COMBINATOIRE DES DOMINOS, UN ATELIER MATHEMATIQUE POUR LES ENFANTS(*)

Bénédicte AUTIER, Muriel CRON,
Anne-Céline MITTELBRONN,
Nathalie WACH et Marc WAMBST

Irem de Strasbourg

Résumé : *Nous décrivons un atelier mathématique destiné à des enfants de cycle 3 du primaire et travaillant des notions de combinatoire à l'aide de dominos et de triminos.*

Introduction

Historique.—Depuis plusieurs années, la Mission Culture Scientifique et Technique (M.C.S.T.) de l'Université Louis Pasteur de Strasbourg propose des ateliers de découverte scientifique durant les vacances scolaires à des enfants de huit à douze ans. Ces ateliers sont conçus et animés par le personnel de la M.C.S.T., mais aussi par celui d'autres composantes de l'Université Louis Pasteur dont le Musée Zoologique et le Jardin Botanique, ainsi que par les membres de l'association *Les Petits Débrouillards*.

En 2002, la M.C.S.T. a lancé un appel aux différentes U.F.R. (Unité de Formation et Recherche) de l'université pour qu'elles participent plus activement aux activités d'animation. L'U.F.R. de Mathématique-Informatique a répondu à cet appel en confiant à l'Irem la tâche de concevoir de tels ateliers. Nous avons ainsi constitué un groupe réunissant des enseignants-chercheurs de l'université, des enseignants du second degré ainsi qu'un professeur des écoles. Le groupe conçoit des ateliers mathématiques et les teste à la fois dans le cadre scolaire d'une école primaire et dans celui des ateliers de découverte scientifique de l'Université.

Notre démarche.— Nous savons que des musées scientifiques comme la *Cité des Sciences* et *le Palais de la Découverte* ainsi que des associations de vulgarisation comme *les Petits Débrouillards* organisent des ateliers scientifiques en direction des enfants. Certains de ces ateliers traitent de mathématiques. Néanmoins, nous n'avons pas trouvé de publication

(*) Cet article est paru dans l'Ouvert n° 110 (2004).

décrivant en détail leurs activités. Nous avons donc décidé de créer nos ateliers de toutes pièces. Les thèmes abordés ne sont certainement pas originaux. Nous avons adopté la démarche suivante. D'une part, nous récusons le terme de *jeu mathématique* et de *casse-tête*. Nous avons préféré présenter les problèmes de manière plus approfondie faisant appel à la notion de recherche plus qu'à celle de résolution. De plus, la non trivialité des problèmes est garantie par le rattachement à des notions fondamentales des mathématiques. D'autre part, bien que les thèmes des activités ne fassent pas partie du programme scolaire, celui-ci a été notre outil de référence pour préjuger du niveau de connaissance et du niveau de compétence des enfants. Ceci nous permet de proposer nos ateliers au plus grand nombre, ne nous restreignant pas à une catégorie d'enfants *doués* ou a priori intéressés. De plus, ces ateliers ont été perçus par les enfants comme des activités de recherche plus ou moins différentes du travail scolaire habituel, ce qui permet de les proposer dans des cadres différents de l'école.

Nos objectifs pédagogiques.—Nous nous plaçons dans le fil du document d'application des programmes [1], où la résolution des problèmes est mise au centre des activités mathématiques du cycle 3 [2] du primaire. En particulier, nous proposons des *problèmes de recherche* dont le but est de *développer chez les élèves un comportement de recherche et des compétences d'ordre méthodologique : émettre des hypothèses et les tester, faire et gérer des essais successifs, élaborer une solution originale et en éprouver la validité, argumenter* [1].

Nous avons adopté une forme de travail par petits groupes, parfois par Binômes généralement d'âge hétérogène (d'âge du cycle 3). L'hétérogénéité confère une certaine dynamique de travail au groupe, la discussion et la confrontation des résultats se faisant à plusieurs niveaux. Les plus jeunes sont souvent aidés par les plus âgés de leur groupe. L'émulation des différents groupes est une motivation supplémentaire à l'avancée du travail. Comme nous l'avons dit plus haut, nous souhaitons que nos ateliers soient accessibles au plus grand nombre. Des élèves en difficulté y ont pris un grand plaisir et se sont souvent impliqués dans nos activités. L'erreur permet d'avancer dans la recherche et d'élaborer de nouvelles hypothèses à tester. Enfin, ces ateliers permettent de mobiliser différentes compétences notamment l'expression orale. Les enfants décrivent leurs observations, expliquent et argumentent leurs démarches.

Atelier combinatoire des dominos

Cette activité est consacrée à la combinatoire et au dénombrement. Il s'agit de dénombrer des dominos sans avoir de dominos. Dans un second temps, on s'intéresse aux triminos Cet atelier a été testé à plusieurs reprises avec des élèves de cycle 3 à l'école primaire d'Andlau ainsi que dans une classe de cinquième du collège Kléber de Strasbourg.

Remarques pédagogiques spécifiques. —Les compétences mises en œuvre, que nous reprenons des directives de programme [1] sont les suivantes :

— Énumérer exhaustivement des structures complexes (dominos, triminos) à l'aide d'un classement logique (tri, tableau) ;
— Chercher et produire une solution originale dans un problème de recherche ;

1 Document d'application des programmes 2003 — Mathématique, Cycle 3.Collection École, SCEREN (CNDP), http://www.eduscol.education.fr/D0048/pb_pour_chercher.pdf.
2 Cours élémentaire 1, cours moyen 1 et 2.

— Connaître les tables d'addition et de multiplication pour calculer une somme ou un produit ;
— Diviser un nombre par 2 (c'est-à-dire calculer la moitié d'un nombre) ;
— Mettre en œuvre un calcul réfléchi, c'est-à-dire organiser et effectuer mentalement ou à l'aide de l'écrit sur des nombres entiers un calcul additif (…) en s'appuyant sur des résultats mémorisés ;
— Éventuellement écrire une formule comprenant des lettres et/ou appliquer cette formule ;
— Traduire par un schéma une situation exprimée en langue naturelle.

Déroulement de l'activité et remarques mathématiques

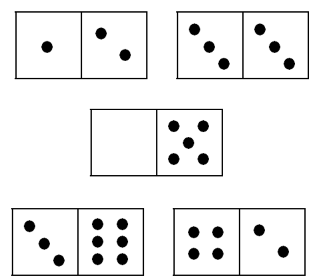
L'atelier comporte deux parties, l'une est consacrée aux dominos et la seconde aux triminos. La première a elle-même donné lieu à *deux matinées ateliers* à l'école d'Andlau.

Le matériel

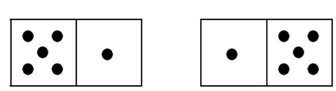
— Tableau noir ou blanc pour la mise en commun des résultats ;
— Papiers et crayons pour les enfants ;
— Des feuilles au format A4 ou A4 représentant des dominos ou triminos vierges ;
— Des cartons prédécoupés pour réaliser des jeux de dominos et de triminos.

Nous décrivons maintenant en détail le déroulement de l'atelier en donnant les explications mathématiques nécessaires à sa compréhension. Les textes encadrés sont des approfondissements mathématiques et historiques. Ils peuvent être omis lors d'une première lecture.

Classification des dominos.— Nous exprimons immédiatement la problématique de l'atelier, à savoir la question, *Combien y-a-t-il de dominos dans une boîte de dominos ?* Dans un premier temps, il s'agit de s'assurer que chaque enfant sait ce qu'est un domino. Il s'agit d'une petite pièce rectangulaire dont l'une des faces comporte deux symboles (généralement des nombres figurés par des points). Dans un jeu classique, les symboles sont les nombres compris entre 0 à 6. Par exemple, un jeu classique comporte, entre-autre, les dominos suivants :

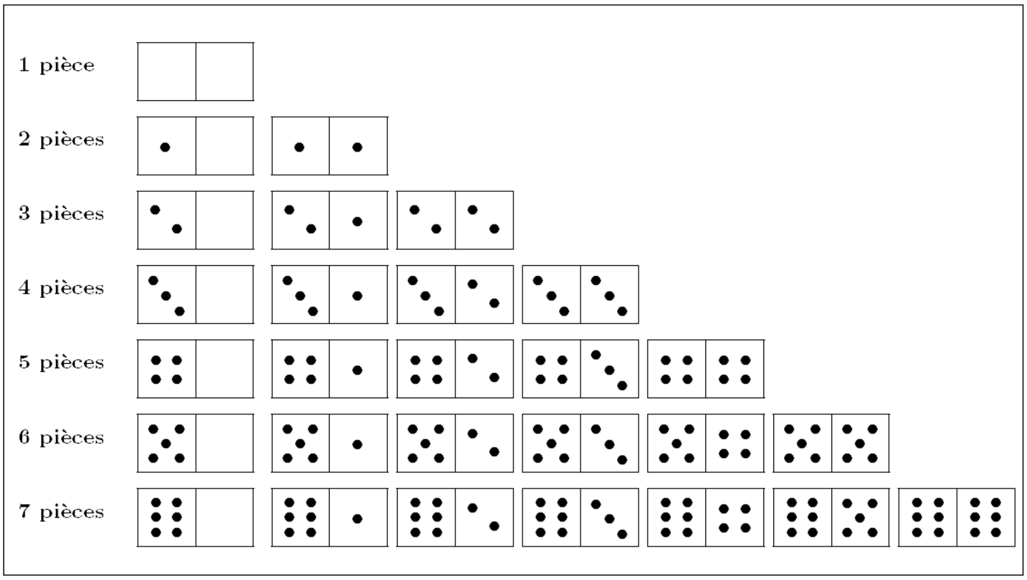


Les enfants ne disposant pas de jeu de dominos proposent de les dessiner afin de les compter. Pour leur faciliter la tâche, on peut leur distribuer une feuille avec des dominos vierges qu'ils complètent. La feuille comportera plus de dominos vierges qu'il y en a dans un jeu usuel. Ils s'aperçoivent rapidement de deux aspects du problème. Le premier est qu'il faut classer les dominos de manière logique pour être certain de n'en oublier aucun. Le second est qu'il faut tenir compte de la symétrie des pièces. Par exemple les deux dessins ci-dessous représentent la même pièce :



Une des possibilités de classement est celle du tableau 1.

Tableau 1.



Ce qui permet d'effectuer le décompte sans difficulté. Il suffit de compter le nombre de dominos par ligne (ou par colonne) et d'additionner tous les nombres.

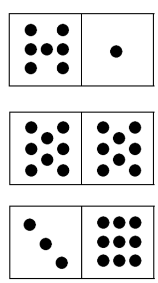
On obtient :

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$$

Il est également possible de remarquer que le tableau de dominos peut être doublé à la manière du tableau 2. En utilisant deux jeux de dominos, on forme ainsi un rectangle dont les côtés sont constitués de 7 et 8 dominos.

Il y a donc $7 \times 8 = 56$ dominos dans le rectangle. Chaque jeu a donc $56/2 = 28$ dominos.

Généralisation à un jeu à n symboles.— Dans une deuxième phase de l'activité, on demande aux enfants combien il y aurait de pièces dans un jeu comportant plus de symboles (dix cette fois-ci), c'est-à-dire qu'on souhaite introduire dans le jeu des pièces du type :

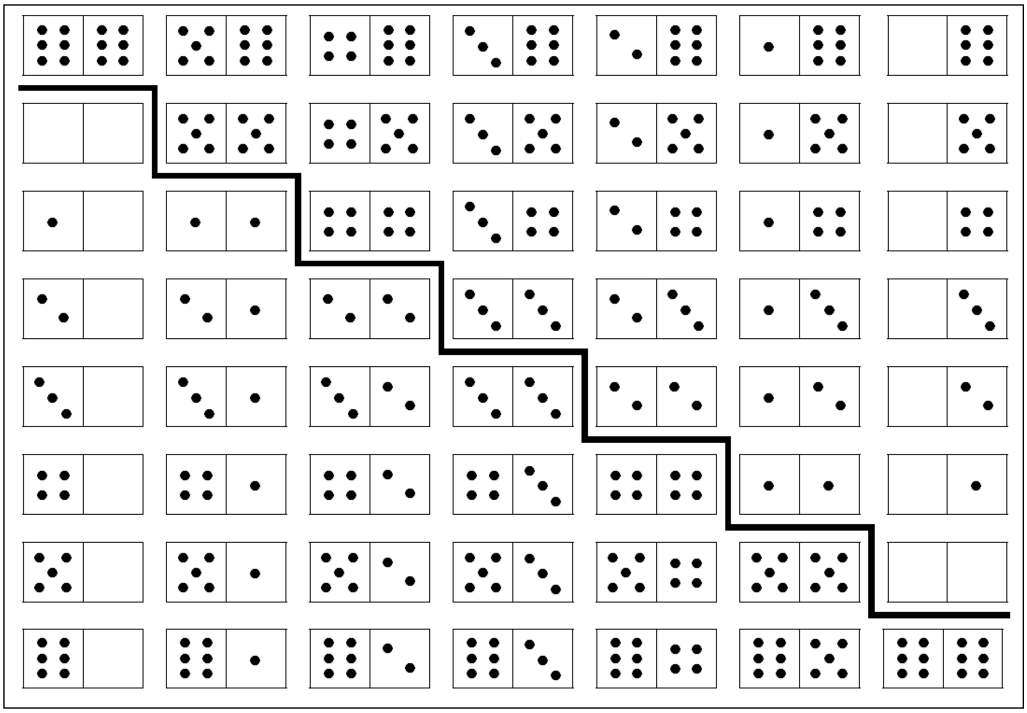


Les enfants ayant intégré la démarche précédente doivent refaire un classement des dominos leur permettant de les compter. On arrive alors à devoir calculer la somme

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11\ .$$

De même que précédemment on peut réunir deux jeux pour former un rectangle de côtés

Tableau 2.



comportant 11 et 10 dominos. La somme vaut donc $(11\times10)/2 = 55$. Il y a donc 55 pièces dans le jeu à 10 symboles. On peut ensuite demander aux enfants combien de dominos il y dans un jeu à vingt symboles, puis dans un jeu de cent symboles. La réponse sera

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 19 + 20$$

pour le premier et

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100$$

pour le second. La difficulté pratique de calculer les sommes doit les inciter à imaginer les rectangles que formeraient deux jeux ensemble et finalement aboutir à la formule $[n\times(n + 1)]/2$ qui donne le nombre de dominos d'un jeu à n symboles.

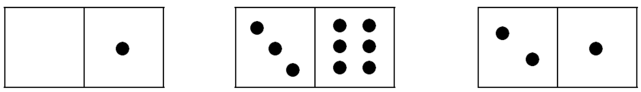
Dans le cas d'un groupe plus avancé ou d'une utilisation en collège, on peut compléter l'activité par l'application pratique qui suit. On pose la question suivante aux enfants :

Lorsqu'on forme un groupe de six personnes, si l'on veut jouer aux dominos tous ensemble de telle manière que chacun ait au moins six dominos au départ et qu'il y en ait au moins dix dans la pioche, combien de symboles doit comporter le jeu pour avoir suffisamment de pièces ?

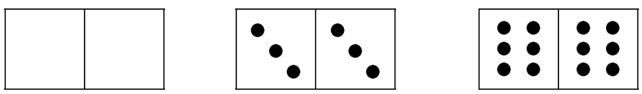
Nous avons choisi six personnes, mais ce nombre peut bien entendu correspondre à celui des petits groupes de travail que forment les enfants. Pour répondre à la question, il faut

Nous donnons maintenant une démonstration alternative se basant sur un raisonnement de combinatoire.

Supposons que l'on veuille dénombrer un jeu de dominos à n symboles où n est un entier supérieur à 1. Nous pouvons considérer qu'il y a deux sortes de dominos, ceux où les deux symboles sont différents par exemple :



et les dominos *doubles* où les deux symboles sont identiques, comme par exemple



Le décompte des dominos double est simple. Il y en a autant que de symboles c'est-à-dire n. Nous allons maintenant dénombrer les autres. Cela revient à déterminer le nombre de couples (X,Y) de deux symboles différents (X et Y) que l'on peut former en puisant dans une réserve de n symboles. Il y a n choix pour le premier symbole et le premier étant choisi, le second devant être différent du premier, il ne reste que $n-1$ possibilités. Le nombre de couples (X,Y) est donc $n \times (n-1)$. Mais dans ce raisonnement, nous n'avons pas tenu compte de la symétrie des dominos. Les couples (X,Y) et (Y,X) représentent le même domino. Dans notre décompte chaque domino apparaît deux fois. Le nombre de dominos *non doubles* est donc $[n \times (n-1)]/2$. En combinatoire, il est commun de noter ce nombre C_n^2.

Par conséquent, le nombre de dominos est

$$\frac{n\times(n-1)}{2} + n = \frac{n\times(n-1)+2n}{2} = \frac{n\times(n-1+2)}{2} = \frac{n\times(n+1)}{2}\,.$$

On remarque que le nombre $[n \times (n+1)]/2$ est un entier pour tout n. En effet quel que soit n, l'un des nombres n ou n+1 est pair, et par conséquent, leur produit est toujours divisible par 2. L'atelier a mis en relief une autre propriété du nombre $[n \times (n+1)]/2$. On a en effet la formule

$$1 + 2 + \ldots + n = [n \times (n+1)]/2\,.$$

Ceci peut se démontrer par ailleurs de manière élémentaire. Soit $s = 1 + 2 + \ldots + n$. Il suffit d'additionner la somme donnant s avec elle-même changeant l'ordre des termes de la manière suivante :

$$\begin{array}{r|ccccccccccccc}
s & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots & + & (n-2) & + & (n-1) & + & n \\
+\,s & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \ldots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\
\hline
=\,2\,s & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & \ldots & + & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1)
\end{array}$$

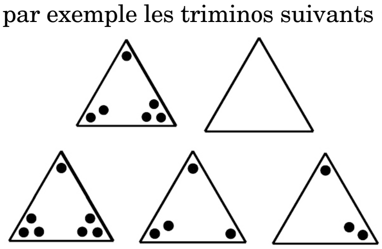
On en déduit que $2 \times s$ vaut $n \times (n+1)$ et par conséquent $s = [n \times (n+1)]/2$.

calculer le nombre minimal de pièces nécessaires, c'est-à-dire $(6\times6) + 10 = 46$. Il faut donc, a priori, plus de sept symboles puisqu'un jeu ordinaire contient 28 dominos. En utilisant la formule, on calcule qu'un jeu de huit symboles contient $(8\times9)/2 = 36$ dominos, un jeu de neuf symboles en contient $(9\times10)/2 = 45$ et un jeu de dix symboles $(10\times11)/2 = 55$. C'est donc un jeu de 10 symboles qu'il faut construire.

Le reste de la séance peut être consacré à la réalisation des jeux à l'aide de rectangles de carton et à jouer avec les dominos fabriqués.

Le décompte des triminos. — Après s'être intéressé aux dominos qui comportent deux symboles, on peut étendre la problématique aux triminos comportant trois symboles. Néanmoins, nous avons réservé cette partie de l'atelier aux plus âgés des élèves de primaire.

Un *trimino* est une pièce ayant la forme d'un triangle isocèle dont chaque coin comporte un symbole choisi parmi une collection prédéfinie. Par exemple si les symboles sont des nombres compris entre 0 et 3 et représentés par des points, on a par exemple les triminos suivants :

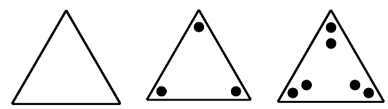


De tels jeux de triminos sont disponibles dans le commerce.

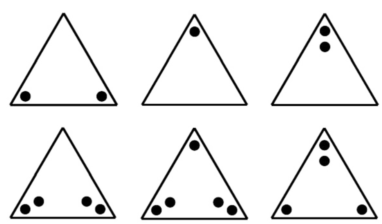
Nous proposons aux enfants de déterminer leur nombre. Pour cela on commence par demander de déterminer ceux pour lesquels les symboles sont 0,1 et 2. On leur distribue des feuilles reproduisant des triminos vierges ou des petits cartons triangulaires vierges de symboles eux aussi et qu'ils doivent compléter.

On parvient à classer les triminos de la manière suivante :

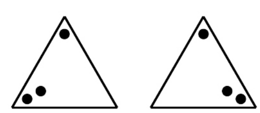
— Il y en a trois *triples* :



— Il y en six où l'un des symboles se répète deux fois exactement :



— Enfin, il y en a deux où les trois symboles sont différents :



Il y a une petite difficulté à se convaincre que ces deux derniers triminos sont bien distincts. On peut par exemple faire tourner deux fois l'un d'entre-deux d'un tiers de tours pour s'apercevoir que les deux dominos ne sont pas superposables. En conclusion, il y a $3 + 6 + 2 = 11$ triminos à trois symboles.

On pose ensuite la même question pour les triminos à quatre symboles. Comme précédemment, les enfants doivent déterminer tous les triminos à l'aide d'un classement adéquat pour les compter.

Après s'être intéressé aux triminos à trois symboles, on peut chercher le nombre total des triminos à n symboles. Nous pouvons procéder de la manière suivante.

Tout d'abord, comme précédemment, nous classons les triminos en trois catégories. Ceux où les trois symboles sont identiques, ceux comportant exactement deux symboles différents et ceux en comportant exactement trois différents.

— Pour les triminos comportant un seul exactement des n symboles, il y en a exactement n. Par exemple si $n = 3$, nous en avons bien compté 3 ;

— En ce qui concerne les triminos qui comportent deux exactement des n symboles, il y en a $n \times (n-1)$. En effet, il y a n possibilités pour le symbole qui apparaît une fois, et celui-ci choisit, il reste alors $n-1$ possibilités de choix du symbole qui apparaît en deux exemplaires. Par exemple, pour $n = 3$, nous avons bien compté $3 \times 2 = 6$ triminos de cette sorte ;

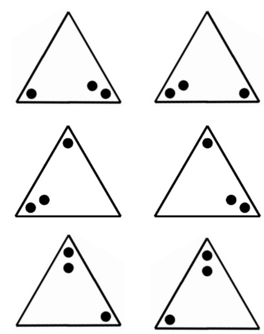
— Enfin, en ce qui concerne les triminos qui ont trois symboles différents, il y en a $[n \times (n-1) \times (n-2)] / 3$. Par exemple pour $n = 3$, on a $(3 \times 2 \times 1) / 3 = 2$ pièces. Expliquons cette formule dans le cas $n = 3$. L'explication pour un nombre de symboles n est donnée dans l'encadré ci-après.

Nous faisons la liste des triplets des nombres de 0 à 2 sans répétition.

$$\text{trois possibilités pour le premier choix} \left\{ \underbrace{\begin{array}{cc} (0,1,2) & (0,2,1) \\ (1,2,0) & (1,0,2) \\ (2,0,1) & (2,1,0) \end{array}}_{\text{deux possibilités pour le second choix}} \right.$$

Il y en a $3 \times 2 \times 1$. En effet, pour chacun des trois choix du premier nombre, correspond, deux choix possibles pour le second et un seul pour le troisième.

Pour chacun de ces triplets, nous pouvons dessiner un trimino :



Mais les trois triminos de droite, représentent en fait la même pièce. Il suffit d'en faire tourner un d'un angle de 120° et d'un angle de 240° pour retrouver les deux autres. Il en est de même des trois triminos de gauche qui représentent la même pièce qui est différente de celle représentée par les triminos de droite.

Comme pour chaque possibilité de choix, on obtient trois fois le même trimino, pour avoir le nombre de pièces du jeu, il faut diviser le nombre de choix par 3. On a donc bien $(3 \times 2 \times 1) / 3 = 2$ pièces.

Si nous récapitulons, nous avons compté n triminos à un symbole, $n \times (n-1)$ triminos à exactement deux symboles différents et $[n \times (n-1) \times (n-2)] / 3$ triminos à trois symboles distincts. En conclusion le nombre de triminos à n symboles est :

$$n + n \times (n-1) + [n \times (n-1) \times (n-2)] / 3 .$$

Ce qui vaut encore :

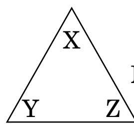
$$\frac{3n + 3n(n-1) + n(n-1)(n-2)}{3} =$$

$$n\,\frac{3 + (n-1)(n+1)}{3} = \frac{n(n^2+2)}{3} .$$

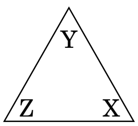
Démontrons la formule $[n \times (n-1) \times (n-2)] / 3$ donnant le nombre de pièces d'un jeu de triminos à n symboles.

Nous raisonnons en termes de choix de symboles. Considérons les triplets (X,Y,Z) où X, Y et Z sont des symboles distincts choisis parmi les n disponibles. Pour le premier symbole, il y a n choix possibles, pour le second, il reste $n - 1$ choix possibles et pour le dernier, $n - 2$ choix possibles. Il y a donc $n \times (n-1) \times (n-2)$ triplets différents. A chaque triplet

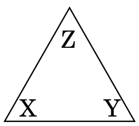
(X, Y, Z), correspond un trimino :



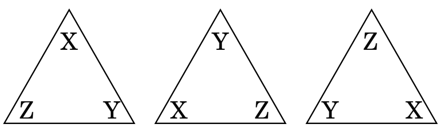
Mais les pièces pour les triplets (Y,Z,X) et (Z,X,Y) :



et



sont identiques à cette dernière pièce. Il suffit de les tourner d'un angle de 120° où de 240° pour s'en rendre compte. Ils sont différents des triminos :



donnés par les triplets (X,Z,Y), (Y,X,Z) et (Z,Y,X) .

Nous avons donc compté la même pièce exactement trois fois. Pour arriver au décompte des pièces à trois symboles choisis dans un ensemble de n, il suffit donc de diviser le nombre $n \times (n-1) \times (n-2)$ de possibilités de triplet X,Y,Z par trois.

Il y a donc $[n \times (n-1) \times (n-2)] / 3$ triminos à trois symboles distincts choisis parmi n.

Documents nécessaires à la réalisation de l'atelier :

En annexes, nous reproduisons les documents nécessaires à la réalisation de l'atelier.

—Documents 1, 2 et 3 (une feuille chacun) — Les feuilles de dominos et triminos vierges que l'on pourra éventuellement agrandir en format A3.

— Document A, Le tableau de suivi. Les tableaux reproduits dans cette annexe, décrivent les quatre séances de cet atelier qui ont été proposées aux élèves de l'école élémentaire d'Andlau durant l'année scolaire 2003/2004. Ils permettent de se faire une idée du déroulement possible de l'atelier. Les données horaires sont purement indicatives.

GROUPE ATELIER DE L'IREM DE STRASBOURG
Bénédicte AUTIER
Collège Kléber, Strasbourg

Muriel CRON
École Élémentaire d'Andlau, Andlau

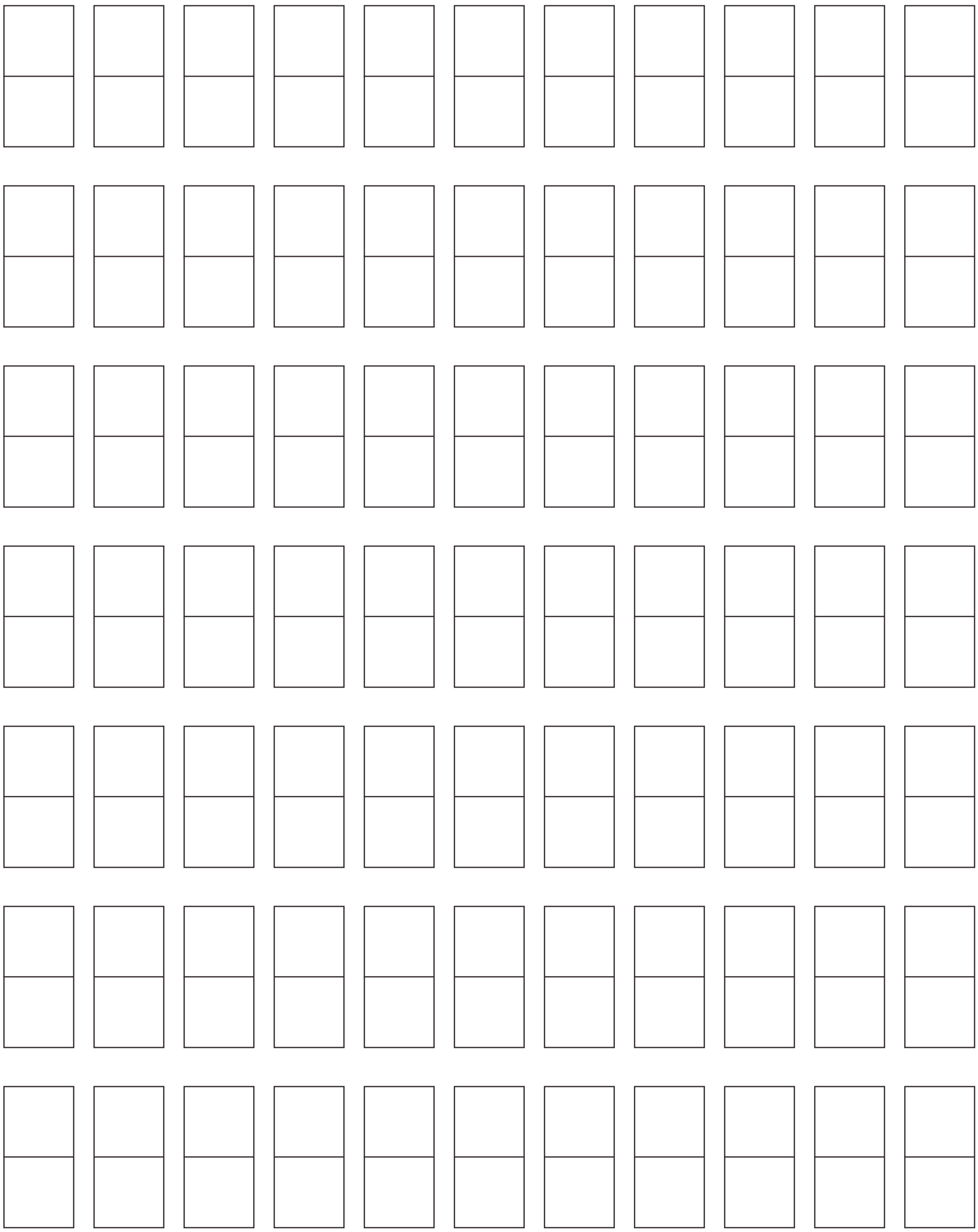
Anne-Céline MITTELBRONN
Collège La Providence, Strasbourg

Nathalie WACH
UFR de Mathématique et Informatique,
Université Louis Pasteur, Strasbourg

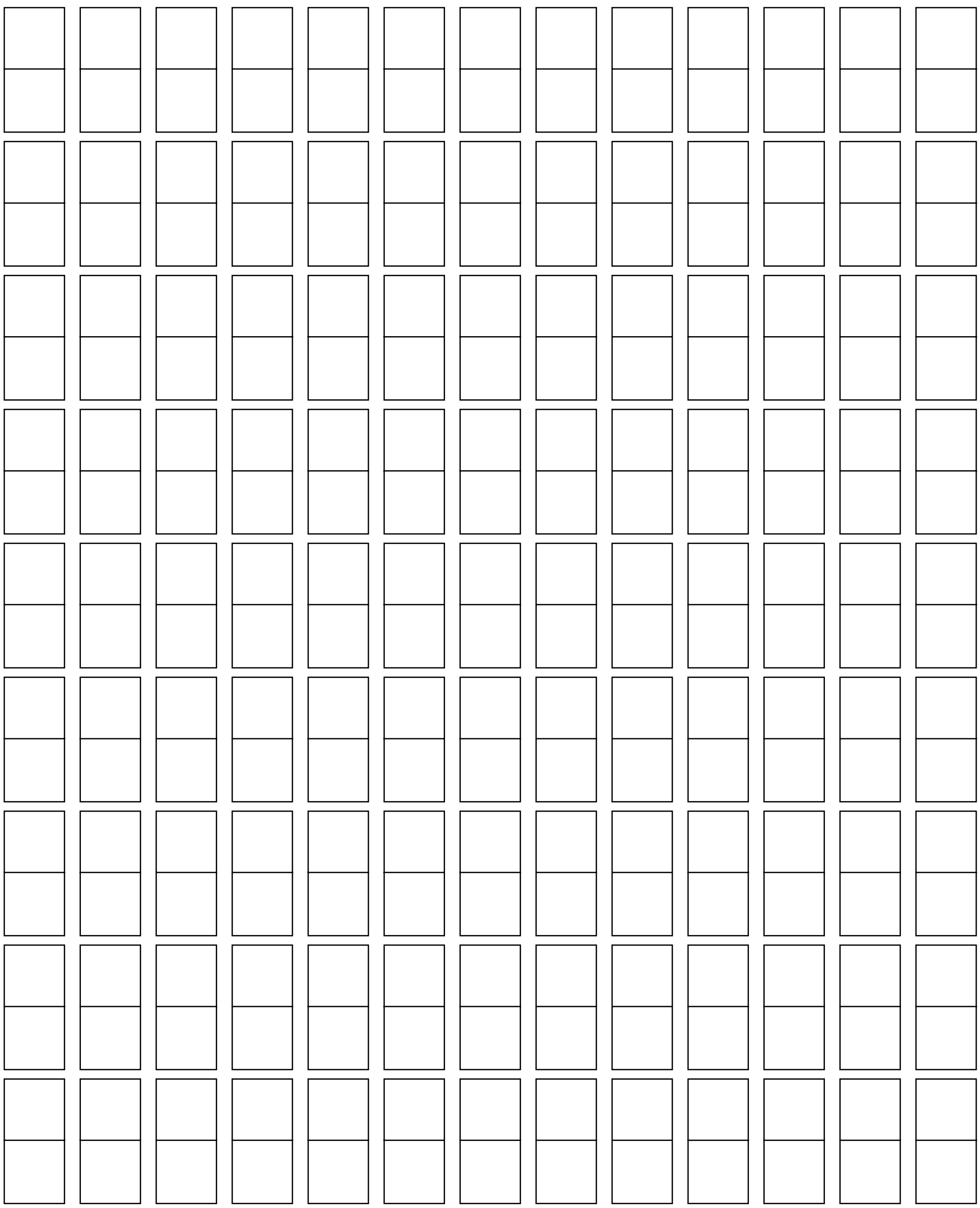
Marc WAMBST
UFR de Mathématique et Informatique,
Université Louis Pasteur, Strasbourg

ANNEXE 1

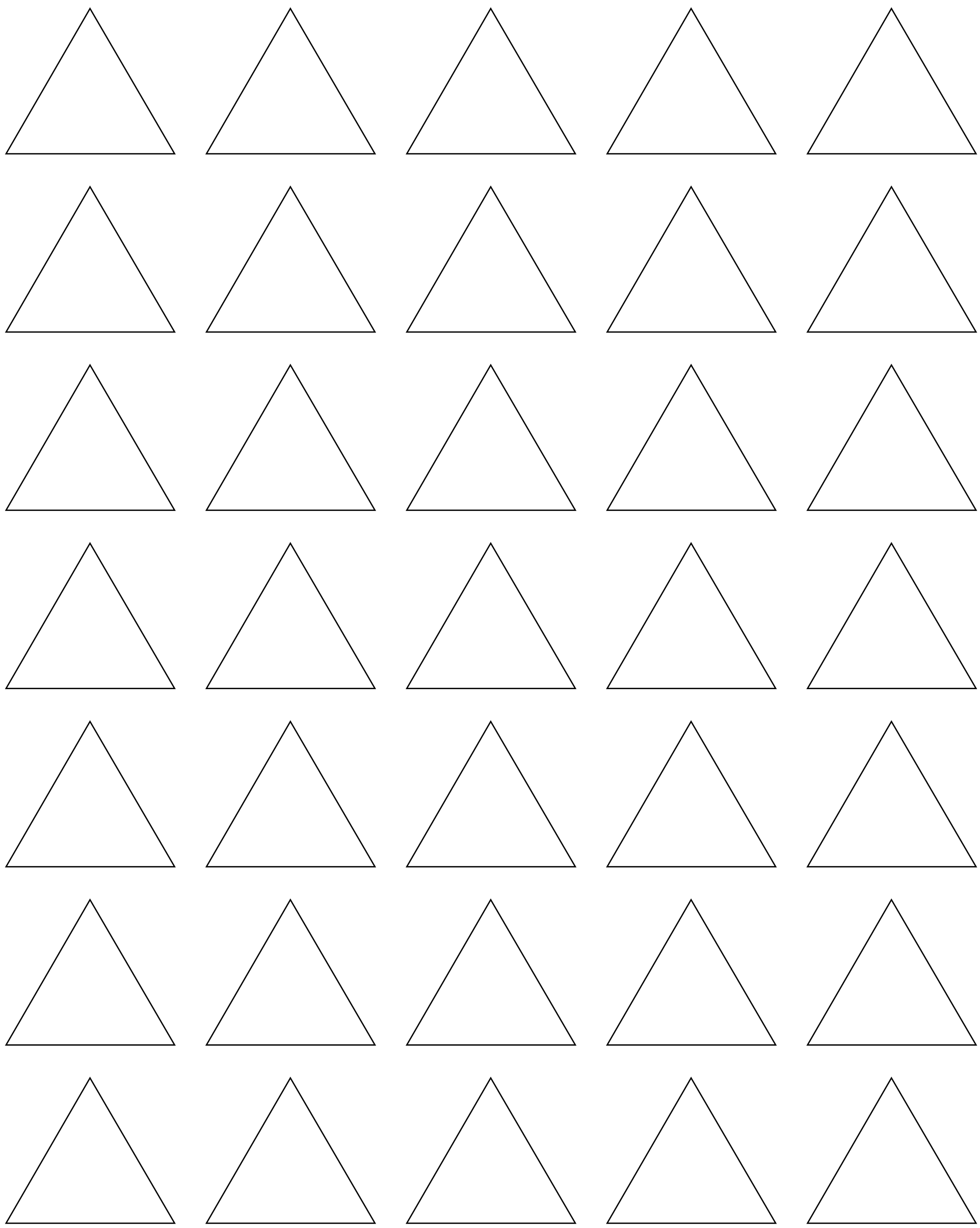
Documents 1



Documents 2



Documents 3

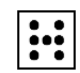
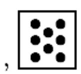


ANNEXE 2

Combinatoire des dominos. *Déroulement de l'atelier en cycle 3 à l'École élémentaire d'Andlau en 2003/2004*

Première séance

Temps	Phase	Déroulement, consignes données (en italique)	Réaction des élèves, remarques
10 min	**Émission de conjectures, oral collectif**	L'institutrice écrit la question : *Combien y a-t-il de dominos dans un jeu de dominos classique ?* au tableau. Elle s'assure que tous les élèves savent comment représenter un domino et quels sont les symboles qui se trouvent sur ces derniers. Elle écrit au tableau les propositions de réponse à la question, que font les élèves.	Tous les enfants ne connaissaient pas les dominos. Il a fallu préciser la notion de *nombre de symboles* et l'utilisation d'un symbole *zéro* Il y a eu des réponses du type 7×7 ou 6×6. Mais en général, les enfants ont fait une bonne estimation du nombre de dominos. Certains ont raisonné sur le nombre de pièces par joueurs et le nombre de pièces restant dans la pioche, d'autre en raisonnant sur le nombre de dominos qu'il est possible de loger dans une boîte. D'autres, les utilisaient régulièrement comme pièces de jeu de construction et ont produit une estimation déduite de cette familiarité.
15 min	**Recherche par binôme travail écrit**	Vous devez maintenant trouver la réponse exacte à cette question. *Qui a une idée sur la manière de trouver la solution ?* Une discussion s'engage et on finit par convenir qu'il faut dessiner les dominos puis les compter. L'institutrice distribue une feuille avec des dominos vierges et fait travailler les enfants par groupes de deux.	L'idée de faire un schéma, puis de dessiner les dominos apparaît rapidement. Les résultats sont très différents suivant l'âge. Certains enfants dessinent les dominos en les accolant comme s'ils jouaient. D'autres ne font aucun classement ou distinguent simplement les doubles des autres. Quelques uns sont totalement démunis ne sachant par quoi commencer.
15 min	**Mise en commun orale collective**	L'institutrice recense les différents nombres obtenus et demande aux binômes d'expliquer leur manière de procéder. Elle écrit les méthodes au tableau ainsi que le nombre proposé. S'en suit une discussion sur l'efficacité des différentes façons de dénombrer les dominos. La question *Comment être sur d'avoir dessiné tous les dominos ?* se dégage.	
20 min	**Recherche individuelle**	Après le choix d'un mode de rangement, les élèves dessinent individuellement l'ensemble des dominos en respectant ce mode. L'institutrice rappelle la consigne *Combien de dominos y a-t-il dans un jeu de dominos classique ?* Les élèves s'auto-corrigent à partir d'une discussion au sein du groupe ou à partir d'une feuille-réponse fournie par l'enseignante. Les élèves comptent le nombre de dominos,	Après le choix d'un mode de rangement, chaque binôme produit un classement. Certain oublient la colonne de symboles contenant *zéro* Beaucoup comptabilisent en comptant un à un ce qui engendre de nombreuses erreurs. L'idée de compter par ligne ou par colonne ne vient qu'après une suggestion de l'enseignante.

Temps	Phase	Déroulement, consignes données (en italique)	Réaction des élèves, remarques
		un par un, par colonne ou par ligne, ou encore en s'aidant d'un second jeu de dominos dessiné. L'enseignante observe les élèves pour repérer les différentes façons de procéder pour le dénombrement.	Certains élèves dessinent deux jeux de dominos et parviennent à faire le tableau 2.
15 min	**Mise en commun collective**	L'institutrice interroge les élèves sur leur résultat. Elle demande que les différents procédés de comptage soient évoqués et justifiés lors de la mise en commun. L'ensemble de la classe discute de l'efficacité de chacun de ces procédés.	
	Recherche individuelle	Finalement, on souhaite arriver à ce que les enfants additionnent le nombre de dominos situés sur chaque ligne (ou chaque colonne) de leur classement. La somme 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 doit apparaître. On conclut que, dans un jeu de dominos classique, **il y a 28 pièces.**	Les élèves regroupent la somme en (3 + 7) + (6 + 4) +5 + 2 + 1 mais aussi en 7 + (1 + 6) + (2 + 5) + (4 + 3).
10 min	**Mise en projet de la suite de l'activité**	L'institutrice explique que, pour pouvoir jouer à plus de joueurs, il faut fabriquer un jeu avec plus de pièces. Pour cela, on choisit cette fois-ci 10 symboles différents au lieu de 7. *Combien de dominos vierges dois-je dessiner sur la photocopie que je vais vous remettre ?*	
Deuxième séance			
10 min	**Projet de recherche**	L'institutrice écrit la question *Combien y a-t-il de dominos dans un jeu de dominos sur lesquels il peut y avoir 10 symboles différents ?* au tableau. Elle explique la notion de *symbole* et donne des exemples de symboles différents.	Ce sont les élèves qui ont choisi de numéroter les symboles de 0 à 9 et de représenter les symboles 7, 8 et 9 par : ,  et .
25 min	**Recherche par binôme travail écrit**	*Vous devez maintenant trouver la réponse exacte à cette question. Vous pouvez travailler à deux.* On distribue des feuilles de dominos vierges à chaque binôme. L'enseignante observe les différentes façons de procéder pour le dessin et le comptage.	Quasiment tous les binômes reprennent la méthode de classement par nombre de symboles en réinvestissant ce qui a été fait lors de la première séance.
15 min	**Mise en**	L'institutrice recense les différents nombres obtenus et	Une seule méthode de rangement a été pro-

Temps	Phase	Déroulement, consignes données (en italique)	Réaction des élèves, remarques
	commun orale collective	demande aux binômes d'expliquer leur manière de procéder. Elle écrit les méthodes au tableau ainsi que le nombre pro posé. S'en suit une discussion sur l'efficacité de différentes façons de dénombrer les dominos. La question *Comment être sur d'avoir dessiné tous les dominos ?* se dégage à nouveau. On rappelle le mode de rangement utilisé à la séance précédente. Finalement, on souhaite arriver à ce que les enfants décomptent les dominos par lignes ou par colonnes et aboutissent à la somme : 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10. *Comment calculer facilement cette somme ?*	posée par les différents binômes. Les enfants ont ensuite fait un comptage par ligne ou par colon ne. Pour répondre à la question *Comment calculer facilement cette somme ?*, ils ont groupé les termes de la manière suivante : $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 =$ $(1 + 9) + (8 + 2) + (3 + 7) + (4 + 6) + 5 =$ $5\times10 + 5 = 55$ Tous les groupes ont alors pu calculer le bon résultat.
20 min.	**Recherche individuelle**	L'institutrice propose aux enfants de dénombrer deux jeux ensemble. *Comment faire pour que cela soit le plus facile possible ?* Elle propose de faire des regroupements et suggère : 11 = 10 + 1 ; 11 = 9 + 2 ; 11 = 8 + 3 ; … ; 11 = 1 + 10.	A la suggestion de dénombrer deux jeux ensemble, les enfants écrivent 55¥2 = 110 dominos. Il faut leur préciser que le nombre de dominos d'un seul jeu n'est pas forcément connu. Chaque colonne du classement apparaissant deux fois, on propose de regrouper la somme de la manière 1 +2 +3 +4 +5 +6 +7 +8 +9 +10 +10 +9 +8 +7 +6 +5 +4 +3 +2 +1 = 11 +11 +11 +11 +11 +11 +11 +11 +11 +11 $=11\times10$ Ce regroupement n'est pas naturel pour les enfants, il faut fortement l'induire et le mettre en relation avec la visualisation des deux jeux emboîtés (tableau 2) ce qui leur a permis de comprendre le calcul.
15 min.	**Mise en commun collective**	Un binôme explique la méthode au tableau. L'enseignante visualise le procédé d'assemblage. On peut donner la conclusion. Dans deux jeux de dominos avec 10 symboles, il y a $11\times10 = 110$ dominos. Par conséquent, dans un jeu, il y en a la moitié, c'est-à-dire 55.	
10 min	**Réinvestissement**	*Si je choisis cette fois-ci 20 symboles différents, combien y aura-t-il de dominos ? Et pour 100 symboles différents ?* L'institutrice aide à formuler le procédé de calcul correspondant	

Temps	Phase	Déroulement, consignes données (en italique)	Réaction des élèves, remarques
		à la formule S = [n(n + 1)]/2 en expliquant que cela revient aussi à calculer la somme 1 + 2 + 3 + 4 +…+ *n*.	
Troisième séance			
20 min.	**Rappel oral collectif**	L'institutrice rappelle ce qui a été fait précédemment avec les dominos, c'est-à-dire de trouver le nombre de dominos d'un jeu comportant 10 symboles. *Quelle a été la méthode utilisée ? Était-elle efficace, pourquoi ?*	Des enfants se souviennent bien qu'il s'agissait de faire la multiplication de deux nombres, mais pas de quels nombres il s'agissait. Ils trouvent tous la méthode efficace à condition de savoir effectuer une multiplication et de trouver la moitié d'un nombre. L'enseignante leur rappelle une méthode permettant de calculer la moitié d'un nombre : la moitié de 110 est la moitié de 100 plus celle de 10, c'est-à-dire 50 + 5 = 55.
10 min.	**Entraînement individuel**	*Peut-on connaître le nombre de dominos sans les dessiner ?* L'institutrice rappelle que le nombre de dominos est aussi le résultat de la somme 1 + 2 +…+ n où n est le nombre de symboles. Pour calculer une telle somme il suffit de calculer [n(n + 1)]/2 . L'institutrice demande de calculer la somme 1 + 2 +… + 15 , 1 + 2 +… + 36 et 1 + 2 +… + 99 à l'aide de l'ardoise. Les plus jeunes ont le droit d'utiliser une calculatrice.	Les enfants calculent les sommes en utilisant la procédure suivante : *je multiplie le dernier terme par le suivant et je prends la moitié du résultat*. La formule a surtout été donnée pour les élèves de cours moyen en leur expliquant que c'était une façon de décrire le procédé de calcul. Les élèves du cours moyen savent poser une multiplication, mais font encore des erreurs de calcul. Le plus difficile a été de trouver la moitié pour les grands nombres. Un quart des élèves ont trouvé le résultat de suite.
10 min.	**Mise en projet, émission de conjecture, oral collectif**	*Aujourd'hui, nous allons nous intéresser aux triminos. Qu'est-ce qu'un trimino ?* L'institutrice s'assure que tous les élèves ont compris qu'un trimino est représenté par un triangle équilatéral sur lequel on écrit les symboles dans les angles. Elle convient des symboles à utiliser avec la classe. Elle énonce le problème : Combien *y a-t-il de triminos si les symboles proposés sont 0, 1 et 2 ?* Les enfants émettent des conjectures qui sont recensées au tableau.	Les réponses étaient aléatoires et comprises entre 10 et 50.
25 min.	**Recherche écrite**	*Vous devez maintenant trouver la réponse exacte à la question. Qui a une idée sur la manière de trouver la solution ?*	Les enfants essaient de dessiner les triminos en les classant comme les dominos. Pour déblo-

Temps	Phase	Déroulement, consignes données (en italique)	Réaction des élèves, remarques
	par binôme	Les élèves travaillent à deux. On distribue des triminos vierges à chaque binôme . L'enseignante observe les élèves pour repérer les différentes façons de procéder, pour le dessin puis le comptage.	quer certains, l'institutrice leur suggère le mode de classement par *triples* (ceux dont les trois symboles sont identiques), *doubles* (ceux dont deux des trois symboles sont identiques) et *simples* (ceux dont les trois symboles sont différents).
10 min	**Mise en commun collective**	L'institutrice recense les différents nombres obtenus et demande aux binômes d'expliquer leur manière de procéder. Elle écrit méthodes au tableau ainsi que le nombre proposé. S'en suit une discussion sur l'efficacité de chaque façon de dénombrer les triminos. En particulier : *Comment être sûr de les avoir tous dessinés ?*	Il y a eu lieu une discussion sur les triminos identiques comportant les mêmes symboles.
15 min.	**Recherche indivi-duelle**	Après le choix d'un mode de rangement, les élèves dessinent individuellement l'ensemble des triminos en respectant ce mode.	
	Par groupe de quatre	Les élèves s'auto-corrigent à partir d'une discussion au sein d'un groupe de quatre ou à partir d'une feuille-réponse distribuée par l'enseignante. Ils comptent ensuite le nombre de triminos.	
15 min.	**Mise en commun collective**	Les élèves expliquent et justifient leurs procédés de comptage. On conclut que dans un jeu de triminos avec les symboles 0, 1 et 2, il y a 11 pièces.	Après la mise en commun, tous les enfants ont classé les triminos suivant le nombre de symboles identiques. La difficulté a résidé dans le dénombrement des triminos à trois symboles différents.
10 min.	**Mise en projet de la suite de l'activité**	Pour pouvoir jouer à plus de joueurs, nous voulons fabriquer un jeu avec plus de pièces. Pour cela, nous choisissons cette fois-ci 4 symboles différents au lieu de 3. *Combien de triminos vierges dois-je vous fournir pour fabriquer le jeu ?* Les enfants émettent des conjectures qui sont recensées au tableau.	
Quatrième séance			

Temps	Phase	Déroulement, consignes données (en italique)	Réaction des élèves, remarques
10 min.	**Rappel, mise en projet de recherche**	L'institutrice rappelle ce qui a été fait la semaine précédente et la question : *Combien y a-t-il de triminos dans un jeu de triminos sur lesquels il y a 4 symboles différents ?* Elle réexplique la notion de *symbole* et donne des exemples de symboles différents.	
20 min.	**Recherche écrite par binôme**	*Vous devez maintenant trouver la réponse exacte à cette question* La recherche se fait par binôme. On distribution des triminos vierges (plus que nécessaire) à chaque binôme. L'enseignante observe les élèves pour repérer les différentes façons de procéder pour le dessin puis le comptage.\ Elle rappelle le mode de rangement évoqué lors de la séance précédente.	Les enfants font spontanément un classement suivant le nombre de symboles identiques. Il y a de nombreux oublis de triminos avec trois symboles différents.
20 min.	**Mise en commun orale collective**	On recense au tableau les différents nombres obtenus et les binômes expliquent leur manière de procéder. S'en suit une discussion sur le classement	Pour se convaincre de n'avoir pas compté deux fois le même triminos, les enfants découpent des triminos et les font tourner.
20 min.	**Recherche par binôme**	L'institutrice propose aux enfants de dénombrer en observant les types de triminos. *Que remarque-t-on si on compare le nombre de triminos de chaque type par rapport au nombre de symboles ?* On peut aider les élèves en indiquant au tableau les différents types de triminos possibles (avec trois symboles identiques dans chaque coin, avec deux symboles identiques seulement, avec trois symboles distincts).	Le nombre de trimino *triple* et celui à de triminos *doubles* ont rapidement été trouvés. Le décompte des triminos *simples* a, en revanche, posé des difficultés.
25 min.	**Mise en commun collective**	La méthode de classement et le dénombrement est expliquée au tableau par un binôme ou par l'institutrice. On conclut en donnant le nombre de triminos à quatre symboles qui est 24.	
15 min.	**Travail Individuel puis jeu collectif**	Les enfants construisent le jeu de triminos à l'aide de triangles de carton prédécoupés. Ils l'utilisent ensuite pour jouer.	Les enfants ont réutilisé leur classement pour vérifier que tous les triminos ont été fabriqués.