PLAIDOYER POUR DES TRANSFORMATIONS QUI CHANGENT LES FORMES

Géard KUNTZ [1]
Irem de Strasbourg

Les différentes transformations ponctuelles qui sont proposées aux élèves tout au long du Collège et du Lycée possèdent des vertus rares (et précieuses) dans la grande famille des transformations ponctuelles : elles *conservent* les formes, les angles géométriques (parfois orientés), l'alignement, le parallélisme, l'orthogonalité, les barycentres, le contact... L'élève qui subit l'énumération, puis la démonstration répétitive de ces propriétés, finit par se dire qu'elles sont la règle. Cette erreur de perspective explique l'ennui, perceptible en Première et Terminale, face à des démonstrations de théorèmes considérés comme « évidents » par accumulation. Rien de tel pour réveiller l'intérêt, que de proposer aux élèves une transformation ponctuelle qui ne soit pas systématiquement conservatrice, par exemple l'inversion. Elle fut longtemps enseignée en Terminale, avant l'émergence de l'outil informatique, puis injustement oubliée. Elle peut être étudiée, grâce à l'informatique, dès le Collège. On se contente, à ce niveau, d'observer, de décrire et d'établir quelques propriétés liées à sa définition. En Première, la démarche théorique peut partiellement expliquer et justifier certaines images informatiques étonnantes. En Terminale, l'inversion est un excellent sujet de travaux dirigés, en relation avec les nombres complexes par exemple [2].

Cet article reprend les idées principales de celui qui parut dans Repères-Irem n° 30 sous le titre : « *Une transformation oubliée qui sort de l'ordinaire : l'inversion* [3] ». Il les complète en adoptant de nouveaux points de vue, en utilisant largement Cabri (à côté de Graph'x) et en situant résolument l'origine de l'activité *dès le Collège.*

Mais surtout, cet article inaugure *une co-édition de Repères-Irem* [4] *et du site EducMath* [5] qui conjuguent ainsi leurs forces respectives : la pérennité de l'édition papier et la rigueur de l'écrit [6]

1 Membre du comité scientifique des Irem. *gkuntz@sesamath.net*

2 Les élèves de Seconde (et même de Première Scientifique...) ont de la peine à entrer dans une démarche mathématique demandant plusieurs étapes et la construction de savoirs intermédiaires. L'informatique permet de MONTRER d'emblée les images d'une courbe et de sa transformée. Elle crée un choc visuel qui peut éveiller l'intérêt, puis l'attention pour l'indispensable et difficile étape d'interprétation et de d'explication des images. C'est son mérite principal.

3 http://publimath.irem.univ-mrs.fr/biblio/IWR98009.htm

4 http://www.univ-irem.fr/commissions/reperes/reperes.htm

5 http://educmath.inrp.fr/Educmath

6 Les bibliothèques assurent la pérennité. L'écrit « papier » est, à cause de la difficulté de le modifier ultérieurement, généralement plus soigné que les textes en ligne. Sur EducMath, on trouve les figures dynamiques(téléchargeables) de cet article.

d'une part, la facilité d'accès, la possibilité de proposer des figures dynamiques téléchargeables et le forum de discussion associé à l'article d'autre part. La version électronique de l'article se trouve en http://educmath.inrp.fr/Educmath/lectures/article_mois/g-kuntz/.

Si l'expérience est concluante, elle pourra être étendue à d'autres articles que la double édition permet de valoriser.

1. — Des activités en Collège

a) *Un problème d'aire*

On propose l'énoncé suivant :

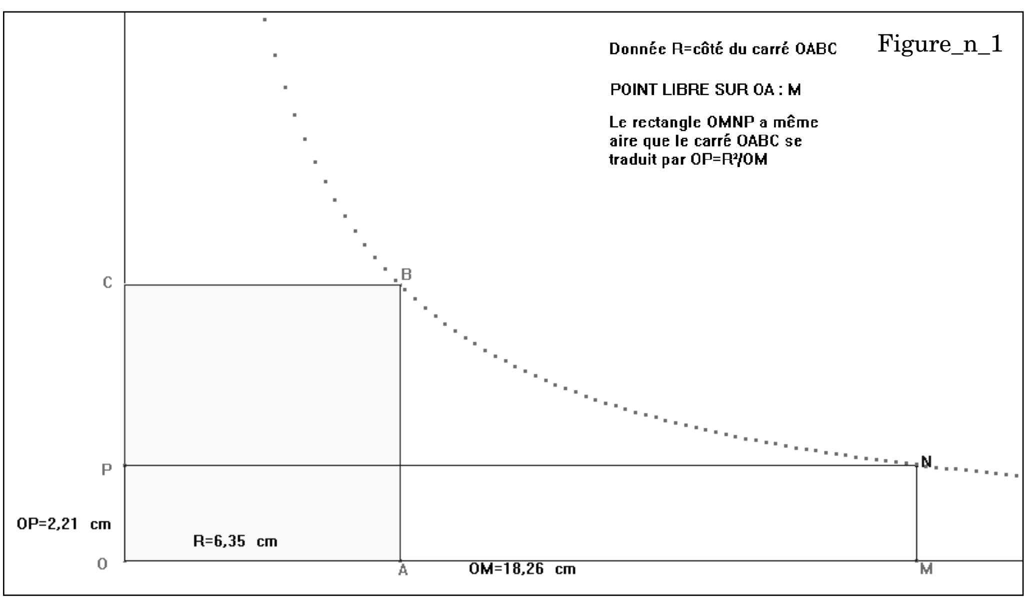
> On donne un carré OABC, dont la longueur du côté est R. On donne un point M sur la demi-droite [OA). Construire un point P sur la demi-droite [OC) de façon que le rectangle OMNP ait *même aire* que celle du carré. Sur quelle ligne se déplace N quand M parcourt la demi-droite OA ? Il est conseillé de construire la figure avec un logiciel de géométrie dynamique.

Dans l'article, nous utiliserons Cabri pour réaliser les figures. On trace une « demi-droite » d'origine O que l'on fait « tourner » (rotation de centre O et d'angle 90°). On place A et M sur la première demi-droite, puis B, par la même rotation appliquée à A, sur la seconde demi-droite.

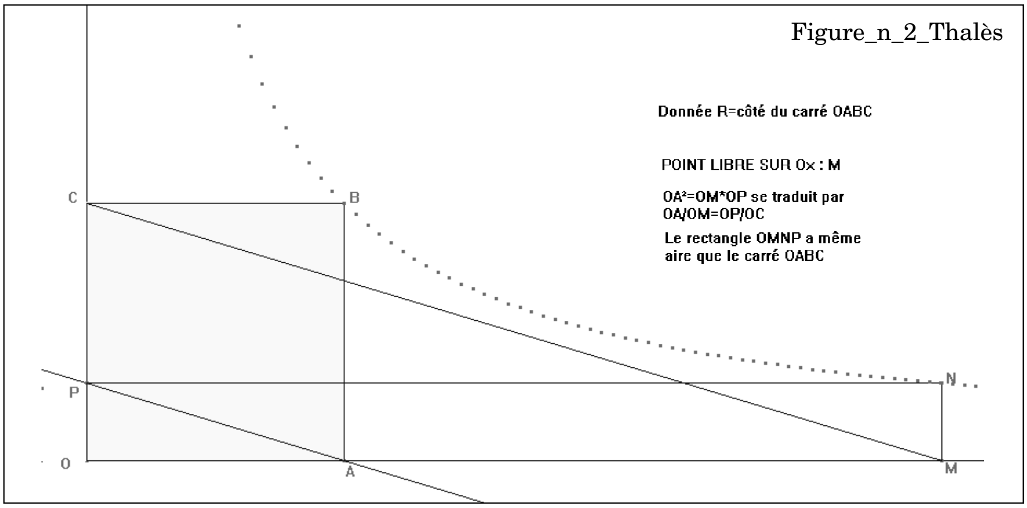
Les hypothèses se traduisent par la relation OM.OP = R^2. *On peut l'interpréter de différentes manières.*

Dans le cadre numérique, on écrit : OP = $\dfrac{R^2}{\text{OM}}$

On fait alors afficher la longueur[7] R de [OA] et celle de [OM]. On introduit ces valeurs dans la calculatrice de Cabri pour évaluer la longueur de [ON] que l'on reporte (« report de mesure »)



7 Commande « distance et longueur ».



sur la demi-droite OC. On obtient ainsi le point P. Il suffit alors de construire N (« droite perpendiculaire » et « point sur deux objets »).

En déplaçant M sur la demi-droite OA (« point sur objet »), N se déplace sur une « ligne » (on dira une courbe) qui passe par B (on demande la raison aux élèves). On peut matérialiser cette courbe avec la commande « lieu [8] ».

Le professeur pourra faire remarquer qu'à chaque point M distinct de O (à chaque longueur de [OM] distincte de 0) correspond un unique point N. On dira alors que *N est fonction de M*. Il en est de même pour P qui est aussi fonction de M. Cette propriété se traduit ici par une formule : $\mathrm{OP} = \dfrac{R^2}{\mathrm{OM}}$.

Autre notion intéressante, celle de *« paramètre d'un problème »*. Le carré OABC est certes donné. Mais rien n'empêche de « déplacer A », donc de choisir une autre valeur de R. Pour chaque choix de A, Cabri recalcule la figure et en particulier le « lieu » de N. C'est spectaculaire et très parlant !

On le voit, dans cet exercice simple se profilent des notions essentielles.

Dans le cadre géométrique, la relation $\mathrm{OM.OP} = R^2$ est susceptible de multiples interprétations.

Une première réécriture [9] en $\dfrac{\mathrm{OP}}{R} = \dfrac{R}{\mathrm{OP}}$ nous conduit au registre « Thalès ». On peut l'écri-

8 Malgré sa complexité, je la préfère à la commande « trace » car elle génère un « objet Cabri » (contrairement à « trace » qui génère un dessin statique). Point n'est besoin d'entrer dans le détail de la notion de lieu : il suffit d'expliquer qu'il s'agit de dessiner (et de conserver) différentes positions de N quand « M varie ». Je propose de configurer les « préférences » du lieu en décochant « lier les points » et en choisissant 100 points pour le lieu. On obtient ci-dessous le tracé point par point du lieu en Figure_n_1 (On évite ainsi de créer dans l'esprit des élèves les idées fausses d'exhaustivité et de continuité dans le tracé proposé par Cabri.)

9 Cette réécriture est d'une grande difficulté en Collège. Elle suppose un travail préalable, hors contexte informatique. Mais elle est suffisamment riche (elle transforme une écriture inexploitable en une forme qui permet une interprétation par la réciproque de Thalès) pour qu'on lui accorde du temps. Les réécritures sont essentielles dans tous les domaines des Mathématiques.

re $\frac{OP}{OC} = \frac{OA}{OP}$, qui traduit le parallélisme des droites (CM) et (AP). La construction de P, puis de N en découlent (voir Figure_n_2_Thalès).

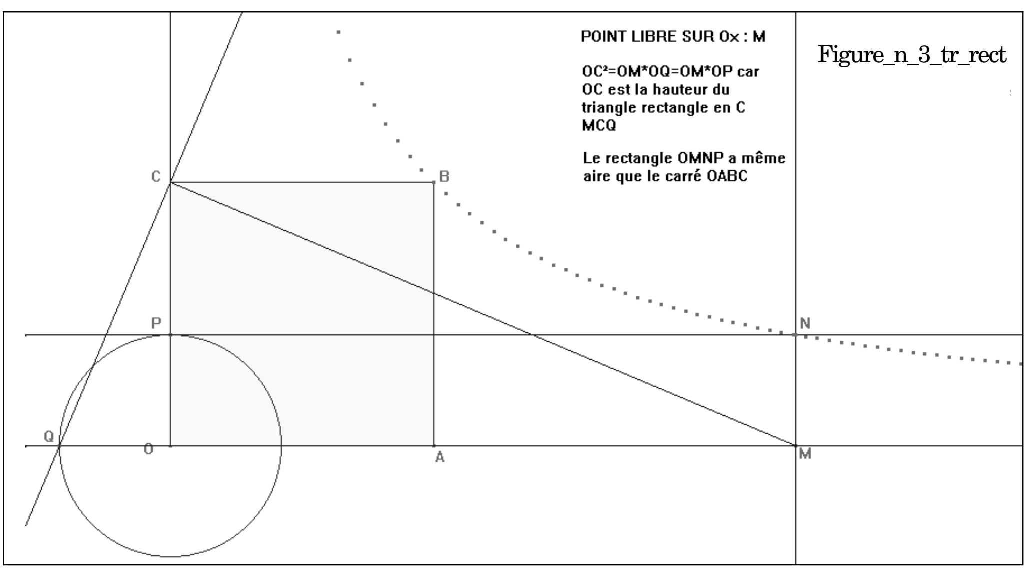
Dans cette interprétation, aucune *longueur* n'est directement utilisée : cette construction diffère profondément de la précédente. On définit ici une fonction qui transforme M en P (ou M en N) qui n'est liée *à aucune formule.*

Autre interprétation géométrique suggérée par OM.OP = R^2 , celle d'une hauteur d'un triangle rectangle, moyenne proportionnelle entre les segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse [10]. La Figure_n_3_tr_rect en rend compte.

Une seconde interprétation de cette relation « dans le triangle rectangle », celle d'un côté de l'angle droit, moyenne proportionnelle entre les segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse, présente une difficulté technique.

Elle suppose *deux constructions différentes* suivant que OM est supérieur ou inférieur à R. Cabri prend en charge de telles constructions *conditionnelles,* comme le montrent les deux copies d'écran (a et b) *de la même figure dynamique* (Figure_n_4_tr_rect1). Mais la construction du lieu se fait aussi en deux temps, à partir des deux situations [11]. On le voit, les différentes interprétations de la relation initiale n'ont pas le même coût !

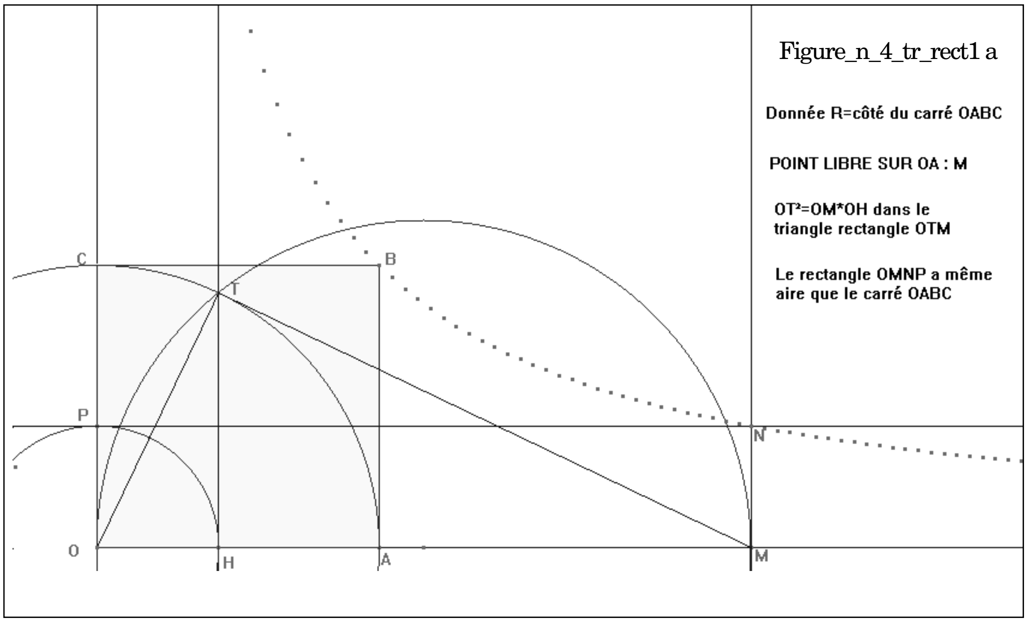
On peut ainsi, à propos de cet exercice simple, mobiliser de multiples connaissances mathématiques et conduire les élèves à pratiquer nombre de changements de cadres et de registres. Nous allons maintenant utiliser ces acquis pour aborder une notion plus abstraite, celle de « transformation ».

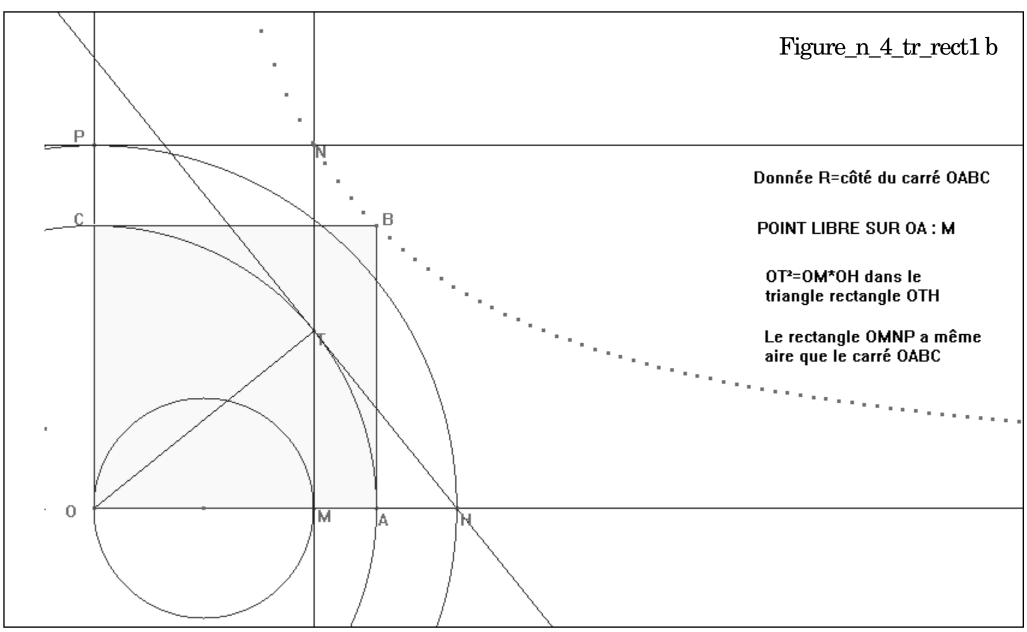


Figure_n_3_tr_rect

10 Cette propriété du triangle rectangle (et la suivante) ne sont pas au programme de Collège. Rien n'empêche de les donner aux élèves (dans le contexte Cabri, elles se vérifient aisément), en annonçant leur démonstration en lycée. Cela permet d'approfondir la notion de « macro », donc de fonction. Mais on peut aussi renvoyer cette partie en Première ou Terminale scientifique.

11 Suivant la position de OM par rapport à R, Cabri construit la partie de lieu correspondant à cette situation.


Figure_n_4_tr_rect1 a
Donnée R=côté du carré OABC
POINT LIBRE SUR OA : M
OT²=OM*OH dans le triangle rectangle OTM
Le rectangle OMNP a même aire que le carré OABC
C
B
T
P
N
O
H
A
M


Figure_n_4_tr_rect1 b
Donnée R=côté du carré OABC
POINT LIBRE SUR OA : M
OT²=OM*OH dans le triangle rectangle OTH
Le rectangle OMNP a même aire que le carré OABC
P
N
C
B
T
O
M
A
H

b) *Une transformation ponctuelle qui sort de l'ordinaire...*

On peut proposer des prolongements à l'énoncé initial, en ces termes :

On donne un point fixe O et une longueur R. A tout point M *distinct de* O, on associe le point M', situé sur la demi-droite [OM) (d'origine O) et vérifiant : OM.OM' = R^2 .

Pourquoi fait-on l'hypothèse M $\neq$ O ?

Construisez M' à partir de M.

Observez le déplacement de M' en fonction de M. Commentez.

Cette transformation conserve-t-elle les distances ?

Placez M sur une droite (D). Sur quelle ligne semble alors se déplacer M' ? (on pourra utiliser la commande « lieu »). Déplacez (D).Décrivez.

Placez M sur un cercle (C). Sur quelle ligne semble se déplacer M' ? (on pourra utiliser la commande « lieu »). Déplacez (D). Décrivez.

Placez M sur un triangle (T). Sur quelle ligne semble se déplacer M' ? (on pourra utiliser la commande « lieu »). Déplacez (T). Décrivez.

On voit bien le rapport de cette partie avec le début de l'énoncé, où l'on construisait P (puis N) à partir de M. On peut remplacer les données de O et de R par celle *du cercle* (Γ) de centre O et de rayon R. On construit ensuite la demi-droite [OM) et celle qui s'en déduit par rotation de centre O et d'angle 90°. Nous sommes *alors* exactement dans la situation qui vient d'être traitée [12]. On a donc quatre manières distinctes de construire P, dont on déduit M', intersection de [OM) et du cercle (O, OP).

On peut ensuite, pour chacune des constructions réalisées, définir *la macro-construction associée.* Dans ces quatre macros [13], *les objets initiaux* sont (Γ) et M. *L'objet final* [14] est le point M'. A chaque donnée d'un cercle et d'un point (distinct du centre du cercle) la macro associe un unique point M' situé sur [OM) et vérifiant OM.OM' = R^2. On retrouve un processus fonctionnel, déjà signalé plus haut, mais largement complexifié. A tout couple (Cercle, point) cette « fonction » associe un unique point M'. En général, on *fixe le cercle* (Γ) (son centre O et son rayon R) et on définit ainsi la « fonction » I_Γ qui associe à tout M $\neq$ O l'unique point M' :

$$I_\Gamma : M \longmapsto M'.$$

I_Γ est appelée *inversion de cercle* **(**Γ). (Γ) joue le rôle de « paramètre » de I_Γ.

Les macros réalisées sont successivement enregistrées (sous les noms Inv_num, Inv-Thalès, Inv_tr_rect, Inv_tr_rect1 : ce sont des fichiers **.mac**). Elles sont alors utilisables à tout moment d'une activité géométrique avec Cabri. Elles sont offertes en téléchargement sur EducMath.

A partir de là, on peut traiter la suite du problème. On ouvre les quatre macros (commande « fichier » puis « ouvrir » et désigner successivement chaque macros). Elles sont ajoutées au menu « macro » et utilisables à la demande.

On construit Γ(O, R) et le point M.

Dans le menu « macros », on clique sur Inv_Thalès (par exemple), puis on désigne les objets initiaux, *cercle Γ (cliquer) et point M (cliquer)* : à partir de ces « objets initiaux,

12 Dans la première partie, les demi-droites étaient premières et M était sur une de ces demi-droites. Ici c'est M qui est la donnée initiale, dont on déduit les demi-droites. C'est essentiel si on veut que les futures macro-constructions puissent être validées.

13 On peut se contenter des deux premières, si on se refuse à utiliser les propriétés du triangle rectangle en Collège.

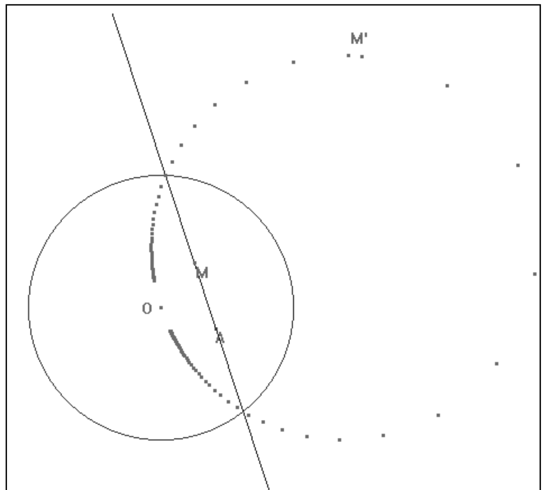
14 Attention : Inv_tr_rect1 a deux objets finaux, correspondant chacun à un des deux cas de figure.

Cabri construit M’, inverse de M. On peut alors nommer ces deux points, puis déplacer M et observer M’.

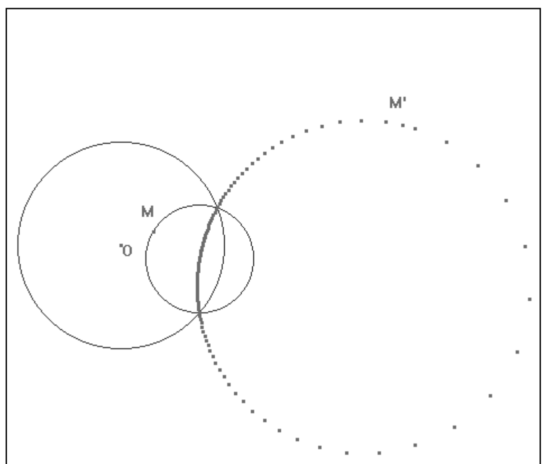
On remarque que quand M s’approche de O, M’ s’en éloigne (jusqu’où ?) ; quand M s’éloigne de O, M’ s’en approche (jusqu’à quel point ?).Quand M est sur Γ, M’est confondu avec M. Les élèves sont invités à expliquer ces observations.

On pourra faire d’intéressantes observations à propos de fractions dont le numérateur est fixé et dont le dénominateur est de plus en plus voisin de 0 (ou de plus en plus grand) : c’est une première approche de la notion de limite. On distinguera bien sûr le plan mathématique (infiniment étendu et infiniment divisible) et l’écran graphique, avec son nombre fini *de pixels* (entre deux pixels continus, il n’y a rien). On peut comprendre ainsi pourquoi à l’écran, *M’ peut se trouver en O* (prendre *R* petit et M loin de O)

On construit ensuite une nouvelle figure, (Γ) et une droite (D). On place M sur (D) (point sur objet). On construit l’image M’ de M par l’inversion (au moyen d’une des quatre macros *au choix*). On déplace M sur (D) et on observe M’. On matérialise la ligne où se déplace M’ en construisant *le lieu de M’* quand M varie sur (D) (commande « lieu », cliquer sur M’, puis sur M). On obtient la figure suivante (Inv_droite.fig), sur laquelle on peut agir de différentes manières : on déplace (D) parallèlement à elle-même (saisir A) ou en la basculant autour de A. On peut aussi déplacer (Γ) ou modifier son rayon. Le « lieu » est recalculé instantanément. Ces images dynamiques sont fort complexes et doivent être longuement fixées, étudiées et commentées. On regardera en particulier de qui se passe quand (D) s’approche de O.

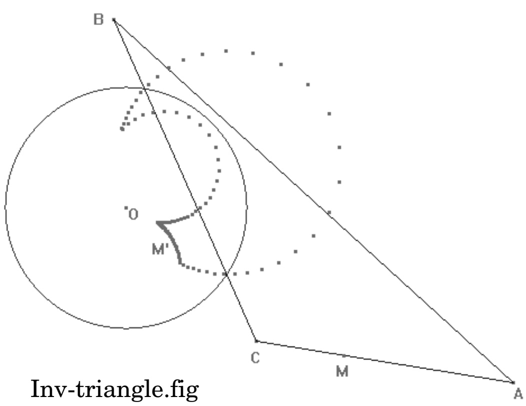


Inv_droite.fig



Inv_cercle.fig

Même travail quand M se déplace sur un cercle. La figure Inv_cercle.fig en témoigne. Elle permet les mêmes expériences qui appellent de nombreux commentaires.



Inv-triangle.fig

Si on définit *un objet « triangle » ABC*, on peut choisir M « sur cet objet ». Si on transforme M en M' par une des macros, il reste à définir le « lieu » de M' quand M parcourt le triangle ABC (Inv_triangle.fig). Les modifications du triangle conduisent à d'intéressantes modifications de l'image. On peut généraliser en remplaçant l'objet « triangle » par un objet « polygone ».

Les élèves qui sont arrivés jusqu'ici ont fait des mathématiques intéressantes et variées, qui sont *indispensables* pour créer ces images. Ils ont au passage, pris contact avec plusieurs notions appelées à un bel avenir au lycée (*paramètre* et diverses formes de *fonction*). Il leur reste à formuler leurs conjectures (c'est loin d'être simple) et *à démontrer* que cette transformation ne conserve pas les distances (ce qui est tout à fait à leur portée...).

Il reste à prolonger ces découvertes au lycée, en passant dans le cadre algébrique.

2. — Approche algébrique et prolongements de cette activité en lycée.

Dans Repères-Irem n° 30, l'activité qui précède avait été traitée dans le cadre algébrique, à l'aide du traceur de courbes Graph'x. Celui-ci possède une qualité essentielle et (à ma connaissance) unique parmi les traceurs : il permet de transformer une courbe C_i [15] définie pas son équation cartésienne, paramétrique ou polaire, en une courbe C_{i+1} *par simple introduction des formules mathématiques de la transformation* [16]. Si I transforme M(x,y) en M'(x',y') tel que $x' = f(x,y)$; $y' = g(x,y)$, il suffit d'écrire l'équation paramétrique deC_{i+1} sous Graph'x : $x(t) = f(x_i,y_i)$; $y(t) = g(x_i,y_i)$.

Le logiciel interprète x_i et y_i comme *coordonnées du point courant de la courbe i* (C_i) et trace alors *point par point la courbe* i+1, (C_{i+1}), image de C_i par I (le tracé point par point doit être demandé au logiciel [17] : c'est pédagogiquement très important, comme nous l'avons déjà signalé plus haut. Il faut encore préciser que la courbe initiale peut être introduite en machine indifféremment sous forme cartésienne, paramétrique ou polaire. Ces qualités sont suffisamment importantes [18] pour que nous continuions à utiliser ce logiciel malgré son côté un peu… « archaïque » sur le plan technique. On peut, grâce à ces propriétés, tracer *les inverses des courbes données par une équation,* pourvu qu'on connaisse les formules caractérisant l'inversion. C'est l'idée du problème que j'avais proposé à des élèves de Pre-

15 Graph'x numérote les courbes.

16 Les choses se passent bien pour des courbes simples. Mais il ne faut pas attendre de miracles quand les courbes sont complexes. C'est l'occasion de réfléchir avec les élèves aux limites de l'outil informatique.

17 On l'obtient en fixant à 7 le paramètre de « Trait » (Cf. plus loin).

18 Il a été écrit par un professeur de mathématiques, Paul Moutte et ça se voit !.

mière S dans l'ancien article de Repères. J'en rappelle l'énoncé :

> UNE TRANSFORMATION ORIGINALE : L'INVERSION
>
> O est un point fixe donné du plan, R^2 est un réel donné non nul, $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé. $I(O,R^2)$ est la fonction du plan dans lui-même, définie ainsi : au point M du plan, $I(O,R^2)$ associe le point M' tel que :
>
> a) O, M, M' soient alignés.
>
> b) $\overline{OM} * \overline{OM'} = R^2$
>
> 1°) Montrez que la condition b) est équivalente à $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = R^2$
>
> 2°) Quel est l'ensemble de définition de $I(O,R^2)$? Y a-t-il des points invariants ? Précisez-les.
>
> 3°) Pour toute la suite, on prendra $R^2 = 2$.
>
> a) A partir de la définition de $I(O,2)$, comment évolue M' quand M s'approche de O ? Quand M tend vers O ? Quand M s'éloigne de O ? Où se trouve M' quand M est très loin de O ?
>
> b) Soient (x,y) les coordonnées de M, (x',y') celles de M'. Calculez x' et y' en fonction de x et y.
>
> 4°) Sous Graph'x, tracez une droite D ne passant pas par O. Tracez l'image de D par $I(O,2)$. Conjecture ? Que se passerait-il si D contenait O ?
>
> 5°) Tracez un cercle ne contenant pas O. Quelle est son image par $I(O,2)$?
>
> 6°) Tracez un cercle passant par O. Quelle est son image par $I(O,2)$?
>
> 7°) Quelle est l'image de la parabole d'équation $y = x^2 - 0,5$?
>
> 8°) Appliquez $I(O,2)$ à des courbes qui vous paraissent intéressantes dans ce contexte (expliquez pourquoi).

Les six premières questions du problème reprennent dans le cadre algébrique l'activité traitée plus haut sous Cabri. Cette approche a ses difficultés propres. Ici, on ne déplace pas les courbes à la souris, mais en agissant sur leurs équations… Ce n'est pas triste !

Inversion, asymptotes et tangentes.

Les questions 7 et 8 ouvrent sur des prolongements qui ont été à peine esquissés dans l'ancien article de Repères. Comment sont transformées par inversion les branches infinies des courbes ? En Première S, on peut aller au-delà des conjectures, pourvu qu'on ait compris la notion de dérivée et son versant géométrique, la tangente.

Traitons en détail l'exemple suivant : On veut transformer par inversion de centre O et de rapport 2 l'hyperbole d'équation :

$$y = x + 1 + \frac{1}{x}.$$

Sous Graph'x on définit une courbe n° 1 de la façon présentée dans l'encadré 1 de la page suivante, puis on définit la courbe numéro 2 comme dans l'encadré 2.

En lançant le tracé, on obtient les deux courbes sur le même écran (encadré 3).

La commande « Zoom », appliquée *répétitivement* à un rectangle centré à l'origine donne les tracés des encadrés 4 et 5.

On n'est guère surpris que la courbe transformée entre dans un rectangle contenant l'origine : les points les plus proches de O de la courbe initiale, sont transformés en les points les plus éloignés de O de la courbe image. Les points » très éloignés de O » sont transformés en des points « très proches de O ». Les zooms

Encadré 1

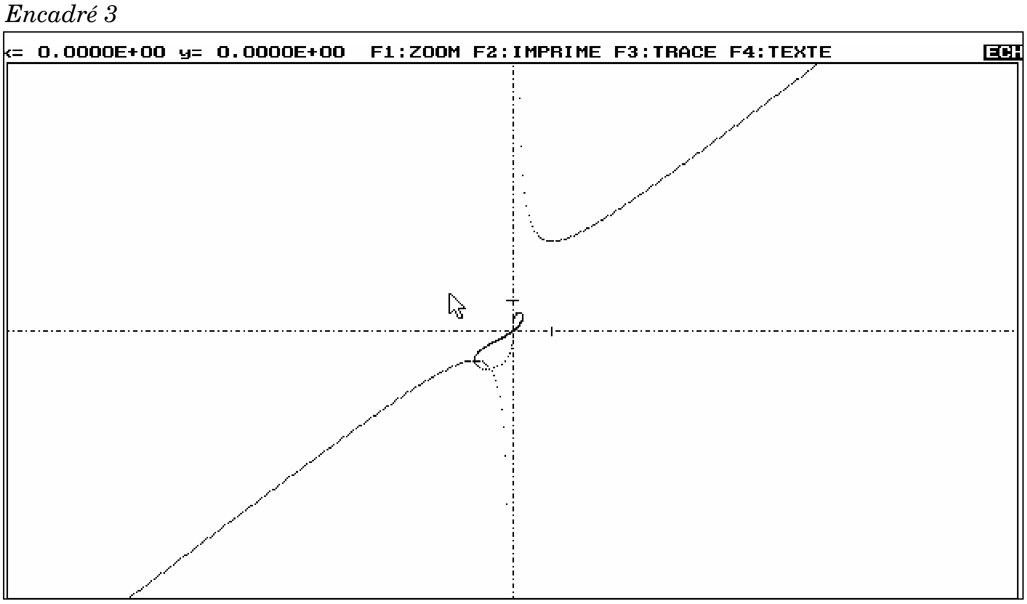
```
Courbe numéro:  1 | 18/26 | Insertion | Cartésiennes | 10:37:14 | 336800
Ensemble d'étude :[-13,13]

y = x+1+1/x
unités(cm) Ox:1          Oy:1          trait:7 couleur:0 hachure:0 pas:0.05
Position de l'origine en cm à partir du coin en bas à gauche: xo=13  yo=9
Longueur des axes en cm: xpositif=13  xnégatif=13  ypositif=9  ynégatif=9
 donnée précédente  donnée suivante   caractère précédent  caractère suivant
F10 aide                 efface à gauche    ECHAP annulle commande Alt+T efface textes
F1  lancement tracé   F6 efface sous curs.  Alt+F10 appel disque  Alt+A annule courbe
F2  courbe précédente F7 efface ligne       ImpEcr imprime        Alt+Z mise à zéro
F3  courbe suivante   F8 saut début ligne   Alt+F2 menu tableau   Alt+P paramètre
F4  chgt coordonnées  F9 saut fin ligne     Alt+F3 insère courbe  Alt+X fin programme
F5  axes              Alt+F1 change mode    Alt+F4 copie formule  Alt+C configuration
```

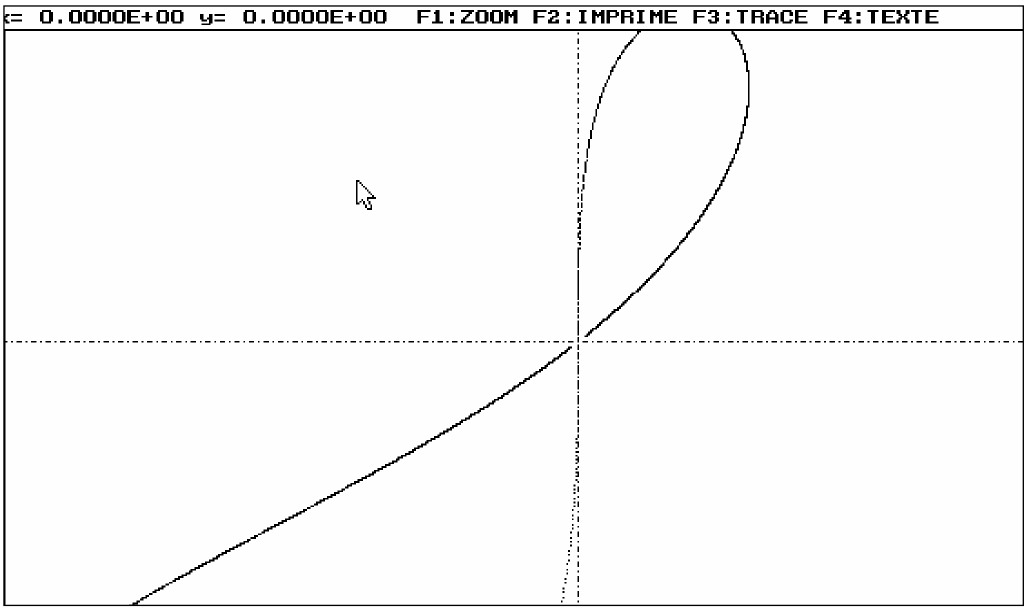
Encadré 2

```
Courbe numéro:  2 | 18/26 | Insertion | Paramétriques | 11:03:53 | 337112
Ensemble d'étude :[-100,100]
x(t)=2*x1/(x1^2+y1^2)
y(t)=2*y1/(x1^2+y1^2)
```

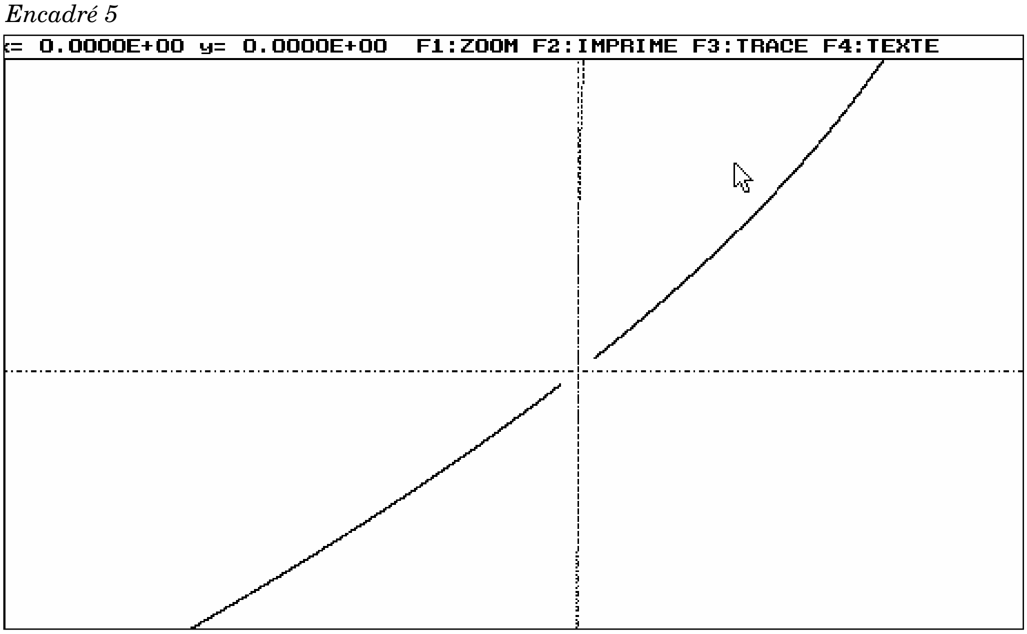
Encadré 3



Encadré 4



Encadré 5



successifs autour de O font apparaître des « trous » que l'ancien article de Repères explique clairement. Mais ils laissent aussi entrevoir que la courbe transformée, *complétée par le point O, possède en O deux tangentes parallèles aux asymptotes de la courbe initiale*. Il n'est pas bien difficile de le prouver.

Prenons par exemple un point M de l'hyperbole, dont l'abscisse tende vers plus l'infini. L'étude de la limite à l'infini de $\frac{f(x)}{x}$ montre [19] que (OM) tend vers une position limite, parallèle à l'asymptote ($y = x + 1$). Un raisonnement géométrique simple conduit aux mêmes conclusions.

Dans ces conditions, OM' tend vers 0. M' tend donc vers O sur la courbe inverse. La droite (OM'), qui est *la même* que (OM), admet la même position limite. La courbe inverse de l'hyperbole, complétée par O, admet donc en O une tangente d'équation $y = x$.

Un raisonnement analogue montre qu'elle admet en O la droite (Oy) comme tangente.

Pour la parabole d'équation $y = x^2 - 0{,}5$, on montre que l'inverse complétée par O admet (à deux titres [20]) (Oy) comme tangente en O (la position limite de (OM) est mise en évidence par la limite à l'infini de $\frac{x^2 - 0{,}5}{x}$).

Il en est de même de l'inverse de toute courbe ayant des branches paraboliques de direction (Oy).

Il est intéressant de considérer de ce point de vue le « curieux insecte » obtenu en inversant la courbe d'équation $y = 0{,}3 + \frac{1}{2\cos x}$

On peut rompre la symétrie de la courbe inverse en remplaçant $\cos x$ par $\cos(x - 1)$ par exemple. On peut aussi s'interroger sur la réciproque de la propriété mise en évidence : soit une courbe passant par O et ayant en O une tangente parallèle à une droite (D). Comment se traduit cette propriété sur la transformée de cette courbe privée de O ?

Une transformation involutive [21]

Enfin, conséquence de la facilité de transformer une courbe sous Graph'x, il n'est pas très compliqué de mettre en évidence *le caractère involutif* de l'inversion. Il suffit de proposer la question suivante :

> Pour chaque courbe transformée par l'inversion, on cherche à transformer la courbe image (courbe n° 2) *par la même inversion*. Comment réaliser ce projet sous Graph'x ? Que découvre-t-on ? Expliquez le phénomène observé. Pour distinguer la courbe initiale (n°1) de la courbe finale (n° 3), on peut *ne pas tracer* la courbe n° 2 (Trait #) et mettre la courbe n° 3 dans une couleur distincte de la courbe n°1.

Voici (encadré 6) l'écran correspondant à la courbe 3 qu'il convient d'ajouter pour obtenir, dans chaque cas, le résultat demandé (la courbe, l'inverse et l'inverse de l'inverse…).

Ce qu'on observe, *la probable superposition des courbes 1 et 3* s'explique par le fait que l'inversion *échange M et M'* :

$$\mathrm{OM}.\mathrm{OM}' = R^2,$$

$$I_\Gamma : \mathrm{M} \longmapsto \mathrm{M}', \qquad I_\Gamma : \mathrm{M}' \longmapsto \mathrm{M}.$$

19 $\frac{f(x)}{x}$ est la tangente trigonométrique de $(\vec{i}, \overrightarrow{\mathrm{OM}})$.

20 Point de rebroussement.

21 Transformation dont le carré égale l'identité.

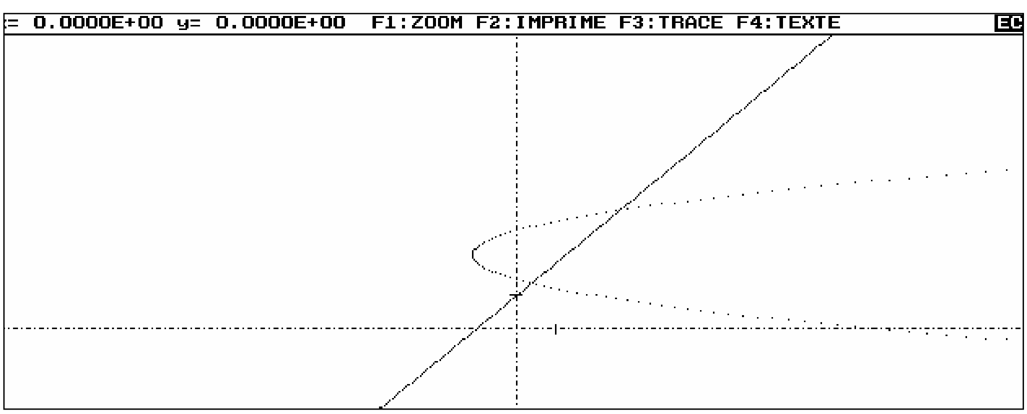
Encadré 6

```
Courbe numéro: 3 | ◄▮ ▮► | 18/26 | Insertion | Paramétriques | 11:04:55 | 336144
Ensemble d'étude :[-13,13]
x(t)=2*x2/(x2^2+y2^2)
y(t)=2*y2/(x2^2+y2^2)
```

Des usages performants de Graph'x en Collège ?

Il serait erroné de croire que Graph'x n'a d'applications qu'en Lycée. On peut poursuivre en Collège l'exploration des « transformations qui changent les formes » dès qu'on a la notion de coordonnées d'un point dans un repère. On peut alors proposer *une activité « papier »* dont les règles sont les suivantes : à tout M(x,y) on associe M' (x',y'), x' et y' étant calculés à partir de x et de y (par exemple : $x' = 2x + 3y$; $y' = -x + y$). On peut calculer « à la main » x' et y' pour plusieurs points et mettre en place M'. On peut regarder ce que deviennent les images de points alignés, les images de trois points formant un triangle, etc. De nombreuses notions et propriétés sont accessibles à ces démarches simples et expérimentales, hors environnement informatique.

Quand la démarche est bien comprise, on peut l'automatiser par Graph'x , comme nous l'avons fait précédemment. Rien n'empêche de donner aux élèves l'équation de courbes simples (on part évidemment des droites) et de jouer sur les transformations. On peut aussi leur demander « d'inventer des formules » qui donnent des images intéressantes… L'activité crée des images mentales fort importantes pour la suite. En voici un exemple (image de la droite d'équation $y = x + 1$) :



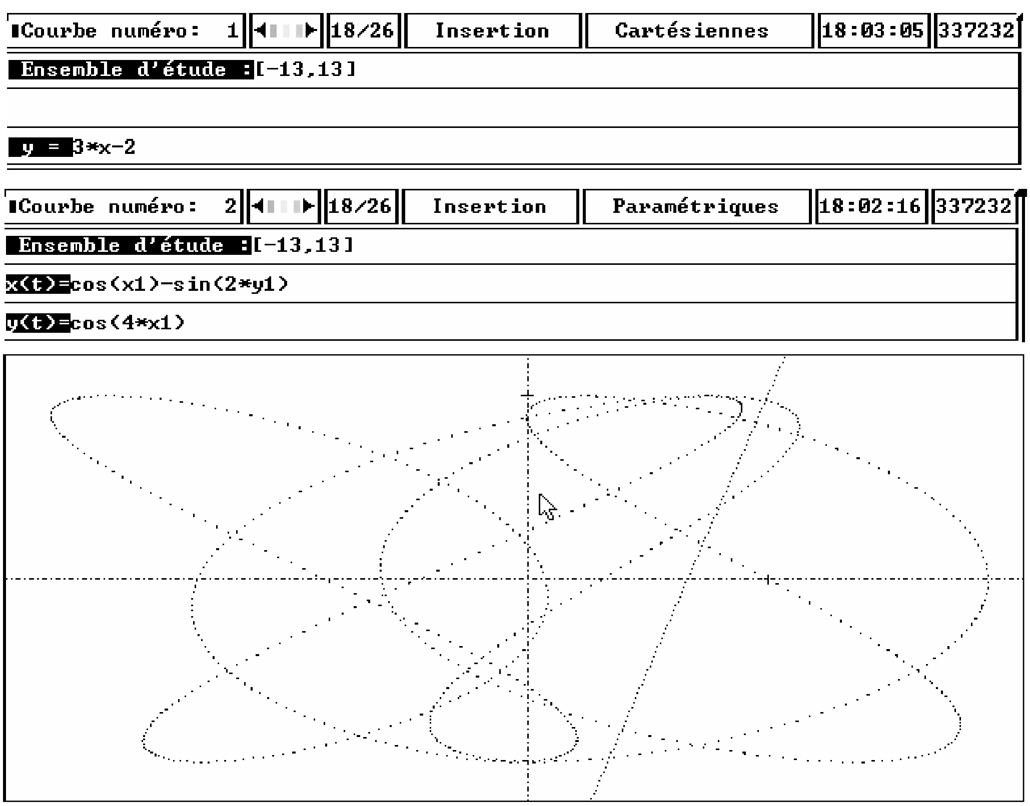

```
Courbe numéro: 2 | ◄▮ ▮► | 18/26 | Insertion | Paramétriques | 11:06:04 | 337224
Ensemble d'étude :[-13,13]
x(t)=2*x1^2-y1
y(t)=-x1+2*y1
```

On peut transformer une droite en une courbe plus compliquée (et plus spectaculaire). En voici une illustration dans l'encadré ci-dessous... On peut s'amuser à remplacer $\sin(2y_1)$ par $\sin(\sqrt{2}y_1)$ dans la formule de transformation, en étendant l'ensemble d'étude à [–100,100] par exemple. Les changements sont spectaculaires. En Collège, on se contentera d'observer. En Première ou en Terminale, on poussera les élèves à interpréter.

Conclusion.

L'élève de Collège ou de Lycée qui a participé aux activités décrites dans cet article (et dans le précédent, il ne faut pas les séparer), a un regard neuf sur les transformations. Il a compris que celles qui « conservent » sont loin d'être la généralité. Il sait maintenant en « fabriquer » de nombreuses, qui transforment une droite en courbe complexe.

Il a pratiqué de nombreux « changements de cadres et de registres », dont on connaît le caractère formateur. Il a rencontré au passage une transformation géométrique, l'inversion, qui joue un rôle essentiel en cartographie (projection stéréographique), en électronique et en mécanique des fluides, sans parler de la géométrie.



Il a fait les indispensables allers-retours entre les environnements « papier-crayon » et informatique, qui permettent, au prix d'un travail soutenu, de transformer des conjectures (nées de l'observation patiente des figures informatiques) en propriétés démontrées (l'informatique n'est d'aucune utilité dans cette étape).

Au-delà des considérations pédagogiques, *la parution simultanée* de cet article dans Repères-Irem et sur EducMath est une première qui convaincra peut-être les sceptiques *du caractère complémentaire* des deux modes d'édition. Si l'évolution des esprits était amorcée dans ce sens, cette co-édition aurait pleinement atteint son but… L'article peut être discuté sur les deux supports, sur le forum qui lui est associé sur EducMath et dans le courrier des lecteurs de Repères-Irem. Si des propositions significatives en résultaient (des améliorations et des extensions), EducMath publiera une nouvelle version de l'article que Repères-Irem signalera à ses lecteurs.

ANNEXE 1

Mise en place de Graphix.

Dans l'article en ligne, télécharger les fichiers zippés (suivre les indications). Procéder à l'extraction des fichiers.

Une fois les extractions effectuées, on trouve l fichier **traceur.exe** et les fichiers de l'article (suffixe .grx) dans le répertoire Graph'x

Un double clic sur **traceur.exe** génère les fichiers indispensables. Aux différentes questions posées à cette étape, répondre 'y' et valider ('y' pour 'yes' !).

Le fichier programme est GRAPHIX. On pourra mettre un raccourci sur le bureau. Le répertoire « exemples » contient de très nombreux exemples des possibilités du logiciel. Le fichier Demo est un fichier de démonstration.

Par les touches « Alt » + F10, on accède au disque. On choisit un fichier (suffixe .grx) puis on le « lit ».

La touche F1 lance le tracé. La touche « Echap » interrompt le tracé et permet de modifier paramètres et équations des courbes.

Un bandeau (en bas de l'écran) précise différentes commandes. Une aide sommaire est obtenue par la touche F10

ANNEXE 2

Mise en œuvre de ces activités avec des élèves.

L'activité proposée en Collège entre dans le cadre des travaux de synthèse (au troisième trimestre par exemple) avec utilisation l'outil informatique.

Tout problème suppose d'abord un travail en environnement papier/crayon/tableau, pour le comprendre, le traduire par des relations, envisager la construction de figures dynamique (Quelles figures ? Comment les construire).

Vient ensuite le travail avec Cabri : le problème peut être le moyen de découvrir et d'utiliser différentes commandes du logiciel. Cette étape recèle de nombreux pièges : une figure Cabri est un ensemble de liens logiques. Bien des élèves se contentent d'une figure approximative qui ne résiste pas aux déplacement de ses éléments…

L'interprétation des figures, la mise en évidence des invariants constitue une étape capitale du travail. Elle donne lieu en fin de parcours à un compte-rendu écrit (qu'avons-nous fait ? Qu'avons-nous constaté ? Quelle interprétation proposons-nous ? Comment le démontrer ?).

L'ensemble de l'activité « Collège » peut s'étaler sur tout un trimestre. Ainsi les élèves apprendront à gérer une activité de « longue durée » et à réinvestir dans un problème de nombreuses connaissances éparses… Le travail en groupe est un attrait supplémentaire.

Ces activités proposées en Collège peuvent constituer (dans le même contexte) d'utiles révisions en Seconde. La seconde partie de l'activité (avec Graphix) peut se traiter dans le même cadre (et le même esprit) en Première et Terminale.