans le domaine numérique,

> Les fractions sont présentées à partir de la notion d'opérateur. [...]
>
> D'une façon générale, x et y désignant des nombres naturels, avec $y \neq 0$, multiplier par $\frac{x}{y}$ revient à multiplier par x puis diviser le résultat par y .

Les tâches suggérées pour l'étude des fractions consistent essentiellement à remplir des tableaux de nombres sans contexte. Cette approche ne concerne *a priori* pas davantage le discret que le continu mais il s'agit toujours d'opérer sur des entiers avec les limites que cela implique : à savoir que les divisions exactes ne sont pas toujours définies et que cela pose problème notamment quand il faut composer les opérateurs et les faire commuter car les domaines de définition ne coïncident pas en général. Cela est constaté par le programme. La rubrique qui suit la définition des fractions est consacrée aux opérateurs équivalents et on y définit les fractions équivalentes.

Retenons que la définition des fractions permet, elle aussi, de se passer du fractionnement de grandeurs.

La seule évocation d'*utilisation* des fractions se trouve dans l'introduction du domaine mesure, on précise que :

> Des expressions telles que un quart d'heure, un demi-litre, avoir parcouru les trois quarts du chemin, un quart de beurre, utilisent le vocabulaire des fractions.
>
> L'étude des situations correspondantes peut donner lieu à des calculs numériques.

On se trouve dans le domaine mesure et on se réfère au continu.

Ainsi, comme pour les décimaux, d'une part les instructions séparent l'étude des fractions en deux parties : ce qui relève du discret dans le « numérique », ce qui relève du continu dans « mesures » et d'autre part cette construction évite de fractionner les grandeurs.

A sa création, « Mesures » semble être le lieu du continu et le « numérique », celui du discret. Des objets identiques semblent être étudiés dans les deux domaines avec des approches plus ou moins compatibles. Ainsi la création du domaine mesure semble-t-elle marquer la volonté d'éclater l'étude des nombres et des opérations en deux : ce qui mesure le discret d'une part, ce qui mesure le continu d'autre part.

On peut probablement dire que les nombres et opérations sont construits à partir des grandeurs discrètes puis utilisés sur le continu. La part réservée au continu est cependant modeste :

> Les notions numériques qui constituent l'essentiel du programme sont présentées dans le paragraphe 1. Les paragraphes suivants proposent des thèmes d'activités plus divers (...).

Le programme de 1970 est une réécriture du programme antérieur. La rédaction des instructions de « Mesures », nous renseigne notamment sur l'importance probablement accordée à l'étude du sens des quatre opérations sur les grandeurs continues usuelles, dans les pratiques antérieures à 1970.

2.3 Point de vue mathématique

Jusqu'au milieu du 19ème siècle, les nombres non entiers sont pensés en prenant appui sur les grandeurs, objets sensibles idéalisés. Par exemple :

— l'unité c'est :

— 3 quarts ou 6 huitièmes de l'unité c'est :

Au 19ème siècle, au moment de la crise des géométries non euclidiennes, l'ensemble des nombres réels n'existe pas encore. Néanmoins, on utilise déjà ces « nombres » depuis longtemps.

Cette crise n'implique pas directement les grandeurs. Cependant, elle a conduit à évacuer toute référence au « monde sensible » dans les axiomatisations contemporaines des objets mathématiques.

Les grandeurs sont progressivement écartées des mathématiques. Dans la construction des rationnels fondée sur les nombres entiers (vers 1860), le nombre trois quarts est l'ensemble des couples d'entiers équivalents à (3 ; 4). La relation (a , b) ~ (c , d) signifie $a \times d = b \times c$. Le couple (3 ; 4) est donc équivalent à (6 ; 8) car $3 \times 8 = 6 \times 4$.

Les nombres entiers sont considérés comme des objets premiers. Les premières constructions de l'ensemble des réels (vers 1870) ne feront pas référence aux grandeurs. Un peu plus tard, ce sont les ensembles qui deviendront les objets premiers et on tirera les entiers des ensembles.[7]

Revenons aux instructions de 1970. Compte-tenu notamment de l'insistance sur le vocabulaire ensembliste dans le domaine numérique, il semble assez clair que la création du domaine mesure répond à la volonté de changer la théorie qui sert de référence pour l'étude des nombres et des opérations. Exclure l'étude des grandeurs continues de l'étude de l'arithmétique constitue sans doute la condition pour construire, sans les grandeurs, les nombres non entiers et les opérations[8]. L'intention semble donc être de prendre les entiers comme objets premiers.

Il s'agit de faire, dans l'enseignement primaire, ce qui s'est passé un siècle plus tôt dans les mathématiques savantes.[9] Les constructions adoptées sont toutefois assez loin de suivre la construction savante, malgré une tentative de définition des fractions équivalentes. De plus, comme on ne peut véritablement se passer des grandeurs au primaire, on s'appuie sur les grandeurs, discrètes, pour la construction des nombres entiers.

---

7 [Bourbaki, 1984] pp 20-63,

8 [Bronner, 1997] étudie notamment l'émergence du numérique dans l'enseignement secondaire au 20ème siècle. Nous lui devons cette caractérisation essentielle du Numérique comme étude des nombres sans les grandeurs.

9 A tire informatif, nous précisons que des mathématiciens du 20ème siècle préoccupés par des questions de l'enseignement élémentaire, Lebesgue (1931), Whitney (1968) et Rouche (1992) notamment se sont attachés à réintroduire la *mesure des grandeurs* dans des constructions des nombres et des opérations en proposant des axiomatisations *ad hoc*. Ajoutons que, pour des raisons sans doute complexes, Lebesgue n'explicite pas une axiomatisation des grandeurs dans sa construction des réels.

3. Comment les grandeurs disparaissent...

Nous avons vu comment la création du numérique scinde l'étude du continu et du discret, nous voulons maintenant repérer des statuts, éventuellement différents, des grandeurs à travers les programmes. Il est en effet commun d'entendre dire que la réforme des mathématiques modernes les a quasiment fait disparaître. Néanmoins, compte-tenu du public auquel on s'adresse, elles sont nécessairement omniprésentes dans les mathématiques en primaire. La situation était-elle stable avant la réforme des mathématiques modernes ? Qu'est-il advenu des grandeurs en 1970 ?

Avant de parcourir les programmes du primaire depuis la création de l'école obligatoire jusqu'en 1970 à la recherche des grandeurs pour étudier les nombres, les opérations et la proportionnalité, nous nous attachons à quelques considérations d'ordre épistémologique.

3.1 Eléments sur des épistémologies des grandeurs

Ce préambule vise à poser des définitions que nous utilisons dans la suite du texte, ainsi qu'à rappeler que le statut épistémologique des grandeurs est complexe, notamment, parce qu'elles constituent une sorte d'interface entre les mathématiques et le réel.

Les discours théoriques sur les grandeurs distinguent souvent ce que nous appelons des niveaux.

Considérons des objets tous dotés d'une qualité donnée. Deux objets « égaux » du point de vue de cette qualité ont même grandeur. La classe d'équivalence des objets de même grandeur est alors une grandeur. Nous appelons mesure d'un objet ou d'une grandeur, un nombre (caractérisé diversement selon les théories). Pour une qualité donnée, un objet a plusieurs mesures alors qu'il n'a qu'une seule grandeur.

Prenons l'exemple d'un récipient. Nous nous intéressons à sa contenance. Nous disons que l'objet est le récipient. La contenance du récipient détermine une grandeur : la classe d'équivalence des récipients ayant cette contenance. Nous dirons aussi que 20 litres est une grandeur car 20 litres constitue une « étiquette » pour la classe des récipients qui ont cette contenance. La mesure d'un récipient de 20 litres est 20 si l'unité est le litre ou 2 si on prend le décalitre comme unité.

Nous appelons grandeur mesurée, l'expression d'une grandeur utilisant un nombre et une unité. Par exemple, nous dirons que 20 litres ou 3 kg 250 g sont des grandeurs mesurées.

Souvent, *20 litres* est appelé *mesure*, *nous* considérons donc que c'est une grandeur, *nous* la qualifions de *mesurée*. Ce détail peut être source de confusions.

Ce qui précède n'est pas caractéristique du continu. Les trois niveaux, objet, grandeur et mesure concernent aussi le discret. On utilise en général un vocabulaire un peu différent. Un objet, au sens précédent, est souvent appelé *collection*, c'est un sous-ensemble fini d'un ensemble de « choses ». Une grandeur discrète est une classe d'équivalence de collections équipotentes. Le mot quantité est parfois, semble-t-il, utilisé pour désigner une grandeur discrète. Une grandeur continue est sécable.

Les grandeurs discrètes ne le sont pas, en général.

Considérons des billes. La quantité *12 billes* est la même que *1 douzaine de billes*. On peut donc changer d'unité pour décrire une quantité. Nous dirons que 12 billes est une grandeur, de même que 20 litres en est une.

Revenons à notre exemple de récipient. Nous avons dit que *l'objet* est le *récipient*. Nous croyons que les niveaux objet et grandeur ont pu être considérés diversement dans des écrits mathématiques relatifs aux grandeurs ou à leur enseignement : mathématiques ou non.

Nous avons déjà évoqué l'éviction des grandeurs des mathématiques savantes au 19ème siècle. Pour des raisons diverses, plus tard, plusieurs mathématiciens axiomatisent les grandeurs. Ces dernières sont alors des objets « formels ». On leur donne formellement des propriétés [10] qui, le plus souvent, correspondent « aux qualités sensibles » des « grandeurs sensibles », dans le respect des contraintes imposées par la cohérence mathématique.

Ce qui se passe dans le monde concret permet de choisir des axiomes, mais le comportement des « objets mathématiques » n'est pas celui des « objets concrets ». Ainsi, quand, pour comparer la contenance de deux récipients, on transvase le contenu de l'un dans l'autre, la comparaison s'effectue avec une certaine incertitude. Dans le monde des objets mathématiques, nous décidons qu'il n'y a pas d'incertitude [11]. C'est une qualité sensible générale des grandeurs que de pouvoir être comparées. Elle sera traduite en axiome ou propriété formelle dans une définition mathématique des grandeurs. Un ensemble d'objet sera le plus souvent doté d'un pré-ordre total et une grandeur (un ensemble) d'une relation d'ordre total. Il en est de même avec les opérations que nous faisons sur les objets. La difficulté matérielle éventuelle pour réaliser une opération, la division d'une capacité par un entier par exemple, n'est pas un obstacle pour poser la divisibilité en axiome, si nécessaire.

Ainsi, même si les axiomatisations ont été tardives et diverses, il est assez clair aujourd'hui qu'il existe des grandeurs mathématiques non géométriques. [12]

3.2 Avant 1970 : des grandeurs au fil des programmes

3 pommes, 5 litres sont des *nombres concrets*, ce sont ce que nous avons appelé des grandeurs mesurées. Nous appelons *opérations simples sur les grandeurs* : l'addition, la soustraction de grandeurs, la multiplication et la division d'une grandeur par un nombre. Les multiplications et divisions de deux grandeurs entre elles, qui mettent en jeu des grandeurs produit et quotient, n'en relèvent donc pas.

D'après les programmes, de 1882 à 1938, le statut des grandeurs évolue

10 Il n'existe pas de définition mathématique standard (ou commune) pour « grandeur » comme il en existe une pour « espace vectoriel », les axiomes retenus pour définir une « grandeur », voire certaines des propriétés qui en découlent, peuvent donc varier d'une définition à l'autre.

11 On peut aussi modéliser l'incertitude, mais ce n'est pas notre projet.

12 Les théories des grandeurs et de la mesure sont multiples. Pour des raisons diverses, toutes ne font pas apparaître les trois niveaux. Nous avons repéré comme combinaisons de niveaux : objet, grandeur et mesure ; objet et grandeur ; objet et mesure ; grandeur et mesure. Si un niveau donné n'apparaît pas dans une théorie, cela ne signifie pas que ce niveau ne relève pas des mathématiques, mais plus simplement qu'il n'est pas défini dans la théorie.

peu. En 1882, on indique pour la classe enfantine :

> addition et soustraction sur des nombres concrets et ne dépassant pas la première centaine. […] Le mètre, le franc, le litre.

Au CP, en 1923, on précise :

> **Premiers éléments de la numération** - Compter des objets ; en écrire le nombre jusqu'à dix, puis jusqu'à cent.
>
> **Petits exercices de calcul oral ou écrit** (sans dépasser cent). - Ajouter ou retrancher des groupes d'objets ; additionner ou soustraire les nombres correspondants. […]

Les instructions indiquent à propos de l'étude des nombres, au CM :

> […] Les élèves comprendront ce qu'est un dixième de mètre, un dixième de gramme, avant de comprendre ce qu'est un dixième d'unité.

[Harlé, 1984] a étudié de nombreux manuels des années 1882 à 1930 du CE au CS. Il indique que ce sont bien les nombres concrets et les opérations sur ces nombres, que nous avons appelé *opérations simples sur les grandeurs* mesurées, qui fondent toute l'étude de l'arithmétique. On « abstrait » progressivement les nombres des nombres concrets.

L'utilisation des opérations simples sur les grandeurs signifie notamment que pour le calcul de l'aire d'un rectangle de 3m par 2m, on écrit $3\text{m}^2 \times 2$ et non $3\text{m} \times 2\text{m}$; et pour celui du prix de 3m de toile à 6fr le mètre : $6\text{fr} \times 3$ et non $6\text{fr/m} \times 3\text{m}$. [13]

13 Harlé [1984] pp112-117.

Le programme de 1938 ne concerne que le cours supérieur, mais il a pour ambition de donner des indications sur le traitement de certaines notions « au cours de tout l'enseignement primaire ».

En particulier, les opérations sur les grandeurs apparaissent dans les instructions :

> Les règles de calcul sur les nombres décimaux sont supposées acquises et partiellement justifiées dans les classes précédentes. Cependant des changements d'unités convenablement choisies permettront de les illustrer à l'occasion de problèmes précis. Ainsi le problème qui conduit à la multiplication : $\underline{(3{,}50 \text{ fr. par l.}) \times (7{,}25 \text{ l.})}$ peut être remplacé par :
>
> $(0{,}035 \text{ fr. par cl.}) \times (725 \text{ cl.}) = 25{,}375 \text{ fr.}$
>
> De même, le problème qui conduit à la division : (2,975 kg.) : (0,79 kg. par l.) peut être remplacé par :
>
> (2,975 g.) : (790 g. par l.) = 3,7 l., reste 52 g.
>
> Ces exemples montrent en même temps combien peut être suggestif l'emploi de formules où les nombres sont suivis de l'indication des unités.

On trouve aussi, à propos de la résolution d'un problème de partage proportionnel :

> Le calcul par fractions conduit à la formule : $1.\,000 \text{ g} : \left(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{5}\right)$ […]
>
> D'où la formule : $\underline{1.\,000 \text{ g} \times} \frac{30}{19}$.

Nous avons souligné deux multiplications. Dans le premier cas, on multiplie deux grandeurs entre elles, dans le second, une grandeur par un nombre. La seconde multiplication est une opération simple sur les grandeurs, pas la première. Il semble que la multiplication « entre grandeurs » soit une nouveauté en 1938 par rapport aux programmes antérieurs.

La multiplication sur les grandeurs est donc présente avec deux statuts différents mais complémentaires. En effet, sur le plan théorique [14], on peut construire, à partir de la réunion d'espèces de grandeurs isolées, un ensemble, plus vaste, doté notamment d'une multiplication et d'une division « entre grandeurs ». Apparemment, c'est donc une théorie de ce type qui supporte les changement de 1938.

Le programme de 1945 est assez paradoxal sur le plan du statut des opérations sur les grandeurs. On retrouve les exemples de 1938, avancés au CM. De plus, au CE, on préconise d'écrire les unités avec les calculs. La façon de les écrire est toutefois modifiée pour les multiplication et division de grandeurs entre elles. Elles apparaissent maintenant au-dessus ou en-dessous du calcul et entre parenthèses. On écrit donc :

(f par kg)		(kg)	
75	×	5	= 375 francs

Et on ajoute :

> Le signe ×, comme le signe + et le signe –, n'indique que l'opération à faire sur les nombres et non sur les grandeurs.

On retrouve en revanche les exemples de multiplication et division d'une grandeur par un rationnel : 1. 000 grammes : $\left(1-\frac{1}{6}-\frac{1}{5}\right)$ et 1. 000 grammes × $\frac{30}{19}$. Là, on écrit des unités dans les calculs.

On parle encore des nombres concrets. Ce sont eux qu'on étudie au CE par opposition aux nombres abstraits et indépendants des unités du CM (pourcentages et fractions simples). On étudie aussi les décimaux au CM, mais toujours dotés de leur unité, ils sont aussi concrets.

Paradoxalement, on ne parle plus vraiment d'opérations sur les nombres concrets, on dit même que :

> Il paraît évident qu'on doit additionner deux grandeurs de même espèce. Le nombre qui mesure la somme est la somme des nombres qui mesurent les grandeurs additionnées.
>
> Cependant cette opération soulève des objections assez graves. Que veut dire « de même espèce » ? Des pommes et des poires ne sont pas de même espèce et pourtant 8 pommes et 7 poires font 15 fruits. […]
>
> En réalité, on n'additionne pas des grandeurs, fussent-elles de même espèce : on mélange les pommes et les poires […]
>
> A toutes ces combinaisons de grandeurs correspond l'addition de leurs mesures.

Ici, après avoir critiqué *l'espèce de grandeur*, c'est en fait l'addition de grandeurs qu'on met en cause. Tous ces discours ne sont pas très cohérents mais laissent supposer que les opéra-

14 Voir Whitney 2, 1968 ou Chevallard & Bosch, 2002.

tions sur les grandeurs sont contestées à cette époque. [15]

3.3 1970 : des grandeurs, faisons table rase

Nous parcourons maintenant les instructions de 1970. S'il y a un doute sur la contestation des opérations sur les grandeurs dans le programme de 1945, il n'y en a plus dans celui de 1970. On indique :

> Rappelons que l'addition (comme la soustraction, la multiplication…) porte sur les nombres et non sur les ensembles que ces nombres qualifient : on réunit des ensembles d'objets ; on additionne des nombres.

Et on informe que :

> Les phrases telles que :
>
> 8 pommes + 7 pommes = 15 pommes
>
> n'appartiennent en fait, ni au langage mathématique ni au langage usuel.

Cet exemple fait écho au texte de 1945. La condamnation est plus radicale en 1970, au sens où qui écrit des opérations sur les grandeurs n'écrit ni du français, ni des mathématiques. De plus, des exemples sont donnés pour expliquer au maître la différence entre les deux langages : usuel et mathématique.

> **Ajouter, et** sont des mots du langage courant, ce ne sont pas des mots du langage mathématique. A l'inverse, le mot « plus » n'est pas habituellement employé dans le langage courant pour exprimer l'action d'ajouter. […] Dans la pratique de classe, les deux langages sont mêlés mais il importe de les distinguer. On pourra écrire par exemple :
>
> Le nombre de pommes est :
>
> 8 + 7 = 15
>
> et conclure : « la corbeille contient 15 pommes »

Les opérations sur les grandeurs disparaissent donc. En lisant attentivement les instructions, on remarque que le mot générique « grandeur » en a disparu, et de façon plus surprenante encore le niveau grandeur, aussi. Il en reste en fait quelques occurrences, dans le langage courant, quand on donne des exemples de traduction en langage mathématique. Les mots longueur, aire… sont encore dans le programme mais ils désignent la *mesure des grandeurs* et non plus les grandeurs. On écrira ainsi que :

> La longueur* d'une certaine règle est double de la longueur* d'un certain crayon. […] l'unité étant le crayon, la longueur** de la règle est 2.

Dans cet extrait où nous avons ajouté les astérisques, longueur* désigne le niveau grandeur, il s'agit du langage courant ; longueur** désigne la mesure de la grandeur, il s'agit du langage mathématique. Ceci implique notamment que la longueur, mathématique, d'un objet dépend de l'unité choisie pour le mesurer.

Cette disparition des grandeurs s'accompagne de l'apparition de nouvelles désignations. Les indispensables références au concret vont être des *situations* ou des *expériences*. Peut-être faut-il lire ces deux mots comme un signe de l'activité de l'élève, une marque constructiviste. Toutefois, on trouve ces mots là où autre-

15 Nous n'avons pas fait d'étude complémentaire pour préciser la nature de cette contestation.

fois on aurait pu parler de grandeurs. Il va sans dire que ces situations ou expériences ne sont pas des mathématiques pour les auteurs du programme.

La disparition du niveau grandeur n'est-elle qu'une question d'écriture ou de vocabulaire ? A-t-elle une incidence sur l'approche de certaines notions ?

Un aspect important du programme de 1970 réside dans l'apparition des opérateurs et des *relations numériques* qui deviendront des fonctions numériques en 1980. Cela est extrêmement visible dans les instructions dans la mesure où 14 pages sur 35 leur sont consacrées, avec force tableaux de nombres et chaînes d'opérateurs. Ces relations sont notamment le support à l'étude de la proportionnalité et des fractions.

La présentation de la proportionnalité qu'on trouve exclusivement dans la partie numérique constitue une exception notable par rapport à la rupture discret / continu car on y mentionne deux « expériences », sur les trois proposées, qui relèvent du continu.

Nous retenons de cette nouvelle approche du thème que la proportionnalité n'est plus une relation entre grandeurs mais entre nombres. C'est une relation multiplicative entre deux séries de nombres qui a des propriétés : coefficient numérique, linéarité additive et multiplicative. C'est la fonction linéaire numérique qui sert de référence pour cette étude.

Comme nous l'évoquions précédemment, les fractions sont vues comme des opérateurs sur des entiers et non comme des nombres qui mesurent une grandeur. Pour cette étude, on adopte un point de vue fonctionnel. Il s'agit là encore de fonctions numériques dont la présentation s'effectue par des tableaux.

Ces relations sont numériques parce que les grandeurs en sont exclues. Ce n'est donc pas tant le continu qu'on rejette dans l'introduction de ces fonctions numériques, mais plutôt le fait qu'il puisse y avoir des relations entre autres choses que des nombres dans les mathématiques.

Ainsi, pour l'étude de la proportionnalité et des fractions, on se place dans un contexte « presque pur numériquement ». Ces objets apparaissent comme des calculs sur des nombres. Les liens, entre les objets sensibles et ces deux concepts mathématiques, dont les grandeurs étaient probablement pourvoyeuses sont, au mieux distendus, au pire rompus.

Par ailleurs, la suppression des opérations sur les grandeurs semble avoir une incidence sur l'étude du sens des opérations. Nous avons déjà signalé la distinction nécessaire entre multiplicande et multiplicateur dans le cas des grandeurs continues alors qu'on tente de l'éliminer dans la définition de la multiplication, élaborée dans un contexte discret.

Nous avons déjà cité tous les exemples du programme relatifs à la division. Dans chacun d'eux, on cherche la « valeur d'une part ». Il s'agit de trois problèmes de *partage*. A aucun moment, on ne donne d'exemple pour l'autre *usage* de la division : la recherche du « nombre de parts ». Aucun des deux usages n'est en réalité explicité dans le programme de 1970. Ceci constitue un changement notable par rapport au programme de 1945.

En effet, si le programme de 1923 n'évoque, au CP, que le premier type de problèmes et n'indique rien pour les autres niveaux, celui de 1945 évoque les deux au CP et les instructions du CE précisent :

> **Division.** - La division est l'inverse de la multiplication, c'est-à-dire la recherche d'un facteur inconnu d'un produit. En réalité l'opération n'est en général qu'approchée et il y a un reste. Comme on distingue, dans la multiplication, multiplicande (valeur de l'unité) et multiplicateur (nombre d'unités), il y a deux cas dans la division suivant qu'on cherche l'un ou l'autre. On peut les distinguer d'une façon sommaire en disant qu'on peut chercher la valeur d'une part ou le nombre de parts.
>
> **Exemples :**
>
> (oranges) (enfants)
> 33 : 7 = 4 oranges par enfant ;
> reste 5 oranges.
>
> (oranges) (orange par enfant)
> 33 : 4 = 8 enfants ;
> reste 1 orange.
>
> (fr.) (kg)
> 375 : 5 = 75 fr. par kg.
>
> (fr.) (fr par kg)
> 375 : 75 = 5 kg

Nous voyons dans ces quelques lignes plusieurs approches du « sens de la division » qui, pensons-nous, se complètent. Pour reconnaître une situation de division, on peut repérer qu'on cherche :

1) un facteur inconnu d'un produit (c'est une approche numérique de l'opération),

2) un nombre de parts ou la taille d'une part dans un problème de partage,

3) un nombre d'unités ou la valeur d'une unité et utiliser une formule :

nombre d'unités =
valeur totale / valeur de l'unité

valeur de l'unité =
valeur totale / nombre d'unités.

Ces formules sont, en fait, explicitées à propos de la multiplication au CE et reprises au CM pour l'étude de la proportionnalité :

> En fait, dans le cas le plus fréquent, la multiplication est une convention commerciale : le prix total d'une grandeur (poids, longueur, volume, nombre d'objets) est obtenu en multipliant le prix de l'unité (g, m, l, objet) par le nombre d'unités.
>
> Cette règle s'étend quand on cherche un salaire total (produit du salaire horaire, journalier... par le nombre d'heures, de jours ...) ; elle s'étend aussi à la recherche du poids total d'un volume de liquide, d'une longueur de fil, etc.

Enfin, nous voulons voir dans l'écriture des unités dans les calculs (avec les réserves mises précédemment) :

4) des rudiments de raisonnements sur les dimensions, raisonnements néanmoins probablement difficiles d'accès pour des élèves du CE.

Soit maintenant les deux problèmes :

a) (partage) Une baguette mesure 406 cm. On veut la couper en 7 parts égales sans reste. Quelle est la taille d'une part ?

b) (groupement) Une baguette mesure 406 cm. Combien de morceaux de 7 cm peut-on couper, au plus, dans cette baguette ?

Le programme de 1970 ne donne d'exemples que de problèmes de type a). On peut supposer que c'est la multiplication sur les nombres, en particulier la commutativité, qui permet de ne pas étudier les deux sens de la division.

En effet, avec les nombres, dans l'esprit du programme de 1970, il faut penser : 406 = ❏ × 7 pour a) et 406 = 7 × ❏ pour b), voire ne pas distinguer les deux. Comme la multiplication est commutative et que la division est l'opération inverse de la multiplication, les deux nombres cherchés sont un seul et même nombre. C'est le quotient de 406 par 7. La recherche de l'opération inverse de la multiplication devient apparemment le seul moyen de reconnaître les situations de division en 1970. On retrouve la première des quatre approches de 1945, et elle seulement.

Toutes ces approches ne sont pas liées aux opérations sur les grandeurs. La première repose sur une approche numérique de l'opération, la dernière sur des opérations sur les grandeurs quotient et produit.

Nous avons évoqué quatre opérations simples sur les grandeurs, on peut en « définir » une cinquième : la division d'une grandeur par une grandeur de même espèce. Nous appelons *rapport de deux grandeurs de même espèce* cette deuxième division. Dans ce cadre, la réponse au problème a) est donnée par la division d'une grandeur par un nombre, 406 cm : 7, la réponse au b) par le rapport de deux grandeurs de même espèce, 406 cm : 7 cm.

Ainsi, il nous semble que les opérations simples sur les grandeurs permettent, mieux que les opérations sur les nombres, de distinguer entre recherche du nombre de parts et celle de la taille d'une part : 406 cm : 7 cm et 406 cm : 7.[16]

Il semble donc que la suppression des opérations sur les grandeurs réduise les moyens disponibles pour « reconnaître la bonne opération » dans un problème d'arithmétique puisqu'on ne peut plus se référer qu'au niveau « mesure ».

Depuis le début de l'école obligatoire, les théories de référence relatives aux grandeurs à l'œuvre dans les instructions officielles ont évolué. La réforme de 1970 marque la suppression du niveau grandeur des mathématiques enseignées, suppression qui semble avoir notamment deux conséquences :

— comme on ne peut se passer des grandeurs en primaire, elles continuent à exister dans les instructions mais sont implicites et relèvent de la « vie courante »,

— elles sont éliminées de certains objets ou raisonnements mathématiques qui désormais se conçoivent uniquement comme du calcul sur des nombres.

4. Un certain retour des grandeurs depuis 1980

Nous avons étudié l'élimination du continu et du niveau grandeur en 1970. Dès 1980,

16 Nous avons consulté des manuels antérieurs à 1970. Il semble que si l'écriture 406 cm : 7 est très fréquemment utilisée ; 406 cm : 7 cm ne l'est en revanche que très rarement. A la place, les auteurs écrivent en général « 406 : 7 ». Ceci est peut-être à rattacher à la difficulté historique des rapports de grandeurs d'exister en tant que nombres.

ils sont partiellement réintégrés. Quelles sont les raisons qui guident ces choix ? En 1970, voire peut-être dès 1945, les grandeurs ont perdu leur statut d'objet mathématique dans les programmes, le retrouvent-elles après ?

4.1 Des motivations diverses

Nous nous intéressons au continu puis aux grandeurs dans le numérique, ensuite au domaine mesure.

Dès 1980, dans le numérique, on introduit du continu pour étudier les décimaux et fractions. On parle principalement de… *situations*. Elles permettront de « prendre conscience de la nécessité de disposer de nouveaux nombres ». Cette approche est confirmée par les programmes suivants. Ce n'est qu'en 2002 qu'on utilise le mot grandeur à son propos.

En 1970, le repérage sur une droite apparaît en géométrie. A partir de 1980, il bascule dans le numérique. Il est depuis largement utilisé pour étudier des objets du numérique : représenter les nombres entiers, les instants (programme de 1980 seulement), les fonctions numériques et aussi construire les nombres décimaux. On ne considère pas en général que la droite numérique relève des grandeurs, en revanche, elle est emblématique du continu.

Ainsi, dès 1980, le continu intervient dans le numérique. Cela est justifié, pour ce qui concerne l'étude des nombres non entiers, par la volonté que les élèves construisent leur savoir.

En 1980, dans la rubrique relative aux fonctions numériques, les situations vont permettre de générer des ensembles de données numériques qu'on cherchera à mettre en relation :

> par exemple : achat d'articles à l'unité, à la longueur, au poids, etc. ; masse et volume ; compteur de pompe à essence ; tarif d'une course en taxi ; affranchissement postal ; etc.

On est ici dans la continuité de 1970 : les *données numériques* sont les produits <u>mathématiques</u> des situations et expériences <u>pédagogiques</u>. *Données numériques* est une locution inventée pour dire *mesures de grandeur* ! Elle dispense de parler des grandeurs et disqualifie le niveau grandeur. En 2002, elles sont toujours là puisqu'elles apparaissent dans le titre de la première rubrique du programme, rubrique qui inclut d'ailleurs l'étude de la proportionnalité.

A propos de la proportionnalité, puis de la multiplication par un décimal, on présente des « raisonnements personnels » du type suivant :

> « Il faut mettre 400 g de fruits avec 80 g de sucre pour faire une salade de fruits. Quelle quantité de sucre faut-il mettre avec 1000 g de fruits ? », les raisonnements peuvent être du type :
>
> — pour 800 g de fruits (2 fois plus que 400), il faut 160 g de sucre (2 fois plus que 80) […]. Pour 1000 g (800 g + 200 g) de fruits, il faut donc 200 g (160 g + 40 g) de sucre ;
>
> — la masse de sucre nécessaire est cinq fois plus petite que la masse de fruits ; il faut donc 200 g de sucre (1000 : 5 = 200).
>
> […] pour résoudre le problème « 2 cm sur le papier représentent 5 km sur le

terrain. La distance à vol d'oiseau entre deux villes est de 7 cm. Quelle est la distance réelle ? », le raisonnement peut être du type :

1 cm sur le papier représente 2,5 km (deux fois moins que 2 cm), donc 7 cm sur le papier représentent 17,5 km (sept fois plus que 1 cm) […].

Même si elles n'apparaissent que dans la langue naturelle ou dans un langage symbolique non convaincant, nous considérons que c'est bien d'opérations simples sur les grandeurs, toujours mesurées, qu'il s'agit. L'argument institutionnel qui justifie leur introduction est visiblement la prise en compte des « raisonnements personnels » des élèves. Elles sont donc un outil pour la « construction des connaissances » prescrite par les instructions.

En 1980, dans le domaine « mesurer », les grandeurs réapparaissent. On dégage les notions de *grandeur* et de *mesure d'une grandeur* et même l'*« addition » de grandeurs*. On utilise ces mots et les trois niveaux, objet, grandeur et mesure.

Plusieurs indices nous conduisent cependant à penser que les grandeurs ici réintroduites ne doivent pas être considérées comme mathématiques :

— une bonne partie des activités est située dans la partie « activités d'éveil », par exemple égalité et somme de longueurs au CE,

— on écrit dans la partie « mathématiques », à la fin du thème mesurer, que :

Certaines activités ne relèvent pas spécifiquement des mathématiques, bien que traditionnellement proposées dans les programmes ; par exemple la lecture de l'heure ne doit pas être dissociée de la notion de durée mise en place au cours des activités d'éveil.

— enfin, on écrit :

[Les activités] doivent permettre une première prise de conscience de la notion de grandeurs mesurables, celles pour lesquelles on sait définir sur les objets une opération induisant une addition sur les nombres qui expriment leur mesure. (Les grandeurs pour lesquelles on ne sait pas définir une telle opération sont des grandeurs « repérables » ; exemple les températures.)

La théorie développée est donc « grandeur repérable / grandeur mesurable ». Elle est en usage en physique, même si elle a été axiomatisée, de façons diverses, par des mathématiciens.

Il semble donc qu'on donne aux grandeurs un statut d'objets de la physique.

Par ailleurs, la caractérisation indiquée, une addition sur les objets qui induit une addition sur les mesures, implique que les nombres pré-existent à la notion de grandeurs mesurables. Cette approche théorique n'est pas compatible avec l'utilisation des grandeurs pour définir les nombres non entiers. [17] Elle ne semble pas favorable à une articulation entre utilisation des grandeurs dans « Mesurer » et dans le numérique.

Enfin, l'addition est la seule opération sur les grandeurs qui soit étudiée et les cal-

17 Pour définir les nombres à partir des grandeurs, il faut définir, sans recourir à la mesure, la notion de grandeur mesurable. C'est en reliant l'addition et l'ordre des grandeurs qu'on y parvient.

culs se font sur *les nombres exprimant des mesures*.

En 2002, l'étude des grandeurs dans la rubrique « grandeurs et mesures » ne relève plus de l'approche grandeur repérable / grandeur mesurable. Il n'y a plus, explicitement, d'addition de grandeurs. Plus généralement, à l'exception des fractions d'angle droit, on ne parle pas d'opérations sur les grandeurs dans cette rubrique. Les instructions indiquent un programme d'étude. On met l'accent sur les procédés de comparaison sans la mesure. On prescrit du mesurage, en unités arbitraires ou non selon les grandeurs, avant l'utilisation des unités usuelles. Enfin, un troisième type d'activités consiste à utiliser ou prendre des informations pour en déduire, par calcul, d'autres mesures. Ces activités peuvent solliciter n'importe laquelle des quatre opérations sur les grandeurs continues, par exemple le découpage-recollement met en jeu l'addition ou la soustraction des aires mais ces opérations ne sont pas l'objet d'un apprentissage signalé par le programme.

Les problèmes théoriques posés par l'articulation entre les grandeurs du domaine mesure et celles du numérique ont disparu, de fait, en 2002 car on n'utilise plus l'additivité de la mesure pour caractériser les grandeurs. Néanmoins, aucune caractérisation générale des grandeurs n'est indiquée. De plus, de quatre opérations <u>explicitement objet d'enseignement</u> dans le domaine mesure en 1970, il n'en reste qu'une en 1980 et aucune en 2002.

4.2 Regard sur le numérique

A partir de 1980, on introduit donc des grandeurs et du continu dans le numérique. Souvent, la finalité est nettement didactique : cela semble être nécessaire pour que les élèves construisent certains savoirs. Comment le numérique absorbe-t-il ces objets contre lesquels il s'est construit ?

Reprenons les exemples de « raisonnements personnels » évoqués à propos de la proportionnalité. Regardons ce qu'on écrit et aussi ce qu'on n'écrit pas. La seule opération sur les grandeurs mesurées écrite dans le symbolisme mathématique est l'addition : 800 g + 200 g, plusieurs exemples en sont d'ailleurs donnés. Pour les autres opérations, dans les cas où une opération sur les grandeurs serait nécessaire, on écrit un calcul sur les nombres (1000 : 5 et non 1000 g : 5) ou une expression en langue naturelle, comportant ou non une unité (2 fois moins que 80 et non 80 g : 2, ou encore sept fois plus que 1 cm et non 1 cm × 7).

Enfin, on n'écrit pas non plus une égalité comportant une opération sur des grandeurs, on se contente d'un seul membre (800 g + 200 g et non 800 g + 200 g = 1000 g) alors qu'on peut en écrire deux quand il s'agit de nombres (1000 : 5 = 200).

Si l'utilisation de la langue naturelle et les variations dans les formulations renforcent l'impression de raisonnement personnel, nous pensons qu'elles n'expliquent pas à elles seules le caractère non abouti des formes utilisées dans les instructions.

C'est probablement une trace des interdits du programme de 1970 qui empêche les instructions d'énoncer convenablement dans la langue courante et dans le formalisme mathématique des opérations sur les grandeurs à propos de la proportionnalité. Ceci est sans doute en train d'évoluer :

Puisque les grandeurs considérées

(longueurs, aires, volumes, durées, masses) peuvent s'additionner, se soustraire, être multipliées ou divisées par un nombre, les écritures suivantes sont correctes et leur utilisation est recommandée :

3kg + 500g = 3,5kg = 3500g

[…] Plusieurs unités de grandeur peuvent donc coexister dans un calcul, qui n'est pas alors un calcul portant sur des nombres, mais un calcul portant sur des grandeurs.

Cet extrait du document d'accompagnement Grandeurs et mesure à l'école élémentaire, publié en 2003, constitue selon nous une réhabilitation des opérations sur les grandeurs.

Depuis 1970, la proportionnalité est une <u>relation numérique</u> particulière d'abord présentée dans des tableaux en 1970 puis qu'on a appelé fonction numérique et commencé à représenter avec des graphiques à partir de 1980. L'aspect graphique et le tableau ne sont plus essentiellement vus comme des moyens de résolution en 2002 mais plutôt d'organisation des informations.

Depuis 1970, c'est l'application linéaire *numérique* qui supporte l'étude de la proportionnalité sur le plan théorique. Même si, en 2002, la relation numérique multiplicative n'est plus explicitée et si, en 2003, le document d'accompagnement Articulation école/collège évoque une relation entre grandeurs, le point de vue n'a apparemment pas changé, la proportionnalité apparaît en effet dans la rubrique « exploitation de données numériques ». [18]

Pourtant, les raisonnements préconisés en 2002 et déjà évoqués ne relèvent pas selon nous d'opérations sur les nombres, du numérique, mais d'opérations sur les grandeurs.

Le cas des conversions est symptomatique. Depuis 1980, elles relèvent de la proportionnalité dans le programme. En 2002, la méthode pour convertir est la suivante :

Les quelques conversions d'unités envisagées seront aussi reliées à la proportionnalité : par exemple, pour convertir 43 dm^2 en cm^2, l'élève peut utiliser le fait que 1 dm^2 = 100 cm^2 ; 43 dm^2, c'est donc 4300 cm^2 (43 fois 100 cm^2).

Si on considère la proportionnalité comme une relation numérique, il y a bien deux « ensembles de données numériques » : les deux séries de mesures dans les unités dm^2 et cm^2 et il y a bien une relation multiplicative entre les deux, un coefficient 100. Il y a donc bien *proportionnalité numérique*. Cependant, il n'y a qu'une série de grandeurs. Pour chaque aire, il n'y a qu'une valeur, exprimée de deux façons : 43 dm^2 / 4300 cm^2 et 1dm^2 / 100cm^2. Le discours développé mobilise la multiplication externe d'une grandeur par un entier (43 fois 1 dm^2, 43 fois 100 cm^2) et non la proportionnalité.

Il nous semble donc que le modèle de la relation numérique justifie qu'on écrive que les conversions relèvent de la proportionnalité mais qu'il est peu adapté pour soutenir les discours explicatifs.

A propos de l'étude des fractions et des décimaux, il y a aussi de nombreux exemples de « raisonnements ».

On écrit ainsi :

18 Pour une vision plus fine des évolutions, on pourra se reporter à [Hersant, 2005]. Hersant n'insiste cependant pas sur le fait que cette application linéaire est *numérique*, cette distinction est pour nous essentielle.

[...] $\frac{9}{3} = 3$; $\frac{40}{10} = 4$. Ces égalités peuvent être justifiées : $\frac{9}{3}$, c'est « 9 tiers de l'unité ou 3 fois 3 tiers de l'unité, donc 3 unités » ce qui peut être illustré à l'aide de segments.

On évoque « le tiers de l'unité » mais l'unité est le nombre 1, il ne s'agit pas d'une grandeur. Dans cette rubrique, contrairement à celle sur la proportionnalité, bien que formulés dans un mélange de langue naturelle et de langage symbolique, les raisonnements sont tous dépourvus d'opérations sur les grandeurs. Ils sont énoncés avec des nombres. Les décimaux et fractions codent explicitement des *mesures de grandeurs* mais les opérations sur les grandeurs qui y contribuent ne sont jamais formulées. Il n'y a même pas, surtout pas peut-être, de fraction de grandeur.

On évoque à propos de l'étude des fractions un réseau de droites parallèles équidistantes : « ce réseau permet de partager une longueur en plusieurs longueurs égales, sans recours à la division », on ne dit donc pas qu'on *divise* une grandeur par un entier.

Dans toutes les instructions, malgré les demandes répétées de relier les grandeurs et les nombres, nous n'avons repéré que deux occurrences de fractions de grandeurs. Ce sont d'ailleurs des fractions de grandeurs mesurées : un centième d'euros et plusieurs exemples de fractions d'angle droit (moitié, quart, tiers, $\frac{5}{4}$ d'angle droit).

Il semble qu'il y a, à propos des fractions et décimaux, un véritable évitement des *fractions de grandeurs*. Il peut s'agir du refus de considérer que les grandeurs non mesurées sont des objets mathématiques, voire le niveau « objet » un niveau mathématique.

Nous étudions maintenant les instructions relatives au repérage sur la droite graduée, passé dans le numérique en 1980.

Il peut arriver qu'on représente, de façon approximative, une grandeur sur une droite graduée. Cette tâche apparaît en 1980 dans l'étude des nombres, mais on n'indique pas comment la traiter. S'il s'agit par exemple de placer l'instant 3h17min, sur une droite graduée d'heure en heure, on a deux grandeurs : les *moments qui passent* et les longueurs sur la demi-droite. Le raisonnement repose probablement sur les points suivants :

L'instant 3h17min est situé entre les instants 3h et 4h. 17min est plus court que 30min. 30min est la moitié d'une heure donc la longueur qui représente 30min est la moitié de celle qui représente 1h car les durées sont proportionnelles aux longueurs des segments de la droite (par convention). Le point qui représente 3h17min est donc plus près de celui qui représente 3h que de celui qui représente 4h.

Il s'agit de proportionnalité entre grandeurs. Dans le programme de 1980, la proportionnalité s'inscrit dans l'étude des fonctions numériques dont cette tâche ne relève pas : on ne cherche pas une valeur numérique, une mesure de la grandeur image, mais au contraire une position, un objet. Nous pensons que le numérique ne suffit pas pour décrire cette tâche.

En 2002, des méthodes sont indiquées pour placer des nombres sur la droite. C'est à propos de l'étude de l'ordre des entiers naturels, au cycle 3, qu'elles sont les plus explicites :

> Par exemple, sur une droite graduée de 100 en 100 :
>
> — pour placer exactement 450, on peut utiliser le fait qu'il se situe à « mi-chemin » entre 400 et 500 ; (1)
>
> — pour placer approximativement 276, on peut utiliser le fait qu'il est plus près de 300 que de 200. (2)
>
> Le placement précis nécessite des compétences relatives à la proportionnalité (3) : les distances entre deux nombres sont proportionnelles aux écarts (différences) entre les deux nombres. (4)

On évoque des distances et on se réfère à la proportionnalité. Examinons le cadre mathématique sous-jacent.

La locution « distance entre deux nombres » existe dans les mathématiques savantes. Elle y est synonyme de *valeur absolue de la différence de deux nombres*. La proposition (4) n'a plus alors aucun sens. Il faudrait remplacer « distance entre deux nombres » par « distance entre deux points ». On pourrait également préciser que *les* ***nombres*** *repèrent les* ***points*** *sur la demi-droite* afin de distinguer les points des nombres. Cet amalgame entre nombre et point se répète. Sans ellipse, (2) devient : pour placer approximativement **le point d'abscisse** 276, on peut utiliser le fait ~~qu'il~~ que **le nombre 276** est plus près de 300 que de 200.

Par ailleurs, on adosse l'étude de la droite graduée à celle de la proportionnalité. Ce sont donc *les écarts entre les nombres* et *les distances entre* les points [19] qui doivent être en proportion. Il nous semble cependant qu'il n'y a pas de proportionnalité, ici, mais plus simplement une mesure. Le nombre qui repère un point est l'abscisse du point, c'est-à-dire, la mesure du segment délimité par l'origine de la demi-droite et ce point, quand on prend comme unité le segment délimité par l'origine de la demi-droite et le point repéré par le nombre 1. Ce sont les propriétés des fonctions mesure (linéarité, croissance notamment) qui peuvent permettre de placer les points.

Les instructions utilisent les expressions « 276 est plus près de 300 que de 200 » et « distance entre les nombres » comme si elles avaient une signification intrinsèque. Est-ce si évident ? Peuvent-elles constituer une aide pour placer des points ?

On peut en effet se demander si ce n'est pas plutôt parce qu'on saura placer le point d'abscisse 276, grâce aux propriétés des fonctions mesure, qu'on deviendra capable de se référer aux « distances entre les nombres » et non l'inverse. En outre, on peut écrire à propos de la figure ci-dessous que 276 est plus près de 200 que de 300. Il est fort possible que cette signification courante fasse obstacle à la signification savante.

$\boxed{200}$ $\boxed{276}$ $\boxed{300}$

La correspondance entre nombres réels et points de la droite géométrique est une question mathématique importante. Amalgame entre nombre et point, incursions du vocabulaire relatif à la longueur dans la compa-

19 C'est nous qui rectifions.

raison des nombres, ces discours relèvent selon nous des mathématiques savantes. Ils n'y sont pas gênants car la bijection entre les deux ensembles est établie. La situation est sans doute plus complexe à l'école primaire et le rattachement à la proportionnalité pour soutenir les explications nous semble peu convaincant.

Ainsi, depuis 1980, réintroduit-on des grandeurs et du continu dans les instructions officielles mais cela ne va pas apparemment sans poser des problèmes théoriques. Le modèle de la fonction linéaire numérique pour caractériser la proportionnalité semble montrer des limites. Il conduit notamment à une rupture entre le cadre mathématique de référence et le didactique. Les fractions de grandeur, pourtant nécessaires pour tirer les nombres des grandeurs dans l'approche retenue, semblent être proscrites des instructions. Par ailleurs, la droite graduée, signe de l'utilisation du continu pour étudier le numérique, est accompagnée simultanément de discours savants peut-être peu compatibles avec les apprentissages des élèves et de discours didactiques peu adaptés à l'objet mathématique. Dans le programme, cet objet est dans le numérique. Dans les mathématiques savantes, il est à l'articulation du géométrique et du numérique. Les difficultés repérées sont-elles à relier à cette place particulière qui pourrait être celle des grandeurs ?

5. Conclusion

Les instructions de 1970 contiennent un double bouleversement :

— on demande que les élèves construisent leurs savoirs quand ils apprennent les mathématiques en primaire,

— on élimine le continu et les grandeurs de l'étude des nombres, des opérations et de la proportionnalité et on crée le numérique.

La naissance du numérique se manifeste visiblement par la création d'un domaine mesure qui englobe l'étude des nombres et des opérations sur les grandeurs continues. Parallèlement le numérique rassemble l'étude des nombres et des opérations sur le discret. Elle correspond en fait à un changement de théorie de référence pour l'étude des nombres et des opérations. L'élimination globale du niveau grandeur des mathématiques de l'école est un autre aspect important de la partie numérique de ce programme Elle se manifeste notamment dans l'omniprésence des « relations numériques » qui réduit l'étude des fractions et de la proportionnalité à des calculs sur des nombres et semble rendre impossible certains discours explicatifs.

Les évolutions des programmes depuis 30 ans, reflet déformé, mais reflet quand même, des recherches de didactique ne tendent-elles pas à montrer, pour les objets que nous avons regardés au moins, que les grandeurs et le continu sont nécessaires pour que les élèves *construisent* de nombreux savoirs « numériques » ? La situation est paradoxale.

A partir de 1980, on introduit des grandeurs et du continu dans le numérique ce qui, au regard de sa création, est étonnant. Il semblerait que les grandeurs reviennent sans référence à une théorie mathématique mais au nom de la physique ou de la construction des connaissances par les élèves. Cela semble avoir notamment pour conséquence une rupture entre les mathématiques et le didactique. Ces *phénomènes* ont-ils des conséquences sur les apprentissages ?

Enfin, en 1970, il semble qu'on crée le domaine mesure pour constituer le numérique. Compte-tenu des incursions multiples des grandeurs et du continu dans le numérique, quelle est aujourd'hui la fonction du domaine mesure dans l'enseignement des mathématiques du primaire ?

Bibliographie

Artaud, 1997, Introduction à l'approche écologique du didactique - l'écologie des organisations mathématiques et didactiques, *Actes de la IXème école d'été de didactique des mathématiques*, pp 100-139, La Pensée Sauvage

Bessot & Eberhard, 1983, Une approche didactique des problèmes de la mesure, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 4/3, pp 293-324, La Pensée Sauvage

Bourbaki, 1984, *Eléments d'histoire des mathématiques,* Masson

Bourbaki, *Topologie générale*, chapitre V, §2

Bronner, 1997, *Etude didactique des nombres réels. Idécimalité et racine carrée*, Thèse de l'Université Grenoble 1

Chambris, 2004, *Rapports entre grandeurs, nombres et opérations dans les programmes de l'école primaire élémentaire au 20ème siècle*, Mémoire de DEA de l'Université Paris 7

Chevallard & Bosch, 2002, Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie II. Mathématisations, *Petit x n°59*, IREM de Grenoble, pp 43-76

Dhombres, Réels (Nombres), article de l'*Encyclopædia Universalis*

Dorier et al, 2002, Mesure et Grandeur dans l'enseignement des mathématiques, *Actes de la XIème école d'été de didactique des mathématiques*, La pensée sauvage

d'Enfert, 2003, *L'enseignement mathématique à l'école primaire de la Révolution à nos jours*, Ed INRP

Euclide,1990, *Les éléments*. Volume I, Livres I à IV, traduits du texte de Heiberg, Introduction générale Maurice Caveing, Traduction et commentaires Bernard Vitrac, Paris, Collection Bibliothèque d'Histoire des sciences, PUF

Euclide, 1994, *Les éléments*. Volume II, Livres V à IX, traduits du texte de Heiberg. Traduction et commentaires Bernard Vitrac, Paris, Collection Bibliothèque d'Histoire des sciences, PUF

Harlé, 1984, *L'arithmétique des manuels de l'enseignement élémentaire français au début du XXème siècle*, Thèse de l'Université Paris 7

Hersant, 2005, La proportionnalité dans l'enseignement obligatoire en France, d'hier à aujourd'hui, *Repères-IREM n°59*, pp5-41

Lebesgue,1975 (nouvelle édition), *La mesure des grandeurs*, Paris, Librairie Albert Blanchard

Perrin-Glorian, 1992, *Aires de surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-6ème*, Thèse de doctorat d'état de l'Université Paris 7

Rouche, 1992, *Le sens de la mesure, des grandeurs aux nombres rationnels*, Bruxelles, Didier Hatier

Whitney, 1, 1968, The mathematics of physical quantities, Part I: Mathematical Models for Measurement, *American Mathematical Monthly n°75*, pp 115-138

Whitney, 2, 1968, The mathematics of physical quantities, Part II: Quantity Structures and Dimensional Analysis, *American Mathematical Monthly n°75*, pp 227-256