LES ANNALES DE GERGONNE (1810-1832) ET LE JOURNAL DE LIOUVILLE (1836-1874)

Une mine de textes numérisés à exploiter dans notre enseignement

Christian GERINI [1] et Norbert VERDIER [2]

Résumé : *Les mathématiques ont bénéficié, dans la France et l'Europe du 19ème siècle, d'une nouvelle forme de communication : les journaux qui leur ont été dédiés. Les Annales de Joseph-Diez Gergonne, publiées mensuellement de 1810 à 1832, constituent le premier journal de mathématiques. Joseph Liouville, en digne successeur, publia à partir de 1836, sous une forme héritée des Annales, le Journal de Mathématiques Pures et Appliquées.*

La spécialisation du savoir depuis le 19ème siècle a engendré une difficulté à préserver une interdisciplinarité pourtant féconde, particulièrement au plan pédagogique. Le scientifique, l'étudiant, l'enseignant se sont vus coupés de la connaissance philosophique et historique de leur propre spécialité. A travers ces lignes consacrées à l'histoire des mathématiques et de leur diffusion dans ces deux périodiques, nous montrerons comment un travail transdisciplinaire permet : 1/ de porter à la connaissance de la communauté mathématique des documents originaux riches d'enseignements sur la construction des concepts et théories et de les utiliser à des fins pédagogiques ; 2/ de mettre ces textes à la disposition d'un public élargi via les nouveaux modes de communication (numérisation des textes en collaboration avec les programmes nationaux du CNRS et de la BNF).

I. — Deux textes dans un contexte

Le journal de Gergonne fut créé et diffusé depuis une province lointaine (Nîmes) par un personnage qui, malgré une reconnaissance de ses capacités lors de rencontres avec quelques mathématiciens éminents, n'avait que peu fréquenté les cercles parisiens, n'était pas issu des institutions déjà prestigieuses mises an places sous la Révolution et l'Empire, et avait construit sa jeune carrière de professeur de mathématiques après un bref mais riche parcours militaire qui lui permit d'être recruté dans l'enseignement. Il ne disposait d'aucun journal lui servant d'exemple et lui permettant de profiter d'un public d'auteurs et de lecteurs déjà habitués à une telle publication.

1 Maître de conférences en histoire et philosophie des sciences, agrégé de mathématiques, l'Université du Sud Toulon Var, IUT/ de Toulon, Dépt. GMP, BP 20132, F83 957 TOULON. Membre du GHDSO (Orsay) et du laboratoire I3M (Toulon-Nice). Contact : gerini@univ-tln.fr

2 Agrégé de mathématiques, chercheur en histoire des mathématiques et de leur diffusion, Université Paris-11, IUT de Cachan, Dépt. GEII, 9, av de la div Leclerc 94234 CACHAN cedex. Membre du GHDSO (Orsay). Contact : norbert.verdier@u-psud.fr

Le journal de Liouville, en revanche, fut entrepris dans la capitale en 1836 par un jeune et brillant polytechnicien (il deviendra professeur dans la prestigieuse école deux ans plus tard) ayant côtoyé les plus grands mathématiciens de son temps et bénéficiant de solides appuis politiques (Arago et Salvandy). Il disposait également à la fois de l'exemple de Gergonne, de l'assentiment de celui-ci pour poursuivre son entreprise, et d'un « carnet d'adresses » fourni aussi bien quantitativement que qualitativement : les auteurs ayant publié dans les *Annales*, les mathématiciens rencontrés à Paris durant ses études, et une grande part des abonnés au journal de son prédécesseur.

De plus, le contexte avait radicalement changé entre les deux dates : aux périodes historiquement mouvementées que traversa Gergonne, il faut opposer une relative stabilité politique et institutionnelle davantage propice à l'entreprise de Liouville. En outre, à la différence de Liouville (du moins de celui des années du début de la publication de son journal), Gergonne mena de front des responsabilités administratives multiples [Condette, 2006, T.II, pp. 195-196] et des enseignements divers qui l'éloignaient du strict champ des mathématiques et qui rendaient son entreprise plus périlleuse encore.

Au plan plus précis des mathématiques elles-mêmes et de leur diffusion, il faut aussi noter leur essor, et leur reconnaissance enfin acquise durant le premier quart du siècle (l'entreprise de Gergonne y contribua), rendant la tâche d'édition d'un journal plus facile et viable en 1836 qu'en 1810.

Enfin, la proximité parisienne des éditeurs et imprimeurs facilitait considérablement le travail de Liouville, comparée à l'éloignement de Gergonne et à l'obligation où il était de correspondre avec eux par la seule et alors lente voie postale. Liouville bénéficia en outre du savoir faire de la maison d'édition Bachelier. A l'époque de Gergonne, Bachelier était un "simple" libraire, successeur de Courcier, luimême libraire des annales de Gergonne depuis leur création. Dès 1830, Bachelier devint le libraire français officiel du *journal für die reine und angewandte Mathematik,* fondé à Berlin en 1826 par Crelle. En 1832, Bachelier associa à sa librairie l'imprimerie du 12 rue du Jardinet, fief de la maison Huzard-Courcier, devenant ainsi à la fois libraire et imprimeur. Il mit un soin considérable à l'amélioration de la représentation matérielle des mathématiques (l'art typographique). Gergonne ne disposait pas de cet atout technique.

Les conditions étaient donc tout à fait différentes, les enjeux d'un autre ordre, les moyens incomparables.

Deux textes, écrits donc à 26 ans d'intervalle, permettent de juger des ambitions, des objectifs, et des positions en matière éditoriale des deux hommes lors de la création de leurs journaux respectifs. Le premier, intitulé *Prospectus*, est le « manifeste » publié par Gergonne dans son premier numéro. Le second, nommé *Avertissement*, est celui rédigé par Liouville lors du lancement de son journal. Véritables déclarations d'intentions et de politiques éditoriales, ces deux textes donnent à voir les convergences et les ruptures entre les deux publications. Nous nous focaliserons ici sur l'enseignement des mathématiques, chez Gergonne puis chez Liouville.

Sur le fond apparaissent certaines lignes de rupture en matière éditoriale entre les deux périodiques. Liouville annonce un journal de recherche qui n'exclut pas des articles didactiques, mais il discerne bien les deux aspects : «On y traitera indifféremment et les questions les plus nouvelles soulevées par les géomètres, et les plus minutieux détails de l'enseignement mathématique des collèges. » Mais il veut éviter « les répétitions fastidieuses d'objets trop connus ; car s'il est bon de revenir de temps à autre sur les élémens[3] des sciences, il faut que ce soit pour les perfectionner, et non pour y changer çà et là quelques mots et quelques phrases ; ce qui par malheur est arrivé trop souvent. »

II. — Les *Annales de Gergonne*, outil didactique de connaissance et de compréhension

Gergonne n'affichait *a priori* un intérêt pour les recherches nouvelles qu'au titre de leurs applications à l'enseignement, et semblait donc privilégier les questions de didactique, comme en témoigne cet extrait de son Prospectus : « Ces Annales seront principalement consacrées aux *Mathématiques pures*, et surtout aux recherches qui auront pour objet d'en perfectionner et d'en simplifier l'enseignement. ». Le terme « surtout » est trompeur : Gergonne publiera en majorité des articles purement mathématiques, souvent novateurs et importants pour la circulation des idées et concepts nouveaux, mais dont les retombées sur l'enseignement de la discipline étaient loin d'être évidentes à l'époque. En revanche, il restera il est vrai fidèle à son souci didactique, puisqu'il publiera encore dans les dernières années de parution des Annales des articles ou essais dans ce sens, comme par exemple son « Exposition élémentaire des principes du calcul différentiel » en 1830 (T. XX), ses « Préliminaires d'un cours de mathématiques pures » et sa « Première leçon sur la numération » un an plus tard (T. XXI). Le souci pédagogique, teinté souvent de partialité et d'intolérance, fut une constante dans l'œuvre de Gergonne, de ses comptes-rendus de lectures dans les registres de l'académie du Gard au début de sa carrière[4], à ses articles de didactique dans les annales, en passant par ses critiques acerbes et intransigeantes à l'encontre de ses propres auteurs lorsqu'il considérait que, loin de servir la « clarté d'exposition » des mathématiques, leurs travaux au contraire semblaient à ses yeux rendre celles-ci plus opaques.

Il fut fidèle en outre à ses positions philosophiques : ardent pourfendeur du « sensualisme » de Condillac et de ses effets néfastes (de son point de vue) sur l'enseignement, il n'eut de cesse de les combattre en défendant une rigueur parfois caricaturale dans des domaines aussi variés que la « dialectique rationnelle » [Gergonne, 1816-1817] ou la « théorie des définitions » [Gergonne, 1818-1819] & [Gergonne, 1821-1822]. On le vit aussi par exemple pourfendre le kantisme de Wronski lors de la publication des ouvrages critiques de celui-ci sur le calcul différentiel de Lagrange et de la parution dans les annales d'un article de Servois sur le même sujet. [Gergonne, 1814-1815] & [Servois, 1814-1815][5]. La contribution de Gergonne à l'histoire des idées et à la philosophie a depuis lors été quelque peu oubliée, mais un témoignage nous est resté sur ses cours de philosophie des sciences à l'Université de Montpellier : le philosophe anglais John Stuart Mill fut l'élève de Gergonne en 1820, et écrivit dans son propre journal intime une note sur cet enseignement qui permet

3 Nous avons conservé l'orthographe de l'époque pour des termes tels que « analise » et « élémens ».

4 Par exemple dans son *Rapport à l'Académie du Gard* sur l'ouvrage intitulé *Elémens Raisonnés d'Algèbre dont M. Simon Lhuillier son associé lui a fait hommage*, lu à la séance du 30 nivose an VIII, Bulletins de l'Académie du gard.

5 Voir aussi [Gerini, 2003, pp. 14 & s.]

de reconstruire le plan du cours de son maître [6].

L'historien comme l'enseignant des mathématiques ne peuvent aujourd'hui que se réjouir de la richesse des Annales de Gergonne aussi bien du point de vue de l'évolution de la discipline — à travers des textes novateurs qui jalonnent les 22 volumes — que du point de vue de l'intérêt pédagogique des textes publiés, en ce sens qu'ils peuvent aider les professeurs à montrer l'émergence des concepts enseignés dans nos lycées et universités, à les faire mieux comprendre, ou à montrer comment des démonstrations ont pu évoluer au fil de la construction de la science mathématique.

Ainsi en est-il par exemple de la question de la représentation géométrique des nombres complexes. Si l'isomorphisme entre le corps des complexes et le plan réel est aujourd'hui présenté comme allant de soi, les questions d'ordre philosophique et mathématique qui ont conduit à son émergence ont été oubliées, et sont pourtant un outil puissant de compréhension de ces notions. Les nombres imaginaires, utilisés depuis le 16ème siècle sous leurs diverses formes algébriques et analytiques pour la commodité des résultats qu'ils permettaient d'obtenir (en matière de résolutions d'équations polynomiales par exemple), posaient aux philosophes comme aux mathématiciens (et l'on était souvent à la fois l'un et l'autre) des problèmes d'ordre quasiment ontologique : le réalisme géométrique hérité des Anciens, qui exigeait que toute notion mathématique soit reliée à la réalité via une représentation par une figure, était battu en brèche par ces « solutions qui sont impossibles » [7]. Les Annales de Gergonne offrent en 1813 une réponse qui fera date par la voix du mathématicien d'origine Suisse Robert Argand dans son article fondamental : *Essai sur la manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques* [Argand, 1813-1814], reprenant les idées et les calculs qu'Argand avait publiés dès 1806 à titre très confidentiel [Argand, 1806]. Ce n'est pas un hasard si cet article a paru dans la rubrique « Philosophie mathématique », et il pourrait faire l'objet d'une étude dans un cours de philosophie autant que de mathématiques (pour montrer l'imbrication naturelle des deux disciplines à travers son intérêt épistémologique et historique, comme pour aider à faire comprendre à la fois l'émergence d'un concept et les nécessités qui y ont présidé). Contentons nous d'extraire de l'article quelques emprunts illustrant ce double intérêt.

Commentaire de l'encadré ci-contre : Argand raisonne par analogie avec les nombres négatifs. Pour rendre compte du fait que $(+a)$ est à $(-b)$ ce que $(-\mathrm{m}a)$ est à $(+\mathrm{m}b)$, on a défini deux directions opposées sur une droite (les positifs et les négatifs) qui permettent de voir dans l'égalité $\frac{+a}{-b} = \frac{-\mathrm{m}a}{+\mathrm{m}b}$ à la fois un rapport de quantités positives $\frac{a}{b} = \frac{\mathrm{m}a}{\mathrm{m}b}$ et un rapport de directions (la positive et la négative). Cela se ramène finalement à la double interprétation de l'égalité $\frac{+1}{-1} = \frac{-1}{+1}$. Il cherche à faire de même avec la proportion $\frac{+1}{x} = \frac{x}{-1}$ dont une racine est ce fameux $i = \sqrt{-1}$. Il cherche donc une direction $\mathrm{I_d}$ qui permette de « voir » cette

6 *John Mill's boyhood visit to France: being a journal and notebook written by John Stuart Mill in France, 1820-1821*, éd. Anna Jean Mill, Toronto 1960, pp.77-96.

7 Albert Girad (1595-1632), *Invention nouvelle en l'Algèbre*, 1629.

2. Lorsque nous comparons entre elles, sous le point de vue appelé *rapport géométrique*, deux quantités d'un genre susceptible de fournir des valeurs négatives, l'idée de ce rapport est évidemment complexe. Elle se compose 1.° de l'idée du rapport numérique, dépendant de leurs grandeurs respectives, considérées *absolument*; 2.° de l'idée du rapport des *directions* ou *sens* auxquels elles appartiennent : rapport qui, dans ce cas-ci, ne peut être que l'*identité* ou l'*opposition*. Ainsi, quand nous disons que $+a:-b::-ma:+mb$, nous énonçons, non seulement que $a:b::ma:mb$, mais nous affirmons de plus que la direction de la quantité $+a$ est, relativement à la direction de la quantité $-b$, ce que la direction de $-ma$ est relativement à la direction de $+mb$; et nous pouvons même exprimer cette dernière conception d'une manière absolue, en écrivant

$$\text{(A)} \qquad +1:-1::-1:+1.$$

3. Soit proposé maintenant de déterminer la moyenne proportionnelle entre $+1$ et -1, c'est-à-dire, d'assigner la quantité x qui satisfait à la proportion

$$+1:x::x:-1.$$

On ne pourra égaler x à aucun nombre positif ou négatif, d'où il semble qu'on doit conclure que la quantité cherchée est imaginaire.

Mais, puisque nous avons trouvé plus haut que les quantités négatives, qui paraissaient d'abord ne pouvoir exister que dans l'imagination, acquièrent une existence réelle, lorsque nous combinons l'idée de la *grandeur absolue* avec celle de la *direction*; l'analogie doit nous porter à chercher si l'on ne pourrait pas obtenir un résultat analogue, relativement à la quantité proposée.

Or, s'il existe une direction d, telle que la direction positive soit à d ce que celle-ci est à la direction négative, en désignant par 1_d l'unité prise dans la direction d, la proportion

$$\text{(B)} \qquad +1:1_d::1_d:-1,$$

présentera 1.° une proportion purement numérique $1:1::1:1$, 2.° une proportion ou similitude de rapports de direction, analogue à celle de la proportion (A); et, puisqu'on admet la vérité de cette dernière, on ne saurait se refuser à reconnaître également la légitimité de la proportion (B).

4. Nous allons encore établir ici une distinction physique entre les quantités réelles et imaginaires. Que l'unité dont il s'agit soit, comme plus haut, un certain degré de pesanteur, agissant sur un des bras d'une balance. Nous avons trouvé que ce genre de grandeur peut réellement être positif ou négatif; mais on ne saurait aller plus loin; et on ne peut, en aucune manière, concevoir un genre de poids tel que 1_d représente quelque chose de réel. Donc, dans ce cas, 1_d est une quantité imaginaire.

proportion de la même manière en un rapport de quantités positives (à savoir1/1 = 1/1) et un rapport de directions.

Il ne se contentera pas d'introduire la seule direction perpendiculaire que nous connaissons aujourd'hui pour l'axe imaginaire, mais aura l'idée de généraliser cette notion de direction pour « inventer » le concept de vecteur sous l'appellation de « lignes dirigées ».

Commentaire de l'encadré ci-dessous : On le voit, partant de considérations sur la représentation géométrique des quantités réelles négatives et positives par des demi-droites opposées, Argand a idée de les généraliser aux quantités imaginaires en assimilant la direction perpendiculaire aux précédentes comme étant celle des imaginaires purs. Il va même plus loin : sa figure 2, avec son idée de « lignes dirigées », ne représente rien d'autre que la notion moderne de vecteur, et peut servir à montrer à nos étudiants comment un tel concept s'est imposé à propos d'une autre problématique (celle de la représentation géométrique des imaginaires). Sa « théorie vectorielle » s'exprime en termes très actuels dans les lignes et la figure de l'encadré de la page ci-contre.

Outre la représentation géométrique des nombres complexes, ce travail permettra donc à la fois à Argand de définir correctement les opérations vectorielles, et de redémontrer par des voies géométriques les théorèmes algébriques sur les nombres complexes et sur les fonctions trigonométriques.

Les lignes dirigées :

Prenons maintenant pour unité positive une ligne KA (fig. 1) considérée comme ayant sa direction de K à A. Suivant les notion universellement reçues, l'unité négative sera KI, égale à KA, mai prise dans un sens opposé.

Tirons KE, perpendiculaire à IKA ; nous aurons la relation suivante

La direction de KA est, à la direction de KE, comme celle-ci est la direction de KI.

La condition nécessaire pour réaliser la proportion (B) se trouver donc complètement satisfaite, en prenant pour *d* la direction de KE et on aura 1_d=KE : quantité tout aussi réelle que KA et KI. O voit aussi que la même condition est également remplie par KN opposée à KE : ces deux dernières quantités étant entre elles : : +1 : —1 ainsi que cela doit être.

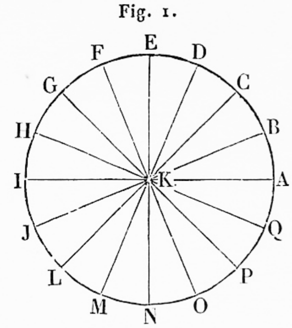
De même qu'on a assigné une moyenne proportionnelle réell KE entre +1 et —1, ou entre KA et KI, on pourra construit les moyennes KC, KG,....., entre KA et KE, KE et KI,...

De là, et par une suite de raisonnemens que nous supprimons on arrivera à cette conséquence générale que, si (fig. 2)

$$Ang.AKB = Ang.A'K'B' ,$$

on a, abstraction faite des grandeurs absolues,

Fig. 1.



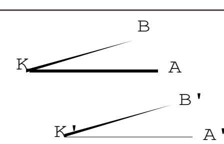


Fig.2

7. On peut décomposer une ligne en direction donnée $\overline{KP}$ (fig. 3) en deux parties appartenant à des *positions* données KA et KB. Il suffit, pour cela, de tirer, sur KB, KA, les lignes PM, PN, parallèles à KA, KB; et on aura

$$\overline{KP}=\overline{KM}+\overline{MP}=\overline{KN}+\overline{NP}\ ;$$

mais, comme on a

$$\overline{KM}=\overline{NP} \quad \text{et} \quad \overline{KN}=\overline{MP}\ ,$$

et comme d'ailleurs il n'y a que ces deux manières d'opérer la décomposition proposée, il faut en conclure, en général, que si, ayant

$$\overline{A}+\overline{B}=\overline{A'}+\overline{B'}\ ,$$

A, A′ ont la même direction a, et B, B′ la même direction b; a et b n'appartenant pas à la même position, on doit avoir aussi

$$\overline{A}=\overline{A'} \quad \text{et} \quad \overline{B}=\overline{B'}.$$

Cette partition a fréquemment lieu, lorsque l'une des positions est celle de ± 1 et l'autre la position perpendiculaire; ce qui revient à la séparation du réel et de l'imaginaire.

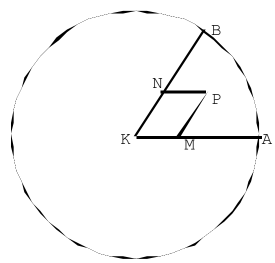


fig. 3

Mais, conscient des critiques d'ordre philosophique ou mathématique dont son travail risque de faire l'objet, et craignant d'être accusé d' « inventer » des relations infondées entre nombres complexes et géométrie plane, il prend la précaution de ne pas poser la question en termes de validité d'un concept (de « vérité » ou de « fausseté » en l'occurrence) et de ne mettre en avant que l'aspect « pratique » de ses idées :

10. La théorie dont nous venons de donner un aperçu, peut être considérée sous un point de vue propre à écarter ce qu'elle peut présenter d'obscur, et qui semble en être le but principal, savoir : d'établir des notions nouvelles sur les quantités imaginaires. En effet, mettant de côté la question si ces notions sont vraies ou fausses, on peut se borner à regarder cette théorie comme un moyen de recherches, n'adopter les lignes en direction que comme *signes* des quantités réelles ou imaginaires, et ne voir, dans l'usage que nous en avons fait, que *le simple emploi d'une notation particulière*. Il

Cette « théorie » mettra plus de trente ans à s'imposer, tant son travail était novateur et bousculait les idées bien établies (et en particulier certains paradigmes). Il fera d'ailleurs l'objet de critiques par Servois dans une lettre publiée par Gergonne [Servois, 1813-1814]

L'intérêt didactique des annales de Gergonne est donc évident, et concerne des champs très divers de l'histoire des idées : philosophie, épistémologie et histoire des sciences, mathématiques, etc. Le texte original d'Argand a été proposé à des étudiants de première année d'IUT, suivi d'exercices de re-démonstration de formules de trigonométrie empruntées à la suite de l'article d'Argand (Voir aussi à ce sujet : [IREM, 1998]). Déjà familiarisés avec ces notions depuis la classe de terminale, les étudiants ont reconnu avoir mieux saisi les mécanismes et les nécessités immanents à la théorie, et en avoir ainsi acquis une vue d'ensemble plus précise et plus marquante dans leurs mémoires. Les formules de trigonométrie, redémontrées comme une conséquence logique de la construction d'Argand, leur sont apparues de ce fait plus « naturelles », et plus facilement mémorisables, même si elles avaient pu parfois déjà être établies devant eux au lycée par les mêmes voies. L'approche historique (un exposé succinct sous forme de diaporama remontant aux origines des nombres imaginaires au 16ème siècle) et philosophique (une liste de citations montrant l'embarras des mathématiciens et des philosophes sur le sujet : Descartes, Leibniz, d'Alembert, Carnot, Argand, Servois, Cauchy, Gauss, etc.) les a séduits, et leur a permis, à travers cet exemple, de voir les mathématiques sous un autre éclairage : de savoir abstrait et dispensé comme une vérité absolue et hors du temps, elles leur sont apparues comme une science en construction, avec ses tâtonnements, ses reculs, ses doutes, et ses superbes avancées.

III. — Le *Journal de Liouville*, autre mine d'exemples pour nos enseignants et élèves

Au-delà des mots d'intention, Liouville, dans son journal, offrira peu de place aux articles de didactique. L'homme lui-même semblait peu s'intéresser à l'enseignement élémentaire. Son dossier personnel de jeune professeur au collège Louis Le Grand, en 1833-1834, porte l'annotation suivante : « M. Liouville a un mérite supérieur. On n'a qu'à se louer de son zèle. Toutefois, on le croit peu propre à l'enseignement des collèges.» [8] Même chose à Polytechnique où son enseignement d'analyse ne semble pas avoir marqué particulièrement les esprits : du zèle, certes, mais pas un profond intérêt. Cela se ressent dans le texte. Les allusions à son cours à Polytechnique sont quasiment inexistantes. [9] Il a beau écrire dans une liasse intitulée « Notes diverses, par JL », « Je réunis sous ce titre des remarques détachées, que j'ai rencontrées, pour la plupart à l'occasion des cours dont je suis chargé à l'Ecole Polytechnique et au Collège de France. Ces remarques ne sont assujetties à aucun ordre déterminé. Quelques unes d'entre elles (je l'espère du moins) pourront être utiles dans l'enseignement. » [10], les allusions concernent presque toujours ses cours au Collège de France. Par exemple, son «Premier mémoire sur la Théorie des Equations différentielles linéaires et sur le développement des Fonctions en séries» [11] a, s'empresse-t-il de mentionner dans une note de bas de page «, servi de texte à quelques-unes des leçons qu' [il a] faites cette année au Collège de France, comme suppléant de M. Biot. Les allusions à des exposés à l'Académie sont légions.

Dans la première période (1836-1840), sur les 41 articles de Liouville, 10 proviennent explicitement des *Comptes Rendus*. C'est un homme tourné vers l'académie et vers le collège de France qui écrit à cette période. Dans la deuxième période (1841-1845), Liouville publie quelques articles relatifs à l'enseignement élémentaire des mathématiques. Dans un article de 1842 [Liouville, 1842a], Liouville reprend un article de Bertrand [Bertrand, 1841], encore élève à l'Ecole Polytechnique, dans lequel il s'intéresse aux fractions qui présentent une indétermination de la forme ∞/∞. En fait, il étend ce qu'on appelle aujourd'hui la «règle de L'Hospital» (relative aux indéterminations de la forme «0/0») aux fractions de la forme précédente. Un autre exemple, impliquant les mêmes auteurs Liouville et Bertrand, concerne les questions d'optimisation. En 1842 [Liouville, 1842b], Liouville insiste sur un point élémentaire concernant la recherche des maxima et minima. Il se propose de «trouver la ligne la plus courte ou la plus longue qu'on puisse mener à un cercle donné d'un point A pris dans son plan». Un exemple qu'il «donne depuis longtemps dans [ses] cours, [car il lui] paraît, à cause de sa simplicité même, bon à

8 Archives Nationales, F17 76 46, Louis Le Grand 1833-1834, n°19.
9 Un article de Briot de 1845 (t. X, pp. 368) précise que l'auteur s'appuie sur une idée de Sturm «indiquée par M.Liouville dans son cours à l'Ecole Polytechnique.»
10 Bibliothèque de l'Institut de France, MS 36 40, Pochette 1880.
11 JMPA, Série 1, T.3, pp. 561.

développer devant des élèves.» Il modélise analytiquement ce problème de géométrie sous forme d'une fonction d'une variable. Si l'on recherche l'extremum parmi les points annulant la dérivée, on aboutit à une situation en opposition avec le « bon sens géométrique » : « si d'après la règle ordinaire, on voulait égaler à zéro la dérivée de cette quantité, on trouverait l'équation absurde $-2a = 0$, d'où il semblerait résulter que le problème n'a aucune solution, tandis qu'évidemment il en a deux». En réalité, son exemple est là pour insister sur le fait que lorsque l'on recherche les extrema d'un fonction d'une variable définie sur un intervalle, la règle ordinaire consiste à les chercher parmi les points en lesquels la dérivée s'annule et change de signe, mais il ne faut pas oublier d'examiner les extrémités de l'intervalle et les points de non - dérivabilité. L'article de Liouville, générera quelques articles autour de ces questions d'optimisation. De Bertrand essentiellement en 1842 et en 1843 [Bertrand, 1842] & [Bertrand, 1843b]. Sans entrer dans les détails du dernier texte, contentons-nous de dire que Bertrand revisite le problème géométrique classique : « trouver un point dont la somme des distances à trois autres A, B, C, soit un minimum» — le problème dit aujourd'hui « de Fermat » — sous un angle purement analytique qui, selon ses mots « fait partie de l'enseignement du calcul différentiel ». Notons qu'en fin d'article, il critique un texte paru dans les Annales de Gergonne présentant des « conclusions tout opposées » [12]. En 1842 toujours, Liouville publie un article de Daru consacré exclusivement à des mathématiques élémentaires, à la résolution des équations différentielles à coefficients constants [13].

Signalons également un réseau d'articles autour du calcul d'une intégrale. En 1843, Joseph Bertrand (1822-1900), encore élève ingénieur des Mines, publie un court article intitulé « Autour de la détermination d'une intégrale définie » [Bertrand, 1843a] [14] ; il s'agit d'intégrer entre 0 et 1 la fonction définie par $f(x) = ln(1 + x)/(1 + x^2)$, c'est-à-dire de

calculer $I = \int_0^1 \frac{ln(1+x)}{1+x^2}\,dx$.

Il appuie son calcul sur un « procédé de réduction analogue à l'intégration par partie » et achève son article en affirmant que : « cette intégrale n'était pas connue, je crois. On pourrait l'obtenir de plusieurs manières ; j'ai choisi la précédente parce qu'elle repose sur une méthode nouvelle d'intégration qui pourra être utile dans certains cas. » La méthode de Bertrand n'a pas connu de succès ; en revanche, elle a fait couler beaucoup d'encre dans le journal de Liouville, y compris en Angleterre. L'article est prolongé par une note de bas de page de Liouville lui-même. Il reprend un des éléments de calcul de Bertrand et arrive en quelques lignes au résultat $\pi ln(2)/8$.

L'année suivante en mai 1844, l'intégrale est reprise dans une note mathématique du *Cambridge Mathematical Journal* (Première série, vol IV, 143-144) très probablement écri-

12 Annales, Tome 1er, 377-378.

13 Autour des équations différentielles linéaires à coefficients constants [Daru, 1842]. Le Comte Napoléon Daru (1807-1890), camarade de promotion de Liouville, à Polytechnique, occupera d'importantes fonctions militaires (lors de l'expédition d'Alger), politiques (il fut un temps Ministre des Affaires Etrangères, en 1870) et académiques (Membre de l'Académie des sciences morales et politiques en 1860). Une note de bas de page de Liouville précise l'origine de cet article : «J'emprunte à d'anciens cahiers ma substance de cette note que M. Daru, mon camarade de promotion à l'Ecole Polytechnique, composa jadis étant encore élève. Quoiqu'il s'agisse d'un théorème très simple et dont les auteurs ont donné dix démonstrations différentes, la méthode ingénieuse suivie par M. Daru méritait, je crois, d'être indiquée.»

14 A l'époque, en France *l* désignait la fonction logarithme népérien; en Angleterre, elle était désignée par log. Ici, nous avons employé la notation d'aujourd'hui, ln.

te par l'aussi jeune Robert Leslie Ellis (1817-1859), co-fondateur du journal. L'auteur commence par qualifier la méthode de Bertrand de «curious manner» et, propose de passer par une fonction de deux variables en introduisant : $f(u) = \int_0^1 \frac{ln(1+ux)}{1+x^2}\,dx$.

En dérivant par rapport à u, il retombe sur une fraction rationnelle à intégrer. Il la décompose, en déduit $f(u)$ puis I en prenant $u = 1$. En réalité, Leslie Ellis se contente d'expliciter la note de bas de page de Liouville. En fin d'année, dans le cahier de décembre 1844, juste après une note de Liouville et une autre de Robert Leslie Ellis [15], le tout aussi jeune Joseph-Alfred Serret (1819-1885) s'attaque à l'intégrale en question par une preuve expéditive grâce au changement de variable $x = \tan\phi$. [Serret, 1844]. Liouville note dans un de ses carnets [16] : « Serret fait $x = \tan\phi$ et c'est un peu plus simple. » Ensuite, partant de cette intégrale en faisant une intégration par partie, il déduit une nouvelle intégrale. Il essaie également de calculer l'intégrale de Bertrand-Serret en posant $y = 1/x$ sans aboutir et s'interroge : « Euler n'a-t-il pas traité de telles intégrales définies ? » Il revient à nouveau sur cette intégrale dans un autre carnet [17] en calculant cette fois une intégrale similaire :

$$\int_0^\infty \frac{ln(x)}{a^2+x^2}\,dx = \frac{\pi ln(a)}{2a}.$$

On retrouve cette intégrale dans son carnet 36 33 (12). Ce carnet contient une liasse : « Cours 1866-1867-1869 », leçons des cours donnés au Collège de France (Les lundis et samedis à 10h). Il débute par les intitulés de chaque leçon puis détaille les calculs. On retrouve des intégrales déjà rencontrées dont l'intégrale de Bertrand-Serret. Il en tirera un autre article en 1869 [Liouville, 1869]; il s'agit en fait d'une «lettre adressée à M.Besge [18]». Cette lettre commence par le calcul de : $\int_0^1 \frac{arctan\ x}{1+x}\,dx$.

Pour ce faire, il part de l'intégrale de Bertrand-Serret et effectue une intégration par partie en utilisant la dérivée de la fonction arctangente. Il débouche sur le même résultat et précise : « Je pourrais au moyen des intégrales définies dont je viens de vous parler en trouver beaucoup d'autres dont les valeurs seraient tout aussi simples; mais j'aime mieux passer à un autre sujet. » [19]

L'omniprésence du calcul intégral est représentative de l'intérêt de Liouville pour ce calcul, qu'il a enseigné à un niveau élémentaire à Polytechnique [20] puis surtout dans ses cours au Collège de France [Belhoste & Lützen, 1984]. A partir de 1845, la part des articles consacrés à l'enseignement (élémentaire) des mathématiques semble s'étioler assez brusquement. Il faut dire qu'en 1842, seront lancées les *Nouvelles Annales de mathématiques*, le « Journal des candidats aux écoles polytechnique et normale.» Le co-fondateur (avec Gerono) des Nouvelles Annales est l'un des acteurs principaux du journal de Liouville, Olry Terquem (1782-1862), qui n'écrira plus dès lors pour ce dernier. On

15 La seule note de Ellis publiée dans le journal de Liouville; elle concerne également le calcul intégral.

16 BIF, MS 36 32 (3).

17 BIF, MS 36 32 (15).

18 Besge est le pseudonyme employé par Liouville pour rédiger quelques articles (plutôt élémentaires) et des lettres à la rédaction.

19 La lettre est un peu une lettre fourre-tout. Il commence par calculer l'intégrale en question puis, passant du coq à l'âne, il parle forme quadratique et revient à la fin sur du calcul intégral. Cela décrit bien l'état d'esprit de Liouville, à l'époque, un homme tout à ses formes quadratiques, dirigeant un journal qui n'a plus la symétrie de ses débuts.

assiste, en ce milieu de siècle, à une dichotomie du champ mathématique français : d'un côté, le journal de Liouville, « destiné aux progrès de la science », de l'autre, les « Nouvelles Annales » destiné au « progrès de l'enseignement ». Assez naturellement, Liouville prendra l'habitude d'orienter vers Terquem les auteurs d'articles qu'il juge trop tournés vers l'enseignement « élémentaire ».

Dans le derniers tiers du XIXème siècle, on assistera à une rude concurrence éditoriale, une concurrence institutionnelle avec, entre autres, le lancement par Pasteur des *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure* en 1864 ; une concurrence du milieu mathématique avec le *Bulletin de la Société Mathématique de France* en 1873. La Société Mathématique de France a été fondée en 1872. Liouville n'adhère pas à la société[21]. [Gispert, 1991]. Il abandonnera, malgré lui, la direction de son journal en 1874. Son journal existe encore aujourd'hui.

IV. — Perspectives

Il ne s'est agi ici que de donner un rapide aperçu de ces deux publications majeures de l'histoire des mathématiques. Nous travaillons actuellement, dans une étroite collaboration entre les universités d'Orsay (Paris-11, Norbert Verdier) et de Toulon (Christian Gerini), via nos laboratoires respectifs et la création d'une équipe de recherche sur les journaux mathématiques du 19ème siècle (au sein du laboratoire GHDSO d'Orsay), à la diffusion des textes originaux comme d'éditions partielles augmentées. Les enseignants intéressés sont cordialement invités à contacter les auteurs de l'article.

Le Journal de Liouville a été numérisé dans le cadre du programme NUMDAM de numérisation de documents mathématiques par le CNRS (http://math-doc.ujf-grenoble.fr/JMPA/). Les *Annales* de Gergonne ont été numérisées[22] grâce à une collaboration entre Christian Gerini, le carré d'Art de Nîmes (propriétaire de l'une des rares éditions intégrales du journal) et NUMDAM : elles ont été aussi récemment mises en ligne (http://www.numdam.org/). Nous mettons tout en œuvre pour diffuser cette information auprès des enseignants de mathématiques comme des historiens et épistémologues afin d'inciter le plus grand nombre d'entre eux à revenir à ces sources essentielles. Les études des Annales de Gergonne et du Journal de Liouville ont déjà fait l'objet de quelques publications dans des revues de spécialistes comme dans des périodiques de vulgarisation scientifique, et fait l'objet de nombreuses conférences. La lecture « croisée » des deux périodiques a elle aussi généré conférences et articles. Cette collaboration entre chercheurs et enseignants s'étend à d'autres pays que la France.

20 On dispose de plusieurs lithographies du Cours d'Analyse de Liouville à Polytechnique. [Liouville, 1994a] & [Liouville, 1994b].
21 Il fut, jusque en 1914, le seul académicien géomètre à ne pas adhérer.

22 Cette démarche s'inscrit dans un vaste mouvement de numérisation des périodiques : le *Journal de Crelle* (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*) vient d'être numérisé, le *Bulletin de Férussac* et *Les Nouvelles Annales* vont l'être d'ici quelques mois, etc.

Bibliographie

[Auteur, date] renvoie au texte de l'auteur (auteur effectif ou sigle collectif [23]) publié lors de l'année mentionnée.

[Argand, 1806], Argand, Robert, *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires*, *dans les constructions géométriques*, Paris, 1806. Ed. actuelle : Paris, Blanchard, 1953 (fac-similé de l'édition de: Paris, Gauthier-Villars, 1874).

[Argand, 1813-1814], Argand, Robert, *Essai sur la manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*, Annales de Gergonne, Tome IV (1813-1814), pp.133-148.

[Atzema, 1993], Atzema Eiso J., *All Phenomena of Optics that depend on Mathematics - A Sketch of the Development of 19th Century Geometrical Optics*, in: Tractrix, Yearbook for the Dutch Society for the History of Science, vol.5 , pp. 45-80, 1993.

[Atzema, 1995], Atzema Eiso J., *A Theory of Caustics - The Contribution of Dupin, Quetelet, and Gergonne to Geometrical Optics*, . In: A. von Gotstedter (ed.), *Ad Radices. IGN Jubiläumsband , Steiner,* pp. 331-354, Verlag, Stuttgart, 1995.

[Belhoste, 1988] Belhoste, Bruno, *Cauchy, un mathématicien légitimiste au XIX ème siècle*, Coll. Un savant, une époque, Ed. Belin, 1988.

[Belhoste, 2001], Belhoste, Bruno, « La préparation aux grandes écoles scientifiques au XIXe siècle : établissements publics et institutions privées «, *Histoire de l'éducation*, n° 90, mai 2001, pp. 101-130

[Bertrand, 1841], Bertrand, Joseph, *Sur la vraie valeur des fractions qui prennent la forme* ∞/∞, JMPA, Série 1, tome VI, 1841, pp.14-16.

[Bertrand, 1842], *Note sur un point du calcul des variations* , JMPA, Série 1, tome VII, 1842, pp. 55-58.

[Bertrand, 1843a], *Détermination de l'intégrale définie*, JMPA, Série I, tome VIII, 1843, pp. 110-112.

[Bertrand, 1843b], *Remarques sur la théorie des maxima et minima de fonctions à plusieurs variables* , JMPA, Série 1, Tome VIII, 1843, pp.155-160.

[CMP, 1825], *Correspondance mathématique et physique*, Imprimerie Vandekerckhove Fils, Gand, tome premier, 1825.

[Condette, 2006], *Les recteurs d'académie en France de 1808 à 1940*, Ed. de l'INRP, 2 tomes, Paris, 2006.

[Cournot, à paraître], *Œuvres de Cournot*, tome XI, sous la direction de Bernard Bru & Thierry Martin, Vrin/Université de Franche-Comté, *à paraître*.

[Dahan-Dalmédico, 1986] Dahan Dalmedico Amy, *Un texte de philosophie mathématique de Gergonne, mémoire déposé à l'Académie de Bordeaux*, in : Revue d'Histoire des Sciences, T. XXXIX-2 (avril-juin 1986) pp.97-126, Paris.

[Daru, 1842], Daru, Napoléon, *Sur l'intégration des équations linéaires à coefficients constants***.** JMPA, Série 1, tome VII, 1842, pp. 266-267.

[Eccarius, 1976] Eccarius, W., *August Leopold Crelle als Herausgeber des Crelleschen Journals (Journal dür die reine und angewandte Mathematik)*, n° 286/287 ; à l'occasion du 150 ème anniversaire de la création du Journal de Crelle, 1976, pp.5-25.

23 *Les sigles CMP, JMPA et JFRAM désignent respectivement Correspondance Mathématique et Physique,Journal de Mathématiques pures et appliquées et Journal für die reine und angewandte Mathematik*.

[Elkhadem, 1978], Elkhadem, H., *Histoire de la correspondance mathématique et physique d'après les lettres de Jean-Guillaume Garnier et Adolphe Quételet*, Bulletin de la classe des lettres et des sciences morales et politiques, 5 ème série, Tome LXIV, pp. 10-11, 1978, pp. 316-366.

[Faris, 1955], Faris J.A., *The Gergonne relations*, in The Journal of Symbolic Logic, Vol. 20, pp. 207-231, ASL, New-York, 1955.

[Friedelmeyer, 1995] Friedelmeyer, Jean-Pierre *« La création des premières revues de Mathématiques et la distinction Mathématiques pures, Mathématiques appliquées «* in Contribution à une approche historique de l'enseignement des mathématiques, Actes de la 6ème Université d'été interdisciplinaire sur l'histoire des mathématiques, Université de Franche -Comté, Besançon, 8-13 juillet 1995, Publication de l'IREM de Besançon, pp. 215-236.

[Gergonne, 1814-1815], Gergonne, Joseph-Diez, *Essai sur un nouveau mode d'exposition des principes du calcul différentiel*, Annales, T. V, 1814-1815, pp. 93-141.

[Gergonne, 1816-1817], *Essai de dialectique rationnelle*, Annales, T. VII, 1816-1817, pp. 189-228.

[Gergonne, 1818-1819], *Essai sur la théorie des définitions*, Annales, T. IX, 1818-1819, pp. 1-35.

[Gergonne, 1821-1822], *Dissertation sur la langue des sciences en général, et en particulier sur la langue des mathématiques*, Annales, T. XII, 1821-1822, pp. 322-359.

[Gergonne, 1826] Lettre à Talbot, 16 décembre 1826. Fox Talbot Museum/Lacock Abbey Collection, N° 01512 [24].

[Gerini, 2002], Gerini, Christian, *Les « Annales » de Gergonne : apport scientifique et épistémologique dans l'histoire des mathématiques*, Ed. du Septentrion, Villeneuve d'Ascq, 2002.

[Gerini, 2003], Gerini, Christian, *Le calcul différentiel au début du 10ème siècle : l'4ssai de calcul différentiel de Servois dans les Annales de Gergonne*, in : Bulletin de la FRUMAM, N°5, pp. 14 & s., Marseille, octobre 2003,

[Gerini, 2005], *Le premier journal de mathématiques*, Pour La Science, Mensuel, N° 332, juin 2005, pp. 10-15.

[Gerini & Verdier, 2006], Gerini, C. & Verdier, N., *Les « Annales de mathématiques » : des Annales de Gergonne au Journal de Liouville*, in : Quadrature, N°61 (juillet-septembre 2006), pp. 31-38, EDP Sciences, Paris, 2006

[Gispert, 1991]. La Société mathématique de France (1870-1914), in Cahiers d'histoire & de philosophie des sciences, N°34, 1991.

[Hajja, 2005], Hajja Mowaffaq, *The Gergonne and Nagel centers of an n-dimesional simples*, in: Journal of Geometry, N°83, pp. 46-56, Birkhäuser Verlag, Bâle, 2005.

[Harrison-Brennan-Gapinsky, 1998], *The Gergonne p-pile problem and the dynamics of the function x -> (x + r) / p*, Discrete Applied Mathematics, N°82, pp. 103-113, Elsevier, 1998.

[IREM, 1994], *Histoire d'infini*, actes du 9ème colloque inter-IREM d'épistémologie et histoire des mathématiques, Editions de l'IREM de Brest, Brest, 1994.

24 «This letter attached, for unknown reasons, to Doc. No: 01188, at FTM, Lacock.» précise Larry J Schaaf, le responsable du projet.

[IREM, 1995], Contribution à une approche historique de l'enseignement des mathématiques, Actes de la 6ème Université d'été interdisciplinaire sur l'histoire des mathématiques, Université de Franche -Comté, Besançon, 8-13 juillet 1995, Publication de l'IREM de Besançon,
[IREM, 1998], Images, Imaginaires, Imaginations, une perspective historique pour l'introduction des nombres complexes, ouvrage collectif de la commission inter-IREM, Ellipses, Paris, 1998.
[JFRAM, 1826] *Journal für die reine und angewandte Mathematik,* Tome premier, Berlin, 1826.
[Jongmans, 1996] Jongmans, F., *Géomètre sans patrie, Républicain sans république*, Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française, pp. 189-197, 1996.
[Lacroix, 1797], Lacroix, Sylvestre-François, *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral,* première édition chez Courcier, Paris, 1797.
[Lamandé, 2004], Lamandé, P., *La conception des nombres en France autour de 1800 : l'œuvre didactique de Sylvestre François Lacroix*, in : Revue d'Histoire des Mathématiques, 10 F1 (2004), p. 45-106, Paris.
[Lamé, 1838], Lamé, G., *Extrait d'une lettre de M.Lamé à M. Liouville sur cette question: Un polygone convexe étant donné, de combien de manières peut-on le partager en triangles au moyen de diagonales?* JMPA, Série I, tome 3, 1838, 505-507.
[Liouville, 1830-1831]), Liouville, J., « Mémoire sur la théorie analytique de la chaleur », Annales de Gergonne, Tome XXI (1830-1831), pp. 133-182.
[Liouville, 1842a], *Sur les fractions qui se présentent sous la forme indéterminée* ∞/∞, JMPA, Série 1, tome VII, 1842, pp.160-162.
[Liouville, 1842 b], *Sur un problème de géométrie relatif à la théorie des maxima et minima*, JMPA, Série 1, tome VII, pp.163-164.
[Liouville, 1869], *Lettre adressée à Mr Besge*, JMPA, Série 2, T.14, 1869, pp.298-301.
[Liouville, 1994 a], *Calcul différentiel*, Ellipses, 1994.
[Liouville, 1994b], *Calcul Intégral*, Ellipses, 1994.
[Serret, 1844] , Serret, Joseph, Alfred, Note sur l'intégrale , JMPA, Série 1, tome IX, 1844, pp. 436.
[Servois, 1813-1814], Servois, François, Joseph, *Lettre de M. Servois* (avec notes de Gergonne), Annales, Tome IV, 1813-1814, pp. 228-235.
[Servois, 1814-1815], Servois, François, Joseph, *Réflexions sur les divers systèmes d'exposition des principes du calcul différentiel, et en particulier sur la doctrine des infiniment petits*, Annales, Tome V, 1814-1815, pp. 141-171.
[Taton, 1947] , Taton, R. , « Les mathématiques dans le *Bulletin de Férussac », Archives internationales d'histoire des sciences,* 26 (1947), pp. 100-125.