QUELQUES ECLAIRAGES SUR LA RADIOACTIVITE

Dominique GAUD
et l'équipe Second Cycle
Irem de Poitiers

*Le groupe second cycle de l'*Irem[1] *de Poitiers a préparé et animé depuis deux ans, avec des collègues de physique*[2]*, des stages de liaison mathématiques-physique. Un des thèmes abordés a été la radioactivité. Dans ces stages, nous avons essayé d'engager un dialogue entre les disciplines en tentant d'éclaircir certains points des programmes et de leurs documents d'accompagnement parfois obscurs, et en confrontant nos apports respectifs sur le sujet.*

Cet article peut constituer la trame d'une liaison effective entre les mathématiques et la physique. Nous distinguerons trois phases :
— la mise en évidence du caractère aléatoire de la désintégration radioactive,
— la recherche de la loi de décroissance radioactive,
— le lien entre les points de vue microscopique-macroscopique.

1. — Mise en évidence du caractère aléatoire de la radioactivité

1. *Etude physique du phénomène*

Le matériel utilisé en physique est le CRAB (compteur radioactif alpha beta). Une pastille de césium 137 (dont la période radioactive est d'environ 30 ans) irradie un compteur. Il est alors possible de compter le nombre de désintégrations radioactives durant un laps de temps que l'opérateur peut définir à l'aide d'une molette.

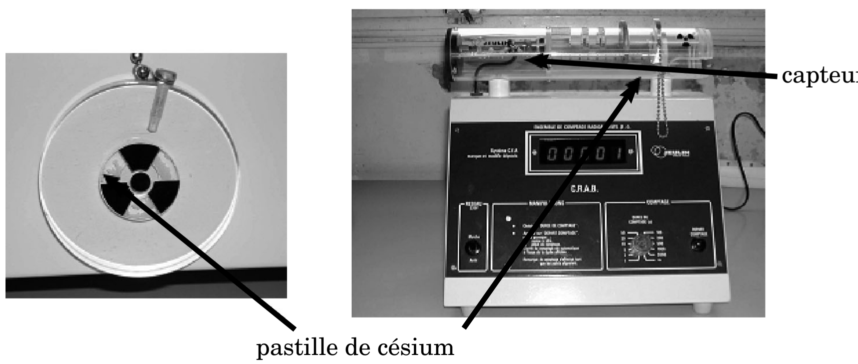
Le compteur ne décompte que les effets (émissions de photons) dans la direction du capteur de l'activité radioactive, mais en admettant l'isotropie du phénomène, on peut considérer que le nombre de désintégrations réelles est proportionnel au nombre affiché sur le CRAB.

Le césium ayant une période très longue par rapport aux durées des expériences (un ou deux jours), *on peut admettre que le nombre de noyaux de l'échantillon reste fixe pendant la durée de l'expérience*.

On choisit de compter les désintégrations durant des intervalles de temps de $\Delta t = 5$ secondes. *On réalise ainsi ce que nous appellerons un comptage*. Si on effectue plusieurs comptages successifs, on constate que le nombre affiché varie selon les comptages[3].

1 Nathalie Chevalarias ; Maryse Cheymol ; Maryse Combrade ; Caroline Ducos, Cyrille Kirch ; Dominique Gaud ; Cédric Jossier ; Loïc Jussiaume ; Roger Terrochaire ; Jean-Claude Thiénard.
2 Stéphane Clisson ; Francis Leroux ; Séverine Dabrowski ; Andréa Grateau ; Philippe Chantant.

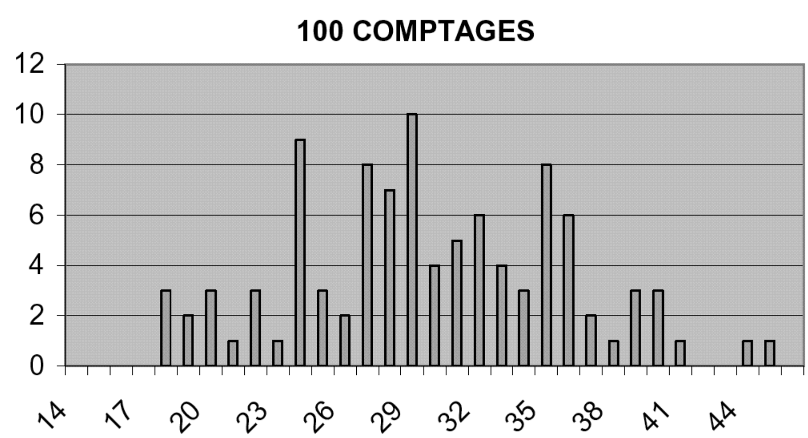
3 Le phénomène ne dépend pas de paramètres extérieurs (humidité, température…) ainsi que l'étude historique faite par les physiciens du début du XXe siècle l'atteste ([1]).



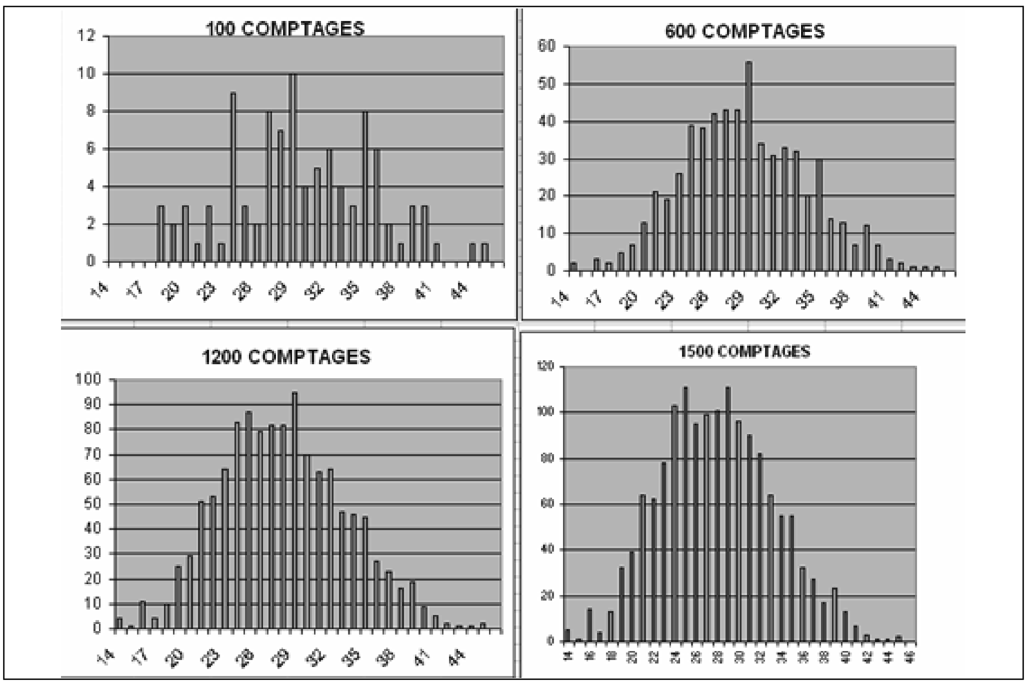
En effectuant des séries de 100 comptages, on obtient un histogramme tel que celui qui est représenté ci-dessous.

Diverses séries de 100 comptages se représentent par des histogrammes différents ce qui conduit à l'observation d'une « fluctuation d'échantillonnage ». Pour chaque série de comptages, on peut calculer les paramètres de position et de dispersion de la série statistique. Que se passe-t-il si on augmente le nombre de comptages ?

Les histogrammesci-contre représentent des échantillons de taille 100, 600, 1200 et 1500 comptages.



En abscisses sont mentionnés les nombres de désintégrations affichés, en ordonnées les nombres de fois où on observe le même nombre de désintégrations.



On constate qu'il apparaît un déterminisme statistique : en effet quand les résultats se cumulent, l'histogramme tend à se rapprocher d'une forme régulière voire familière.

Ceci tend à prouver que le phénomène peut être modélisé par les probabilités et non par d'autres théories telle que la théorie du chaos[4].

Effectuons des séries de 50 comptages et cumulons les résultats. Ainsi, on fait les calculs des moyennes du nombre de désintégrations pour une série de 50, puis de 100, de 150 … comptages. On obtient le diagramme de la page suivante qui montre que le nombre moyen de désintégrations affichées se stabilise autour de 28.

4 Voir Repère IREM n° 32 : , C. Chrétien, D. Gaud. : Qu'est-ce que le hasard ? Comment le mathématiser

2. *Modélisation mathématique du phénomène*

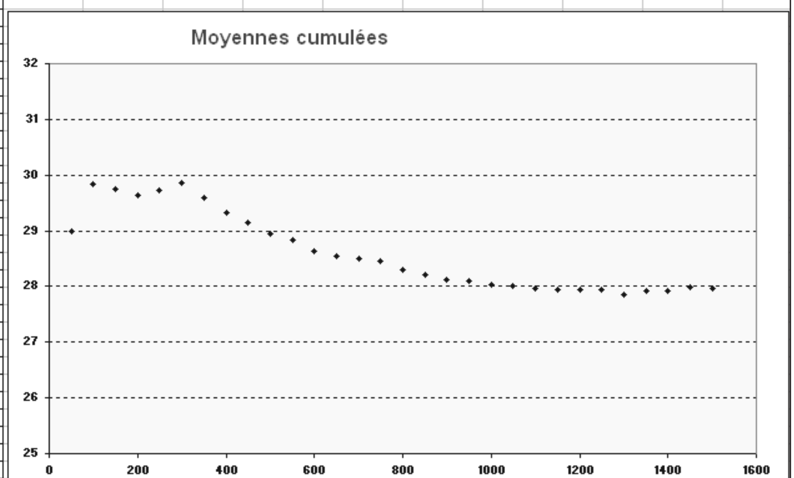
Pour l'élément radioactif étudié, à une date t fixée[5], le nombre de désintégrations ΔN pendant la durée Δt, est un nombre aléatoire. Modélisons ces résultats statistiques par la théorie des probabilités : on nomme X la variable aléatoire qui, à l'instant t, est égale au nombre de désintégrations pendant la durée Δt. X prend a priori les valeurs de 0 à N. Pour déterminer la loi de probabilité de X, il est nécessaire de poser des hypothèses de modélisation :

- lors d'un comptage réalisé avec le CRAB à une date donnée, le nombre de noyaux non désintégrés (noté N) reste constant (la

5 Compte tenu de la période du césium, on peut considérer la valeur du temps t fixe durant l'expérience.

EVOLUTION DE LA MOYENNE SUR 1500 COMPTAGES

Comptage	Moyennes
50	29,00
100	29,83
150	29,75
200	29,64
250	29,72
300	29,87
350	29,59
400	29,33
450	29,15
500	28,94
550	28,84
600	28,63
650	28,55
700	28,51
750	28,45
800	28,30
850	28,21
900	28,13
950	28,10
1000	28,04
1050	28,01
1100	27,96
1150	27,94
1200	27,95
1250	27,94
1300	27,85
1350	27,92
1400	27,92
1450	27,98
1500	27,96



durée de vie de l'élément radioactif est suffisamment longue pour considérer que le nombre de noyaux désintégrés est très faible devant N),

- chaque noyau a la même probabilité p de se désintégrer durant l'intervalle de temps Δt (la désintégration d'un noyau est indépendante de celle des autres noyaux).

Pour modéliser le comportement d'un noyau, on considère une urne de Bernoulli contenant des boules rouges et des boules blanches, la proportion de boules rouges étant égale à p. Le tirage d'une boule rouge dont la probabilité est p modélise la désintégration du noyau pendant la durée Δt. Le tirage d'une boule blanche modélise la non désintégration du noyau pendant la durée Δt. Le nombre p est inconnu.

Pour modéliser un comptage, on effectue N *tirages successifs d'une boule dans l'urne avec remise*. Cela revient à effectuer pour chaque noyau un tirage.

Chaque tirage correspond à l'état d'un noyau : tirer une boule rouge au n-*ième* tirage signifie que le n-*ième* noyau se désintègre pendant la durée Δt.

La variable aléatoire réelle X égale au nombre de boules rouges obtenues lors de la série des N tirages suit donc une *loi binomiale* de paramètres N et p.

$$P(X = k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} .$$

Il reste à confronter le modèle aux résultats expérimentaux. La formule obtenue ci-dessus est inutilisable car on ne connaît ni N ni p. La modélisation par les probabilités (la loi des grands nombres) permet d'énoncer : « Il y a de fortes chances que l'espérance de X soit proche de 28 qui est la stabilisation statistique observée ». m = Np qui est l'espérance de la loi binomiale peut donc être estimée grâce à l'expérimentation ainsi nous prendrons m = 28 [6].

$$P(X = k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

est peu différent de $\frac{m^k}{k!} e^{-m}$.

En effet :

$$P(X = k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} =$$

$$= \frac{N.(N-1). \dots .(N-k+1)}{k!} \left(\frac{m}{N}\right)^k \left(1-\frac{m}{N}\right)^{N-k}$$

$$= \frac{N}{N} \cdot \frac{N-1}{N} \cdot \dots \cdot \frac{N-k+1}{N} .\left(\frac{m^k}{k!}\right).\left(1-\frac{m}{N}\right)^{N-k}$$

Or k est très petit devant N. Ainsi :

$$\frac{N}{N} \approx 1,\ \frac{N-1}{N} \approx 1 \dots\ \frac{N-k+1}{N} \approx 1.$$

De plus on peut montrer — c'est un exercice classique en terminale — que la limite de la suite $\left(1-\frac{m}{N}\right)^{N-k}$ a est égale à e^{-m} : on peut remarquer $\left(1-\frac{m}{N}\right)^{N-k} \approx \left(1-\frac{m}{N}\right)^{N} \approx e^{-m}$.

Les mathématiciens peuvent à juste titre contester les approximations successives où la majoration de l'erreur n'est pas donnée ! Mais peut-être est-ce là une occasion de préciser que les façons de travailler des mathématiciens et physiciens ne sont pas les mêmes…

Ainsi on peut exprimer P(X = k) en fonction de m ce qui revient à dire (mais ce n'est pas au programme de terminale) que la loi binomiale peut-être approximée par la loi de Poisson de paramètre m. Cette approximation permet alors de comparer l'adéquation des résultats théoriques et expérimentaux.

Le modèle théorique ne peut pas être rejeté [7].

On peut remarquer qu'il y a une difficulté pédagogique importante. En effet, en physique les élèves ont l'habitude de travailler en deux temps : d'une part l'expérimentation *puis* la théorisation qui se doit de rendre compte des résultats expérimentaux. Comme on peut le constater, sur la radioactivité (et ce n'est pas un cas isolé dans le programme de physique de terminale S), la recherche de modèles théoriques fait appel à des mesures expérimentales [8].

3. *Un complément théorique*

On peut aller plus loin dans la théorie et estimer l'erreur commise en assimilant Np à la valeur expérimentale m.

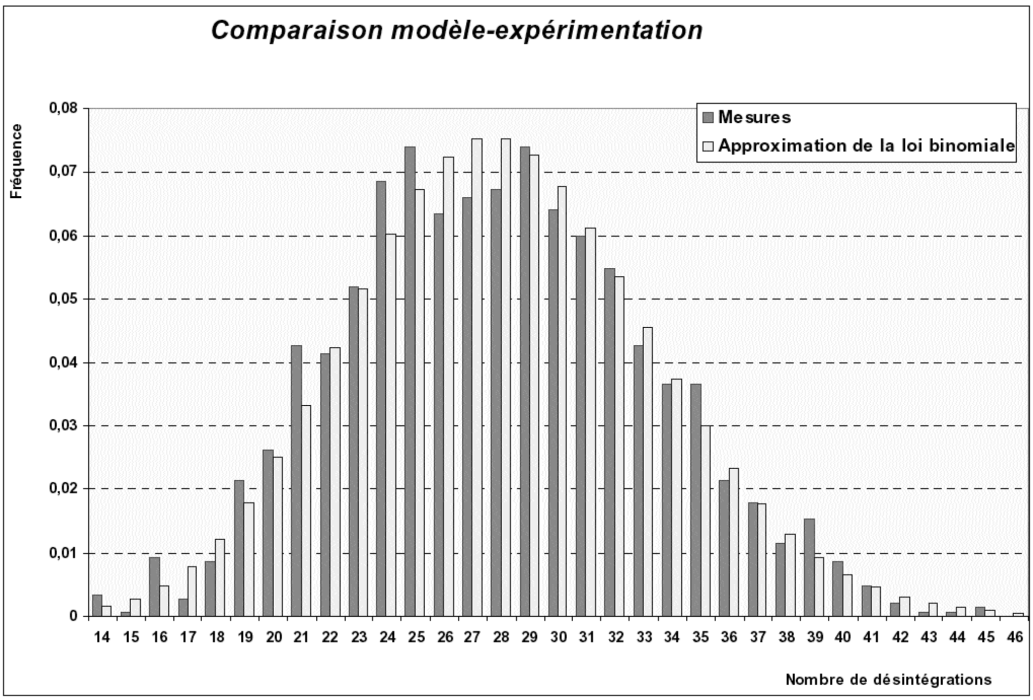
Soit X_i ($1 \le i \le N$) les nombres de désintégrations produites par une masse donnée de césium toutes les cinq secondes, *à une date t donnée.* Ce sont des variables aléatoires de même distribution. Si μ est leur espérance et σ leur écart type [9] la théorie des probabilités permet

6 Voir le paragraphe suivant pour estimer l'erreur.

7 La théorie des probabilités offre le moyen de tester l'adéquation du modèle aux données expérimentales par la théorie des tests type khi2

8 Nous sommes obligés d'insérer des données fournies par des mesures... ce n'est pas le cas avant la terminale.

9 Ils existent, nous éludons ce point dans cette approche simplifiée.



de démontrer que la variable aléatoire :

$M_n = \frac{1}{n}\sum_1^n X_i$ a μ pour espérance et $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ pour écart type.

De plus, d'après le théorème central limite, la distribution de la variable $\frac{M_n - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$ suit (approximativement [10]) une loi normale centrée réduite ce qui signifie que :

$$P(-k < \frac{M_n - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} < k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-k}^{k} e^{-t^2/2}dt$$

ou que :

$$P(\mu - \frac{k\sigma}{\sqrt{n}} < M_n < \mu + \frac{k\sigma}{\sqrt{n}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-k}^{k} e^{-t^2/2}dt$$

Cette intégrale vaut 0,95 pour k = 1,96 et 0,99 pour k = 2,58. Donc, il est quasiment sûr (probabilité de 0,9974) d'observer une valeur de M_n distante d'au plus $\frac{3\sigma}{\sqrt{n}}$ de μ . Ceci explique la stabilisation observée des valeurs de M_n lorsque n devient grand et donne une interprétation de la valeur vers laquelle on observe cette stabilisation : la valeur moyenne espérée pour la variable $Y = \frac{1}{n}\sum_1^n X_i$ c'est-à-dire la valeur espérée pour la variable M_n [11].

10 En pratique l'approximation est considérée comme bonne à partir de n > 30.

11 On explique de la même façon la stabilisation de l'écart type lorsque la taille de l'échantillon augmente.

4. *le rôle des simulations*

Voici un extrait des documents d'accompagnement des programmes de physique :

En seconde, les élèves ont réalisé en mathématiques plusieurs activités sur des phénomènes aléatoires : lancers de dés, jeu de pile ou face et simulations à l'aide d'une calculatrice ou d'un ordinateur.
Ils ont été amenés à constater lors de ces activités la fluctuation des fréquences en comparant plusieurs échantillons de mesure et la convergence des résultats statistiques à mesure que la taille de l'échantillon augmente.
On peut imaginer profiter de ce que les élèves sont en attente d'aller observer les nombres de désintégrations au CRAB pour leur remettre en mémoire les résultats statistiques d'un tirage aléatoire et comparer les graphes obtenus avec ceux de la manipulation. Aussi, peut-on imaginer que les élèves remarqueront la ressemblance entre les résultats de ces activités et les résultats des comptages radioactifs et qu'ils pourront envisager comme une hypothèse possible que la transformation radioactive puisse posséder un caractère aléatoire, ce qui devra être étudié ultérieurement.

Pendant qu'un groupe travaille avec le CRAB, les autres élèves pourront utiliser leur calculatrice ou un tableur pour simuler des séries de jets de dés et construire les courbes similaires aux précédentes concernant, par exemple, la fréquence du résultat 6 dans des jets de 200 dés.

Après chaque tirage on actualise la moyenne du nombre de 6 sortis.
On trouvera page suivante le graphe d'un exemple d'évolution de la moyenne et celui des fréquences portant sur 260 jets simulés à l'aide d'un tableur.
…/…

Conclusion

On pourra alors conclure l'activité : la désintégration d'un ensemble de noyaux radioactifs est un phénomène qui présente des fluctuations. Mais, en multipliant les comptages pour un temps d'observation donné, on peut caractériser le résultat par sa moyenne et son écart type. Par analogie avec des séries de jets de dés, on peut envisager comme hypothèse à vérifier que la désintégration radioactive est un phénomène aléatoire :

— on ne peut savoir quand un noyau va se transformer;

— on ne peut attribuer à chaque noyau qu'une probabilité de se désintégrer dans le temps de la durée d'un comptage, ce qui pourrait expliquer les fluctuations qui ont été constatées au cours de cette activité.

On peut s'interroger sur le rôle de la simulation :

— elle n'apporte rien de ce que l'on ne savait déjà car ce qui valide le modèle c'est la théorie développée,

— s'agit-il de montrer que le CRAB est un dé ?

— s'agit-il de se persuader que la désintégration est un phénomène aléatoire ?

— ou bien s'agit-il de faire des liens artificiels entre les programmes de mathématiques et de physique ?

Le modèle étant validé par l'expérience, la simulation ne peut remplacer l'expérience que si son adéquation est scientifiquement fondée. Sur quelles bases ?

2. — Loi de désintégration radioactive : échelle macroscopique

1. *Des approches expérimentales*

a. Le technétium [12]

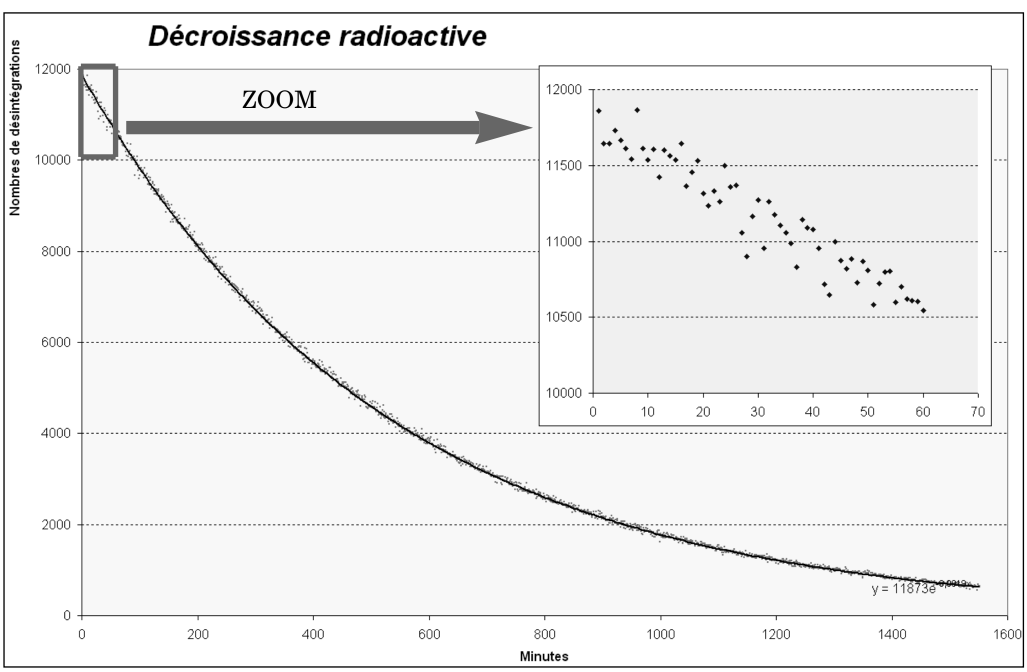
Pour un élément radioactif (le technétium), on a suivi l'évolution du nombre de désintégrations par minute pendant 25 heures. Rappelons que le technétium est un corps radioactif utilisé en imagerie médicale dont la période est d'environ 6 heures. Les données expérimentales ont été réalisées par deux collègues physiciens [13] avec du matériel acheté par leurs soins.

Voici les résultats mis sur tableur.

Qu'observe-t-on ?

Les points correspondent aux nombres de désintégrations par minute. Les résultats des mesures (voir le zoom à droite de l'écran) ne doivent pas être interprétés comme des erreurs de mesure (qui doivent pourtant exister !) mais comme montrant le caractère aléatoire de la désintégration radioactive (Voir partie 1). Cela suppose que l'hypothèse souvent implicite dans les manuels soit connue : la désintégration radioactive obéit aux mêmes lois quels que soient les éléments radioactifs considérés.

On peut bien-sûr essayer de faire passer une courbe « moyenne » entre ces points. La courbe tendance sur tableur a pour équa-



12 Pour plus d'information sur le technétium, on peut consulter le site http://www.lenntech.com/fran%C3%A7ais/data-perio/Tc.htm

13 Philippe Chantant et Francis Leroux.

tion ici : $y = 11873\, e^{-0{,}0019\, x}$ c'est-à-dire que l'on retrouve « des éléments » de la loi de désintégration radioactive : en effet, y représente le nombre moyen de noyaux désintégrés par minute ce qui est assimilé par les physiciens à l'activité du corps radioactif c'est-à-dire le nombre de désintégrations par seconde soit aussi $-\mathrm{d}N(t)/\mathrm{d}t$, si $N(t)$ est le nombre moyen de noyaux non désintégrés à l'instant t.

La loi de désintégration s'obtient en recherchant une primitive de la fonction y. Cette recherche de primitive fait apparaître une constante qui est nulle car, et c'est une nouvelle hypothèse posée par les physiciens, on suppose qu'au bout d'un temps infini tous les noyaux sont désintégrés.

Dans cette démarche, la modélisation n'est pas aussi simple qu'elle paraît : on modélise par un phénomène continu un phénomène discret, on assimile l'activité à une dérivée…

Une autre approche par les mathématiques discrètes peut aussi être faite :

On fait des regroupements des données par heures ou demi-heures : on calcule pour chaque unité de temps choisi la moyenne.

Voici les résultats partiels obtenus. On remarque la stabilité des résultats [14] qui mettent en évidence des suites géométriques. Cette démarche semble très proche de l'expérience historique faite par Rutherford et décri-

nombre moyen de désintégrations par minute durant une demi-heure	Rapport entre deux valeurs successives	nombre moyen de désintégrations par minute durant une heure	Rapport entre deux valeurs successives
	0,94486206		0,89228336
11473,46667		11162,75	
10852,03333	0,94583735	9990,566667	0,89499153
10278,16667	0,94711897	8934,783333	0,89432198
9702,966667	0,94403671	7978,35	0,89295394
9199,233333	0,94808461	7114,616667	0,89174036
8670,333333	0,94250608	6350,383333	0,89258264
8217,5	0,9477721	5660,2	0,89131627
7739,2	0,94179495	5078,783333	0,89727984
7324,033333	0,94635535	4511,15	0,88823439
6905,2	0,94281384	4016,55	0,89036055
6554,166667	0,94916392	3580,416667	0,89141593
6146,6	0,93781564	3197,516667	0,89305714

14 Les résultats sont disponibles sur le site de l'IREM de Poitiers : http://irem.univ-poitiers.fr/irem/

te par Alfred Romer *: La découverte de l'atome,* Payot, 1962.

« L'émanation était radioactive et cette radioactivité se perdait après un certain temps : Rutherford entreprit de savoir comment. Mesurant l'ionisation maintes et maintes fois dans une certaine quantité d'air tranquille, il trouva que la radioactivité diminuait en progression géométrique avec le temps, plus précisément de la moitié par minute ».

On peut alors établir une loi discrète de désintégration. Mais les calculs sont plus difficiles. Malgré les difficultés de modélisation, il y a là matière à des exercices intéressants avec les élèves. On en trouvera en annexe 1.

b. le radon

Les documents d'accompagnement de physique font état d'une expérience utilisant le radon (ci-dessous).

Les nombres qui apparaissent sur l'axe des abscisses sont des dates codées par le tableur. On observe la même courbe que pour le technétium. Mais sur le graphique apparaissent des traits verticaux dont la longueur semble varier. Quelle interprétation donner à ces traits ? Il s'agit de segments représentant des intervalles centrés sur la moyenne μ et de rayons $2\sigma/\sqrt{N}$. Les rayons diminuent en $1/\sqrt{N}$.

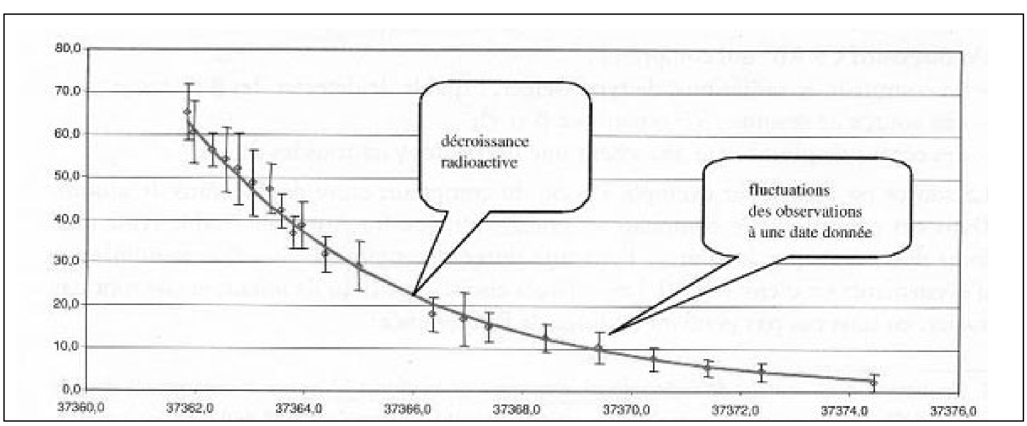
Une étude à partir de la courbe tout comme pour le technétium peut être envisagée.

2. *Approche par le calcul*

Extrait des documents d'accompagnement des programmes de mathématiques :

La loi de désintégration radioactive

L'expérience suggère que, si l'on considère une population macroscopique de noyaux radioactifs (c'est-à-dire dont le nombre est de l'ordre du nombre d'Avogadro, soit 6×10^{23}), le nombre moyen de noyaux qui se désintègrent pendant un intervalle de temps Δt à partir d'un instant t, rapporté au nombre total de noyaux N(t) présents à l'instant t et au temps d'observation Δt, est une constante λ caractéristique du



noyau en question. On peut donc écrire :

$$\frac{\Delta N(t)}{N(t)} = -\lambda \Delta t.$$

A priori, la constante λ pourrait dépendre du temps. Ce serait le cas si un processus de vieillissement était en cause, comme, par exemple, si l'on s'intéresse au nombre de décès dans une population donnée. Le fait que λ ne dépende pas du temps s'interprète comme un processus de « mort sans vieillissement ».
En passant à la limite pour un intervalle de temps devenant arbitrairement petit, on écrira l'équation ci-dessus $dN(t)/N(t) = -\lambda.dt$, ou encore $dN(t) = -\lambda.N(t)dt$. On écrira aussi :

$$N'(t) = \lambda N(t).$$

Les activités expérimentales proposées dans le programme (mesure de la radioactivité du radon, observation de la décroissance temporelle) sont décrites dans la partie du document d'accompagnement propre à la physique.

La métaphore « mort sans vieillissement » est-elle heureuse ? Toujours est-il que la compréhension de cette phrase :

> A priori, la constante λ pourrait dépendre du temps. Ce serait le cas si un processus de vieillissement était en cause, comme, par exemple, si l'on s'intéresse au nombre de décès dans une population donnée. Le fait que λ ne dépende pas du temps s'interprète comme un processus de « mort sans vieillissement ».

est une réelle difficulté pour les enseignants de mathématique et de physique.

Comment cette loi est-elle établie dans les manuels de physique ? Voici (ci-contre) un extrait du manuel de *Physique* de Terminale S de la *Collection Parisi*, édité par les éditions Belin en 2002.

3.2. Loi de décroissance radioactive

On considère un échantillon contenant un nombre $N(t)$ de noyaux radioactifs à un instant donné. Pendant la durée Δt, le nombre de noyaux radioactifs diminue et passe de N à $N + \Delta N$, avec $\Delta N < 0$. Il y a donc eu désintégration de $-\Delta N$ noyaux.

La probabilité pour que $-\Delta N$ noyaux se soient désintégrés pendant la durée Δt correspond au rapport du nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles :

$$\frac{-\Delta N}{N} = \frac{|\Delta N|}{N}$$

Le processus de désintégration d'un noyau étant un phénomène aléatoire ne dépendant ni du passé de ce noyau ni de l'état des autres noyaux, la probabilité que $-\Delta N$ noyaux se soient désintégrés pendant la durée Δt est simplement proportionnelle à Δt.

$$\frac{-\Delta N}{N} = \lambda \Delta t$$

où la constante de proportionnalité λ, positive, est appelée **constante de désintégration**.

La relation précédente s'écrit également :

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = -\lambda N.$$

Si Δt est exprimé en s, une **analyse dimensionnelle** montre que l'unité de λ est s^{-1}.

Pour un intervalle de temps Δt tendant vers zéro, la relation $\frac{\Delta N}{\Delta t} = -\lambda N$ s'écrit :

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

où $\frac{dN}{dt}$ est la fonction **dérivée** de la fonction $N(t)$.

C'est une équation différentielle (*cf.* cours de mathématique). Sa résolution permet d'obtenir la **loi de décroissance** (➡ doc. 10), qui décrit l'évolution temporelle du nombre de noyaux radioactifs de l'échantillon :

$$N(t) = N_0 \, e^{-\lambda t}$$

dans laquelle N_0 représente le nombre de noyaux radioactifs de l'échantillon à l'instant $t = 0$. La constante λ est indépendante de N_0.

Commentaires :
On notera :
— le recours au langage des probabilités qui n'apporte aucune information : le nombre de noyaux désintégrés durant Δt est proportionnel au nombre de noyaux et cela peut être vérifié expérimentalement,
— le passage très rapide sur le fait que λ ne dépend pas du temps
— Ici, N(t) est le nombre d'atomes présents et non un nombre moyen d'atomes. N(t) est donc un entier.
— N(t) qui est un entier devient une grandeur continue qui peut être dérivée.

3. *rôle des simulations*

Les documents d'accompagnement des programmes de physique suggèrent des simulations. On lance 1000 dés non pipés. On compte le nombre de 6 obtenus. Le nombre de 6 obtenus est assimilé au nombre de noyaux désintégrés durant Δt. On ôte les dés qui ont donné 6. On lance les autres dés. Le nombre de 6 est assimilé au nombre de noyaux désintégrés durant l'intervalle de temps suivant Δt. Et ainsi de suite. On met alors en évidence des résultats analogues à ceux du tableau ci-dessous.

Qu'est-ce que cela prouve ou corrobore ? Qu'est-ce que la simulation apporte par rapport à l'expérience ?

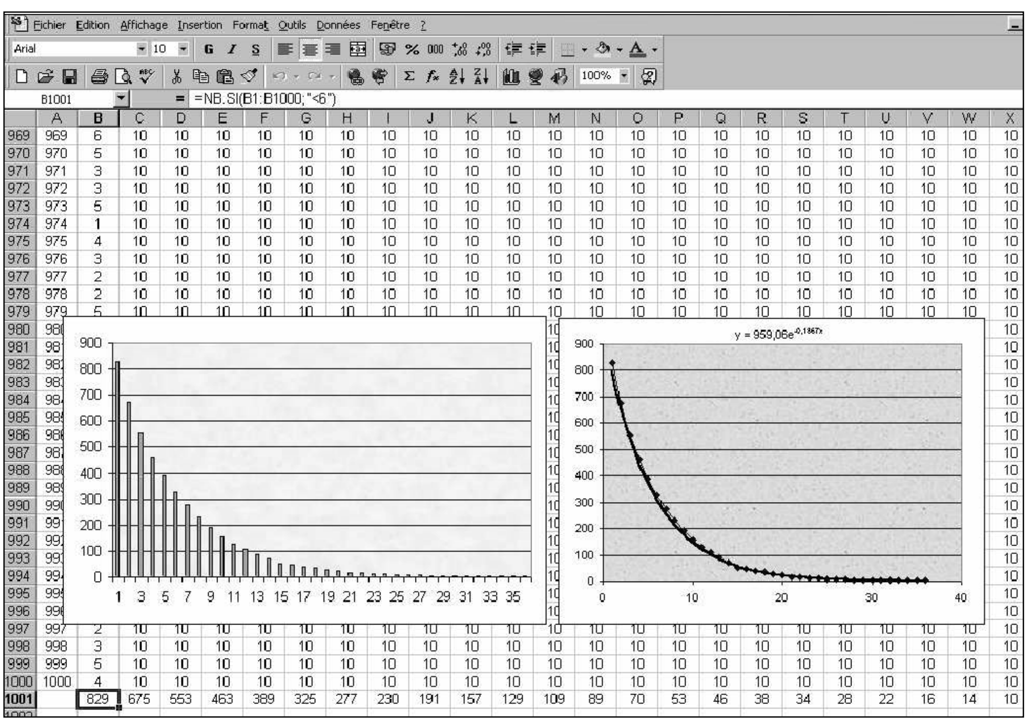
3. — La loi de désintégration : aspect microscopique

1. *Du macroscopique au microscopique*

Le nombre (aléatoire) de désintégrations enregistrées est proportionnel à la masse radioactive et donc au nombre $N(t)$ de noyaux radioactifs — à la date t de l'expérience, une origine des temps ayant été choisie — et au temps Δt du comptage. Seuls ces deux facteurs interviennent. Cela se quantifie par une équation aux différences finies :

$$\frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{N(t)\Delta t} = -\frac{\Delta N(t)}{N(t)\Delta t} = \lambda$$

(λ constante qui ne dépend que du corps radioactif).



Le traitement traditionnel consiste à considérer la fonction N (qui ne prend que des valeurs entières [15]) comme continue et à passer à la limite (en faisant tendre Δt vers 0), ce qui conduit à l'équation différentielle :

$$N'(t) = -\lambda N(t)$$

qui a pour solution : $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$.

Le nombre de désintégrations, à la date t, pendant un temps s est alors :

$$\begin{aligned} N(t) - N(t+s) &= N_0 (e^{-\lambda t} - e^{-\lambda(t+s)}) \\ &= N_0 e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda s}) = N(t).(1 - e^{-\lambda s}) . \end{aligned}$$

Cette valeur fournie par le calcul ne peut pas être « le nombre $X_t(s)$ de désintégrations observables à la date t, pendant un temps s » puisque ce nombre est par essence aléatoire ! Il représente, si le modèle est en bonne adéquation avec le phénomène qu'il cherche à représenter, la valeur espérée $E(X_t(s))$ (ou l'espérance de $X_t(s)$).

Si l'on fait l'hypothèse que chaque noyau a la même probabilité $p_t(s)$ de se désintégrer, à la date t, pendant le temps s (notamment que la désintégration d'un noyau n'affecte pas la probabilité de désintégration d'un autre noyau), le nombre $X_t(s)$ de désintégrations à la date t, pendant un temps s, est une variable aléatoire binomiale de paramètres (N(t), $p_t(s)$). On a donc :

$$P(X_t(s) = k) = \binom{N(t)}{k} p_t(s).(1 - p_t(s))^{N(t)-k}$$

d'espérance $E(X_t(s)) = N(t)(p_t(s)$ et d'écart type $\sqrt{N(t)p_t(s)(1 - p_t(s))}$ qui est de l'ordre de $\sqrt{E_t(s)}$.

15 Passage du discret au continu qui permet de remplacer une équations aux différences finies par une équation différentielle et donc de rechercher la solution du problème dans le cadre d'une théorie bien développée.

D'où $N(t).p_t(s) = N(t).(1 - e^{-\lambda s})$ et $p_t(s) = (1 - e^{-\lambda s}) = p(s)$ ne dépend pas de la date t .

Comme tout se passe en terme de hasard comme si on effectuait $N(t)$ tirages avec remise dans une urne de composition $[p_t(s) ; 1 - p_t(s)]$ cela suppose que $N(t)$ ne varie pas pendant le temps s de l'expérience, ce qui peut être supposé dès que s est très petit devant la période T de l'élément.

Le fait que la probabilité pour un atome de se désintégrer pendant un temps s ne dépend pas de son âge s'interprète de façon métaphorique comme une *mort sans vieillissement*. L'expression probabiliste classique en est : $P_{Z>t}(Z < t + s)) = P(Z < s)$, où Z est la durée de vie du noyau.

Cette expression résulte immédiatement de l'expression de $p(s)$:

$$P_{Z>t}(Z < t + s)) = \frac{P(t < Z < t + s)}{P(Z > t)} =$$

$$= \frac{1 - P((Z > t) \cup (Z > t + s))}{P(Z > t)} =$$

$$= \frac{e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda s})}{e^{-\lambda t}} = 1 - e^{-\lambda s} = P(Z < s))$$

On remarquera que l'écart type de $X_t(s)$ diminue avec le temps t proportionnellement à $\sqrt{N(t)} = \sqrt{N_0 e^{-\lambda t}}$ ce qui a été observé expérimentalement (voir courbe de décroissance radioactive du radon)

2. *Du microscopique au macroscopique.*

Avec les hypothèses :

• H_1 : la durée de vie Z d'un noyau peut être modélisée par une loi de probabilité, la même pour tous les noyaux, ce qui implique que la désintégration d'un noyau n'affecte pas la probabilité de désintégration d'un autre noyau,

• H_2 : un noyau se désintègre sans avoir vieilli.

On peut retrouver la loi de probabilité de la variable aléatoire Z : Une origine des temps ayant été choisie H_2, signifie : $P_{Z>t}(Z < t + s)) = P(Z < s)$. Soit alors $F(t) = P(Z < t)$ la fonction de répartition de Z. F est croissante et $G(t) = 1 - F(t)$ qui représente $P(Z \geq t)$ est décroissante. De plus :

$$P(t < Z < t + s)) =$$
$$= P_{Z>t}(Z < t + s)).P(Z > t) = P(Z < s). = P(Z > t)$$

et

$$P(t < Z < t + s)) = 1 - P((Z < t) \cup (Z > t + s)) =$$
$$= 1 - P(Z < t) - P(Z > t + s)) =$$
$$= P(Z > t) - P(Z > t + s)$$

D'où $G(t) - G(t + s) = (1 - G(s))G(t)$, c'est-à-dire : $G(t + s) = G(t).G(s)$.

Si on pose $G(1) = a$ on démontre avec la seule monotonie de G que, pour tout $t > 0$, $G(t) = a^t = e^{t\ln a} = e^{-\lambda t}$ en posant $\lambda = -\ln a$ ($\lambda > 0$ car $a < 1$ vu que G est décroissante).

D'où $P((Z < t) = 1 - e^{-\lambda t}$. On retrouve [16] en tenant compte de l'hypothèse H_1 :

$$P(X_t(s) = k) = \binom{N(t)}{k} p_t(s).(1 - p_t(s))^{N(t)-k}$$

et la valeur moyenne de désintégrations enregistrées à la date t pendant le temps qui est l'espérance $E(X_t(s)) = N(t)(p_t(s) = N(t)(1 - e^{-\lambda t})$.

16 Voir le sens des notations au paragraphe précédent. De plus $p_t(s) = p(t < Z < t + s) = p(z < s) = 1 - e^{-\lambda s}$.

IV. — Conclusions

Notre objectif, dans cet article était de faire comprendre les liens qui unissaient les maths et la physique sur la radioactivité.

Une véritable difficulté réside dans le lien entre le discret (aspect microscopique) et le continu (aspect macroscopique), et ceci quelle que soit la méthode envisagée. Car ce lien ne peut se comprendre que par l'introduction de variables aléatoires. Ce qui n'est guère envisageable avec nos élèves.

L'usage en physique d'une « modélisation », qui se contente d'une analogie avec ce qui a été étudié en mathématiques, au lieu d'utiliser directement les concepts de probabilités pour modéliser la situation, montre bien l'insuffisance des liens entre nos disciplines.

D'un point de vue pédagogique, peut-on tirer des conclusions quant à la pertinence d'introduire au plus vite l'exponentielle dans le cours de terminale comme le spécifient les programmes qui citent à ce propos la radioactivité ?

Au niveau macroscopique, on aboutit à une équation différentielle (ceci même si on passe par l'équation fonctionnelle $G(r+s) = G(r)G(s)$). La notion d'équation différentielle est difficile pour des élèves qui ne connaissent que des équations dont l'inconnue est un nombre.

Introduire une nouvelle fonction comme solution d'une telle équation pose donc de très sérieuses difficultés d'enseignement, d'autant plus que la résolution approchée (méthode d'Euler) repose sur une compréhension fine de la notion de dérivée, qui va bien au-delà du calcul algorithmique.

Il nous semble qu'en Terminales, vu le programme de physique et l'importance de cette notion en mathématiques, un des objectifs est de faire comprendre ce qu'est une équation différentielle.

Celles-ci sont apparues historiquement soit en géométrie (Descartes à propos de la courbe logarithmique) soit dans des situations externes aux mathématiques en particulier en physique : cordes vibrantes, chaleur. Nous sommes donc convaincus que la motivation (et en particulier l'introduction) à l'enseignement des équations différentielles peut passer par l'étude de phénomènes physiques.

Cependant, comme nous l'avons montré, le thème de la radioactivité recèle maintes difficultés. Dire que l'étude de la radioactivité conduit à une équation différentielle du type $N' = -\lambda N$ (que représente N ?) est un raccourci dommageable pour la compréhension physique du phénomène qui requiert à la fois des connaissances statistiques et probabilistes mais aussi une modélisation non triviale. D'autres situations en physique conduisent à des équations différentielles et sont conceptuellement moins difficiles à saisir telle la chute de la bille dans un milieu visqueux. L'expérience est ici palpable et les concepts physiques mis en jeu nous semblent bien plus simples.

Si on peut hasarder une démarche pédagogique qui serait conforme aux intentions des programmes, celle-ci pourrait être la suivante :

• Introduction des équations différentielles à l'aide d'un ou plusieurs exemples relevant de la physique en insistant sur la modélisation en la réalité physique et les mathématiques. Ces équations différentielles peuvent être du type $y' = ay + b$ ou bien $y' = ay^2 + b$, etc.
• recherche de solutions approchées par la méthode d'Euler sur ces exemples,
• « définition » des équations différentielles,
• définition de l'exponentielle comme solution de $y' = y$ avec $y(0) = 1$.

Cette démarche suppose de passer suffisamment de temps sur les deux premières phases (en ne perdant pas de vue que la compréhension des équations différentielles est essentielle) et un travail commun avec les physiciens pour harmoniser les langages.

Par les notions mathématiques qu'elle met en jeu, la radioactivité peut constituer une synthèse des programmes de mathématiques et de physique en fin d'année.

D'un point de vue épistémologique, l'histoire de la radioactivité, qui ne porte que sur quelques années et où les acteurs sont d'abord des expérimentateurs, nous semble apporter des éclairages précieux sur la question de la modélisation de phénomènes physiques, et le lien entre expérience et théorie.

Il nous semble que le point de vue adopté par le programme (où l'on se contente notamment d'observer l'évolution du phénomène radioactif, dont la nature est déjà connue) donne une idée fausse de ce lien, au détriment d'une véritable formation scientifique. Mais il s'agit là d'une question sur laquelle nous travaillons encore, et qui fera peut-être l'objet d'un article ultérieur.

Bibliographie

A. Romer, *La découverte de l'atome*, Payot, 1962
R. Taton, *Histoire générale des sciences*, PUF, 1961
Parisi, *Physique TS*, Belin, 2002
Collection Hélios, *Physique TS*, Hachette, 2002
Documents d'accompagnement : liaison mathématiques physique.

ANNEXE

Un modèle continu pour la désintégration du technétium

1. *Etude mathématique préliminaire.* On considère une fonction f définie, dérivable et strictement positive sur $\mathbf{R}$ telle que, pour tout x réel : $f'(x) < 0$.

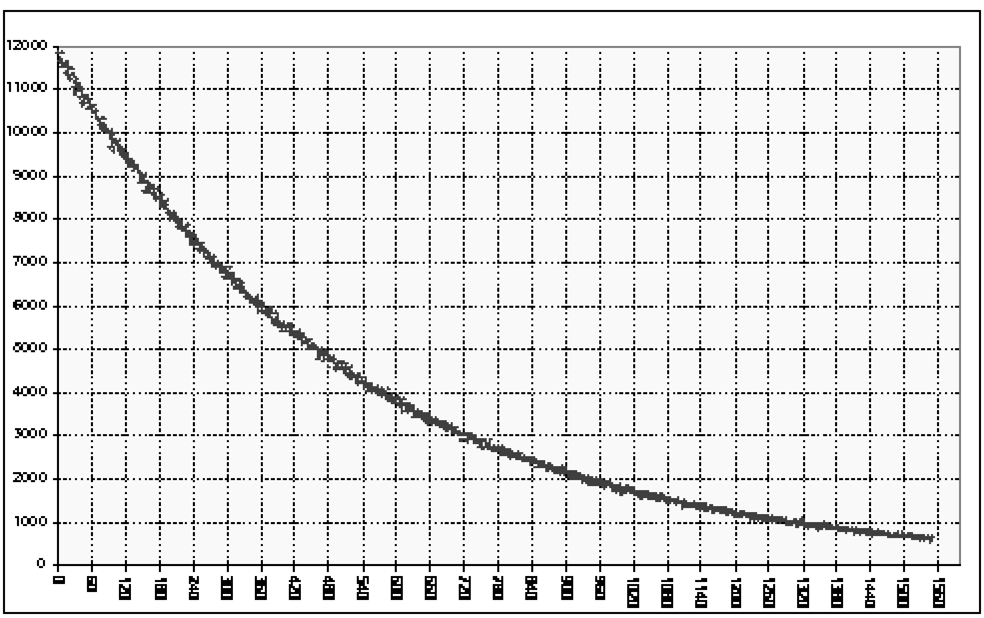
Soit $A(a\,;f(a))$ un point de la courbe C_f représentant la fonction f dans un repère orthogonal. La tangente T_A à C_f au point A coupe l'axe des abscisses en K . Soit H le projeté orthogonal de A sur l'axe des abscisses.

a — Démontrer que $HK = -f(a)/f'(a)$.

b — En déduire toutes les fonctions f pour lesquelles $HK = k$ quel que soit le point A (k étant un réel strictement positif donné).

2. *Application à la physique*

Pour un élément radioactif (le technétium), on a suivi l'évolution du nombre de désintégrations par minute pendant 25 heures (mesures réelles effectuées à l'aide d'un compteur Geiger). On obtient le nuage de points suivant :



1. Tracer à la main une courbe tendance de ce nuage de points. Comment vérifier graphiquement que cette courbe est proche de celle d'une fonction exponentielle (que l'on notera f) ?

2. Par définition, *l'activité d'un corps radioactif à l'instant t est le nombre de désintégrations par unité de temps*. La fonction f représente donc l'activité du technétium. On note N la fonction donnant le nombre moyen de noyaux de technétium présents à tout instant t. On suppose que N est une fonction dérivable sur $[0; +\infty[$. Expliquer pourquoi $N'(t) = -f(t)$.

3. Déterminer f .