LA RUBRIQUE « POINT DE VUE » :

Un lieu de débat pour les enseignants de Mathématiques

La rubrique « POINT DE VUE » *est destinée à être un lieu de débat et un outil de réflexion pour les enseignants de mathématiques sur tous les sujets qui concernent leur profession.*

Elle accueille dans ce numéro un texte de Jean-Pierre Ferrier, ancien directeur de l'Irem de Lorraine, qui analyse les difficultés posées par l'introduction de l'exponentielle en Terminale.

Cette rubrique est ouverte à tous et destinée à recevoir des articles courts, d'environ trois pages…

Nous attendons vos propositions.

Le Comité de Rédaction

Point de vue

LA RADIOACTIVITE SANS EXPONENTIELLE (NI PROBABILITES)

Jean-Pierre FERRIER

On a beaucoup plaisanté sur la fameuse "droite de quatrième" des *mathématiques modernes*. Voilà une présentation qui était pourtant mathématiquement correcte et didactiquement adaptée. Bien sûr on faisait fausse route, comme l'a très bien expliqué Ph. Lombard [PL]. D'ailleurs, comme pour beaucoup de notions introduites à cette époque, on était incapable de proposer des exercices. Au moins a-t-on eu le mérite de ne pas en afficher la prétention.

Avec les mathématiques *post-modernes* que nous subissons aujourd'hui, lesquelles sont dominées par la modélisation et l'interdisciplinarité, déclinées dans les programmes et les établissements, les TPE ou l'option « sciences », on ne prend pas autant de gants. La nouvelle tendance met en avant la coopération exemplaire entre mathématiciens et physiciens qui a donné lieu à l'introduction, en terminale S, de la fonction exponentielle en mathématiques à partir de l'étude de la radioactivité en physique [CS]. C'est le seul exemple qui ait pu être trouvé.

Ce bel exemple, bien trop complexe, a vécu. Il est maintenant acquis que l'on ne peut pas déboucher ainsi directement sur l'introduction de la fonction exponentielle. S'il nous a semblé utile de revenir sur le sujet, c'est pour montrer qu'en avoir fait une illustration de la coopération interdisciplinaire était déjà une supercherie. Le titre de notre article aurait pu aussi être

« Y a-t-il eu un mathématicien
dans la salle ? »

sans aucunement chercher la provocation. Plusieurs questions viennent aussitôt à l'esprit de quiconque ne prend pas cette coopération comme un dogme devant lequel il convient de ce prosterner.

1) Une équation différentielle relie une grandeur à ses accroissements. Dans notre exemple, on mesure bien ΔN à un facteur près mais on n'a aucun moyen d'accéder à N. En fait on relie les accroissements à leurs accroissements ; l'expérience suggère donc $y'' = -ky'$. Qui s'en est inquiété ?

2) Tout varie ici de façon exponentielle ; comme $N(t + \Delta t) - N(t)$ par exemple. C'est une particularité de ces lois que la difficulté d'en sortir. En réalité l'équation fonctionnelle est bien plus présente dans le sujet que l'équation différentielle. Nul ne l'aurait vu ?

3) La simulation se résume à la considération d'une suite géométrique. Il n'y a aucun besoin de fonction exponentielle : c'est infiniment plus élémentaire. On est ainsi renvoyé à la présentation de cette fonction en vigueur au lycée il y a un demi-siècle. C'était trop évident pour avoir été vu ?

4) Dans le cadre des expériences proposées, les fluctuations enlèvent toute crédibilité numérique au phénomène. Les aspects numériques n'intéressent-ils plus les mathématiciens ?

Cette absence de mathématicien dans le dialogue, nous allons la trouver en au moins trois occasions sur lesquelles nous reviendrons en détail, sachant que le physicien aurait pu tenir le rôle s'il ne s'était pas astreint à laisser la place à un représentant patenté de la société mathématique.

On la trouve d'abord dans les documents d'accompagnement des programmes eux-mêmes [DA]. Lorsque le discours utilise « l'expérience suggère que ... », la main est en général donnée au mathématicien. Cela n'est déjà pas le signe d'une grande intimité. Le mathématicien renvoie ainsi à l'expérience tout ce qui l'embarrasse sans ce soucier de ce en quoi elle consiste. Dans le cas présent [1], à ma grande surprise mais comme J. Treiner me l'a garanti, on a laissé le physicien poursuivre tout seul jusqu'à l'écriture de l'équation et aucun mathématicien ne semble avoir relu.

On la trouve aussi dans une introduction pour les classes, avec une partie expérimentale et une partie de simulation, présentée au Comité scientifique des Irem et à la commision Inter Irem du second cycle par J. Treiner et L. Faure [TF]. Elle utilise un dispositif expérimental ingénieux, élaboré mais peu encombrant, avec du radon 220 dont la demi-vie est de 55,5s. Dans l'esprit elle illustre bien la démarche scientifique. Cependant elle n'a finalement pas besoin de la fonction exponentielle pour arriver à ses fins. D'autre part les mathématiciens qui ont assisté aux deux démonstrations (dont j'étais) m'ont semblé manifester davantage leur approbation diplomatique qu'un réel intérêt. C'est dommage car, là aussi, ils auraient dû s'exprimer.

On la trouve encore dans un sujet zéro de physique pour le baccalauréat de la série S, donc dans la production de l'Inspection générale. Pourquoi la coopération entre disciplines y serait-elle interdite ? Si elle eu lieu pour ce sujet, elle aura été bien discrète.

Il résulte de cette carence que beaucoup de documents officiels sont loin de satisfaire une exigence minimale de cohérence. Dans ces conditions comment espérer que les élèves puissent avoir une vision claire là où les responsables de la pédagogie n'en ont pas ?

A propos du titre je voudrais préciser que ce que je vais dire n'enlève rien à l'intérêt de l'exponentielle et du logarithme en physique, notamment pour la descrip-

1 La rédaction du passage du document d'accompagnement en question a été remaniée de façon importante, sans doute à la suite des critiques qui ont été formulées ; c'est à la version initiale que je fais référence ici.

tion du phénomène de la radioactivité ; en fait leur connaissance préalable aurait considérablement simplifié les choses. D'autre part la présentation d'un sujet en début d'année scolaire ne peut pas s'appuyer sur des lois de probabilités qui ne seront étudiées que bien plus tard ; mais cela n'enlève non plus rien à l'intérêt qu'il peut y avoir à expliciter un modèle probabiliste pour décrire un phénomène typiquement aléatoire ; nous disons seulement qu'expliciter ou non ce modèle a peu d'incidence sur les propriétés fonctionnelles que le phénomène fait apparaître.

La carence que nous allons constater est probablement la conséquence d'une formation des enseignants de mathématiques qui ne comprend plus de physique depuis des décennies. Ayant longtemps milité et militant encore pour plus de convergence entre les enseignements de mathématiques et de physique au lycée, j'en viens à trouver sympathiques les collègues mathématiciens qui ne veulent pas entendre parler de physique parce qu'ils s'y sentent mal assurés. Au moins ces collègues ont-ils déjà conscience de leur ignorance. A l'inverse, quand je vois les prétentions modélisatrices du CAPES de mathématiques, je me sens en droit de m'inquiéter.

Malgré tous ces écueils nous allons tenter une présentation respectant le cahier des charges initial mais présentant un minimum de cohérence.

1. Des résultats d'expériences.

Les documents d'accompagnement des programmes de terminale, à la fois pour les mathématiques et pour la physique, proposent une présentation de la radioactivité qui commence par décrire un *modèle macroscopique*. On y présente, comme un résultat préliminaire d'expériences, la propriété

$$\Delta N \;/\; N\Delta t \;= -\lambda$$

où N est le nombre de noyaux à l'instant t, où ΔN est le nombre des noyaux désintégrés entre les temps t et $t + \Delta t$ et où λ est une constante caractéristique du noyau. Cette même propriété est le point de départ de la simulation dans l'introduction pour les classes.

Les physiciens ne manquent pas d'arguments pour expliquer cette propriété; sur cela nous reviendrons. Cependant ils se compliquent ici la vie en cherchant à la justifier directement à partir de leur dispositif expérimental. Est-ce pour éviter de formuler des hypothèses et de les tenir pendant un calcul ? Comme si le physicien ne voulait pas se faire un temps mathématicien.

La propriété exprime une double proportionnalité : celle à Δt et celle à N. Or la vérification de chacune des proportionnalités qu'elle résume pose problème.

Considérons *d'abord* la proportionnalité de ΔN à Δt. Il faut comprendre que Δt doit être suffisamment petit, ce qui va mieux en le disant, comme des relecteurs mathématiciens auraient pu le signaler. Dans les échanges que j'ai eus avec Jacques Treiner, ce dernier m'expliquait comment le physicien arrivait à faire sentir à cette occasion la notion de dérivée dans le contexte expérimental qui était le sien, un peu comme les géomètres expliquent qu'une courbe vue de très près ressemble à une droite.

Malheureusement, avec le dispositif expérimental créé pour la classe, les valeurs possibles pour Δt sont 5s, 10s, 30s, 60s, 600s. La proportionnalité tombe grossièrement en défaut si l'on ne se limite pas aux deux premières valeurs ; les autres sont loin d'être petites. Quant aux deux premières, on peut s'attendre typiquement, au hasard de fluctuations que l'on gère comme des erreurs de mesure, à une valeur comme 2000 pour 5s et 3800 pour 10s. Est-ce bien proportionnel ? Et si on avait eu 4000 au lieu de 3800, ce qui est très possible, qu'en aurait-on déduit ? La linéarité peut-elle être vérifiée sur deux valeurs ?

D'un autre côté nous verrons que pour interpréter la simulation il n'est pas besoin de faire varier Δt et de faire l'hypothèse de cette impossible proportionnalité. En revanche la physique a quand même besoin de quelque chose de ce genre ; nous en reparlerons.

Considérons *ensuite* la proportionnalité de ΔN au stock initial $N(0)$ en attendant celle à $N(t)$. C'est moins périlleux mais moins immédiat aussi. On n'a pas directement accès à $N(0)$ et il faut faire appel à la loi des gaz parfaits que les élèves connaissent ou qu'ils auront une bonne occasion de revisiter. On travaille en fait sur une quantité proportionnelle à $N(0)$, comme on mesure une quantité proportionnelle à ΔN puisqu'on ne relève qu'une partie des désintégrations.

Enfin lorsqu'on nous propose d'en tirer

$$\Delta N = -\lambda N \Delta t$$

au moins à peu près, il y a problème. On utilise en effet la proportionnalité de ΔN à N avec un facteur qui ne dépend pas de t alors qu'on n'a pu vérifier que celle au $N(0)$ initial, vu qu'on n'a aucun moyen de connaître N, même pas à un facteur près en attendant longtemps, à cause du polonium qui vient tout brouiller si l'expérience se poursuit,... sans compter la pause de 2s entre chaque comptage qui fait qu'on perd une quantité non définie de désintégrations. Si des noyaux sans interaction vieillissaient à partir du déclenchement du compteur, on aurait la proportionnalité par rapport à N(t), mais avec un facteur dépendant de t.

On fait donc sans le dire l'hypothèse d'*invariance dans le temps*, dont nous reparlerons.

2. Une simulation pour la classe.

Le dispositif expérimental permet, par exemple, de compter les désintégrations pendant un temps Δt = 5s, deux comptages successifs étant séparés par 2s pour noter les résultats, et débutant donc après un délai h = 7s.

Voici comment J. Treiner et L.Faure [TF] interprètent ces résultats expérimentaux grâce à une simulation sur tableur. Ce faisant ils valident la propriété de base et ajustent la valeur de λ en comparant les résultats expérimentaux à ceux de la simulation partant de la même valeur initiale.

L'activité (moyenne) A donnée par

$$A(t) = [N(t + \Delta t) - N(t)] \;/\; \Delta t =$$
$$= [N(t + h) - N(t)] \;/\; h$$

vaut encore $-\lambda N(t)$ par la propriété indiquée, et l'on en tire aussitôt :

$$A(t + h) - A(t) = -\lambda A(t)\, h$$

On peut alors simuler l'évolution de cette activité, ou encore celle de la différence

$$N(t + \Delta t) - N(t) .$$

qui lui est proportionnelle.

Bien sûr la proportionnalité à Δt fournirait la justification de tout cela. Malheureusement elle n'est pas exacte ; les deux fractions donnant $A(t)$ ne sont donc pas exactes : elles ont en commun d'être des valeurs approchées de la dérivée (hypothétique) de N. En fait la conséquence finale des diverses approximations peut être évaluée. On montrerait qu'on a :

$$A(t+h) - A(t) = -\mu A(t)\, h$$

où

$$\mu h = 1 - e^{-\lambda h}$$

si λ est la constante physique que l'on cherche. Pour h = 7s l'erreur n'est pas négligeable : elle dépasse 4% ; pour h = 12s elle dépasse 7% : c'est déjà beaucoup.

3. Des hypothèses…

La modélisation utilise toujours deux étapes, comme l'a expliqué J. Dhombres [JD]. La première consiste à identifier des *hypothèses*, que J. Dhombres appelle « modèle » et J. Treiner « modèle physique ». La seconde, que j'ai envie d'appeler *thèse*, consiste en un traitement mathématique, que J. Dhombres appelle « modélisation » et J. Treiner « modèle mathématique ».

Les hypothèses sont données dans les documents d'accompagnement à propos du *modèle microscopique*, lequel est probabiliste. Cette partie a été écrite par des mathématiciens, lesquels ont donc bien travaillé à l'occasion. Pourquoi ont-ils ignoré le premier modèle ? Mystère. De façon précise, en plus du fait que les noyaux sont identiques, on suppose

— *l'absence d'interaction* entre les noyaux

— et *l'absence de vieillissement* de ces derniers.

La dernière hypothèse se traduit par *l'invariance dans le temps* : l'évolution à partir du temps t est la même que celle à partir du temps 0 d'un stock équivalent.

Cette invariance a été prise implicitement. Pourquoi ne pas faire l'autre hypothèse, sous la forme de la *proportionnalité* à $N(0)$? Sa validité n'a rien d'obligé, mais c'est l'idée première qu'on doit considérer avant de la rejeter s'il le faut : si je double la quantité de matière je double celle des désintégrations.

La vérification expérimentale directe des hypothèses n'est pas toujours possible. Comment faire si l'on utilise une sonde pour relever les désintégrations ? Ce n'en est que plus intéressant pour montrer la démarche scientifique.

Les hypothèses se traduisent tout de suite en une *équation fonctionnelle*, ce qui n'est jamais qu'une manière plus symbolique de les formuler : si $N(t)$ est le nombre de noyaux restant au bout du temps t, alors

le produit $N(t)N(u)$ ne dépend que de $t + u$.

En effet, par l'invariance dans le temps, le nombre $N(t + u)$ de noyaux restants au bout du temps $t + u$ est égal au nombre de noyaux restants au bout du temps u pour un stock initial de $N(t)$. De plus, par la proportionnalité du nombre restant au stock initial, il est encore égal à $[N(t) / N(0)]\, N(u)$, ce qui donne $N(t)N(u) = N(0)N(t + u)$ et la propriété cherchée.

4. …à un traitement mathématique simple…

Pour une fonction N qui vérifie l'équation fonctionnelle, on a

$$N(t+h) - N(t) = \lambda\, N(t).\, h$$

où $\lambda = (N(h) - N(0) / N(0)).h$. sachant qu'ici λ dépend de h bien sûr.

Maintenant, si l'on choisit h assez petit, on peut interpréter la fraction ci-dessus comme une dérivée (logarithmique) en 0 — un taux si l'on préfère — avec l'avantage d'en faire une valeur (approximativement) indépendante de h. Dans le cas qui nous intéresse, celui de la radioactivité, c'est très important car la valeur λ sera alors une caractéristique physique du noyau.

Considérons $\Delta > 0$ et introduisons $A(t) = N(t + \Delta) - N(t)$ où, pour simplifier, nous ne divisons plus par Δ. On tire de la formule précédente :

$$A(t + h) - A(t) = \lambda\, A(t).\, h$$

avec le même λ. C'est pareil pour $A(t)/\Delta$ évidemment. La formule est toujours exacte. L'accroissement Δ peut être petit comme ne pas l'être et n'a pas besoin d'être lié de quelque façon à h, lequel doit quand même rester assez petit pour son interprétation [2].

5. ... et une validation par simulation.

Comme précédemment, la simulation partant des hypothèses est là pour les valider. En même temps elle s'appuie sur une valeur λ que l'on ajuste grâce au tableur. Contrairement à ce qui a été fait pour la classe, nous prendrons $h = 1$s, de façon à bénéficier de l'interprétation de λ. Nous avons

$$A(t + h) = A(t).(1 - \lambda h)$$

où le coefficient multiplicateur $1 - \lambda h$ résume toute l'information dont nous avons besoin. Mesurer ΔN sur 5s correspond à :

$$A(t + 7h) = A(t).(1 - \lambda h)^7$$

où le coefficient multiplicateur est simplement $(1 - \lambda h)^7$.

On aurait pu, sans inconvénient et même avec quelque avantage parce que les fluctuations seraient moins visibles, mesurer ΔN sur 10s. Dans ce cas le facteur eût été $(1 - \lambda h)^{12}$.

Par ailleurs, pour plus de visibilité, nous affichons les différences, divisées par un $\sqrt{A}$ qui tient compte de l'écart-type, entre les valeurs observées et les résultats de la simulation.

Dans un premier temps nous partons pour la simulation de la première valeur observée et nous ajustons λ visuellement ou en annulant une moyenne. On peut être amené à négliger les valeurs trop petites, à cause de l'influence du polonium. Dans l'expérience que nous avons faite, nous avons conservé les 30 premières valeurs sur 40.

Ensuite nous ajustons la valeur de départ pour la simulation en tenant compte des trois premières valeurs observées. Nous prendrons ainsi 2800 au lieu de 2784. Nous reprenons alors l'ajustement de λ.

De cette façon nous obtenons la valeur $\lambda = 0{,}0124\ s^{-1}$ alors que la valeur exacte serait plutôt $\lambda = 0{,}0125\ s^{-1}$. Peut-être avons-nous eu un peu de chance. En tout cas nous avons fait ce que nous pu pour éviter des erreurs systématiques. De plus une meilleure précision serait illusoire.

2 Si la fonction N vérifie l'équation fonctionnelle, nous voyons que $A(t) = N(t + \Delta) - N(t)$ la vérifie aussi.
En effet :

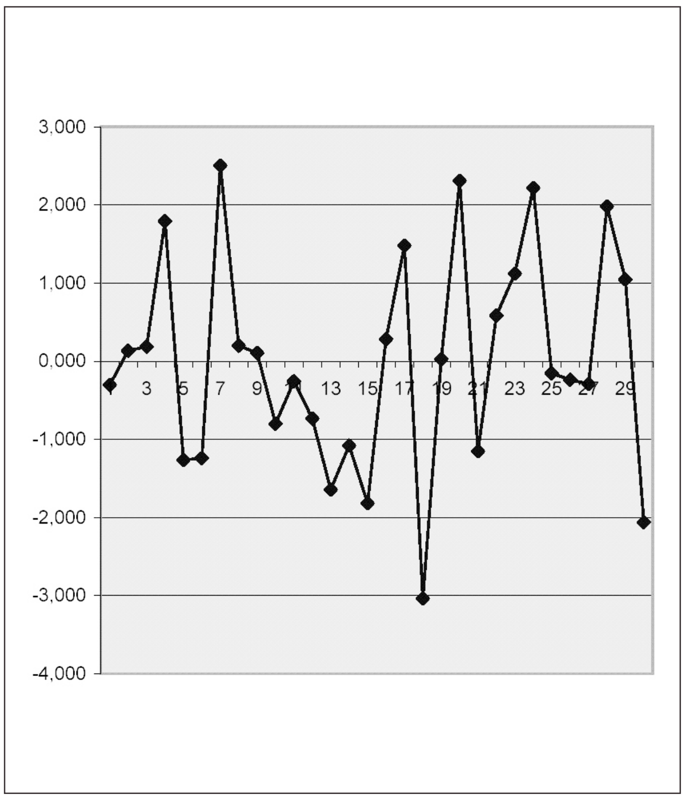
$$\begin{aligned} A(t)\,A(u) &= [N(t + \Delta) - N(t)][N(u+\Delta) - N(u)] \\ &= [N(t+u+\Delta) - N(t+u)][N(\Delta) - N(0)] \\ &= A(t+u)A(0) \end{aligned}$$

et c'est pareil pour $A(t)/\Delta$.

Simulation de la désintégration du radon 220

Coef. réel	Coef. essayé	Equilibre
0,01249	0,01244	– 0,002

Expér.	Simul. Coef. 0,0124	Ecart
2784	2800	– 0,302
2572	2565	0,136
2359	2350	0,188
2236	2153	1,795
1916	1972	– 1,264
1754	1807	– 1,239
1757	1655	2,505
1524	1516	0,199
1393	1389	0,106
1244	1273	– 0,799
1157	1166	– 0,256
1044	1068	– 0,733
927	78	– 1,641
864	896	– 1,078
769	821	– 1,817
760	752	0,285
728	689	1,483
555	631	– 3,036
579	578	0,029
583	530	2,312
460	485	– 1,150
457	445	0,587
430	407	1,124
416	373	2,218
339	342	– 0,154
309	313	– 0,235
282	287	– 0,289
295	263	1,985
257	241	1,046
190	221	– 2,058
205	202	0,206
192	185	0,506
173	170	0,262
163	155	0,613
159	142	1,398
144	130	1,193
142	119	2,064
125	109	1,489
101	100	0,076
84	92	– 0,817



Les expériences ci-dessus ont été réalisées au cours
de la démonstration effectuée par Jacques Treiner lors
de la réunion de la commission InterIrem du second cycle du 28 janvier 2006.

6. Une variante plus rapide.

Ce que nous venons de dire est sans doute trop coûteux en temps pour être intégré au cours de physique. Mais rien n'empêche de l'intégrer au cours de mathématiques, reliant équation fonctionnelle et équation différentielle dans un sens qui n'est pas celui de l'actuelle ROC, mais qui apporterait un plus à l'interdisciplinarité.

Comment le physicien peut-il présenter alors la simulation? D'une manière ou d'une autre, il aura fait l'hypothèse que ΔN était proportionnel à N pour un petit intervalle de temps. Ayant constaté dans des expériences préalables que la demi-vie de l'activité était de l'ordre de la minute, il considèrera qu'un intervalle de temps h = 1s a peu d'effet en valeur relative. Cela permet d'écrire $N(t + h) - \mathrm{N}(t) / h = - \lambda N(t)$ à peu près, ou :

$$N(t + h) = N(t)\,(1 - \lambda h)$$

de façon plus pratique. Appliquons cela à la quantité

$$A(t) = N(t + 5h) - N(t) = (1 - \lambda h)^5\, N(t)$$

qui, non divisée par h, est à un facteur près une activité moyenne ; elle vérifie

$$A(t + h) = A(t)\,(1 - \lambda h)$$

et donc $A(t + 7h) = A(t)\,(1 - \lambda h)^7$.

Cela suffit.

7. Un mot sur la précision.

Comme le faisait Monsieur de l'Hôpital, on est amené à assimiler un petit morceau de courbe à un morceau de droite, un quotient différentiel à une dérivée. Pour cela la condition est simple : il faut que la fonction f de la variable x varie peu, en valeur relative puisque c'est d'un taux qu'il s'agit, entre x et $x + \Delta x$. Quelle erreur relative accepte-on pour "sentir" l'approximation ? C'est une question culturelle. Une erreur de l'ordre de 1% est acceptable : elle correspond à un trait de 1mm d'épaisseur pour un graphique de 10cm. En revanche une erreur de 10% ne l'est pas.

On dira qu'on est limité vers le bas dans le choix de l'intervalle de temps sur lequel on considère le phénomène. Pour ce qui est de l'expérience réelle, c'est vrai. Mais rien n'empêche d'imaginer un récipient plus vaste et une activité bien plus grande, ou alors des moyennes sur plusieurs expériences, ce qui revient au même. Autrement dit, sans aller jusqu'à un intervalle de temps tendant vers 0 au sens mathématique, on peut en concevoir d'assez petits pour lesquels ΔN conservera un sens physique, fût-ce comme une moyenne, une espérance mathématique. L'interprétation de λ comme une dérivée, approchée mais bien approchée quand même, est importante, comme nous l'avons dit, pour lui conférer un caractère de constante caractéristique.

Il est certain que l'interprétation probabiliste apporte ici un gain en termes de rigueur. Moyennée par le hasard, la quantité $N(t)$ va satisfaire *exactement* l'équation différentielle. Le paradoxe est que ce qu'on appelle le modèle microscopique, qu'il convient de mettre en place rigoureusement et donc sans se presser — mais là les documents d'accompagnement le font — débouche d'abord sur notre équation fonctionnelle et rejoint donc très vite la route que nous avons proposée.

8. Et avec l'exponentielle?

Comment aborderions-nous l'étude de la radioactivité si nous connaissions déjà la fonction exponentielle, et surtout la fonction logarithme, ainsi que leurs dérivées? D'abord nous tirerions, comme plus haut, des hypothèses physiques d'absence d'interaction et de vieillissement, le fait que

$$\Delta N = -\,kN\,\Delta t$$

pour Δt suffisamment petit. On traduirait cette dernière relation par

$$\mathrm{d}N = -\,kN\,\mathrm{d}t$$

dans le modèle infinitésimal abstrait, pour lequel un calcul mathématique montrerait qu'il est résolu par

$$N = N_0\,e^{-k(t-t_0)}$$

ou bien, mieux encore, par l'intégration de $\mathrm{d}N/N = -\,kt\,\mathrm{d}t$ en

$$\log N - \log N_0 = -\,k\,(t - t_0)$$

où log est le logarithme népérien.

Il n'y a plus qu'à prendre les logarithmes des valeurs expérimentales trouvées pour valider les hypothèses et obtenir k. Comment faire plus simple?

Introduire l'exponentielle et le logarithme pour les dériver en vue d'équations différentielles est déjà bien plus ambitieux que ce qui se faisait en terminale il y a un demi-siècle. On se contentait d'introduire 10^x et $\log_{10} x$, en s'appuyant sur un argument heuristique de comparaison entre suites arithmétique et géométrique, sans chercher à dériver, ce qui est d'ailleurs conforme à la progression historique. Si l'on veut aller jusqu'à e^x, $\log x$ et dériver, alors il n'y a guère d'autre solution que l'exhaustion de l'hyperbole. Mais, sans discussion sur l'aire, sans équation différentielle, sans probabilités et sans radioactivité, c'est déjà un gros morceau.

9. Analyse d'un sujet zéro.

Un document [AZ], élaboré par la DEsco en date du 27 août 2002 et disponible sur le site Eduscol, présente un exercice type pour l'épreuve de physique-chimie de série S, concernant la décroissance radioactive du radon 220. Cet exercice, en principe soumis au contrôle de l'Inspection générale, concentre à peu près toutes les confusions qu'il est possible d'imaginer.

D'abord on ne sait pas où l'on va.

S'agit-il, en question de cours, de comprendre un phénomène à partir de résultats expérimentaux? Certainement pas puisque l'on connaît déjà la valeur $\lambda = 0{,}0125\,\mathrm{s}^{-1}$ qui correspond au radon 220. Cela n'a donc rien à voir avec la démarche interprétative, fût-elle hésitante, que nous avons considérée jusqu'ici.

S'agit-il de vérifier que les désintégrations sont le seul fait du radon 220 ? L'élève sait que sa fiole scintillante a été remplie à partir "d'une fiole qui contient du radon 220 sous forme gazeuse", mais il peut y avoir un doute. Pour répondre à la question, il n'y avait qu'à regarder, comme nous l'avons dit, les logarithmes des valeurs relevées.

Ensuite les mathématiques n'apparaissent que pour polluer la situation.

Pour "modéliser la décroissance", on "écrit $m(t + \Delta t) - m(t) = \Delta m$" où "$\Delta t$ est appelé pas de résolution de la méthode d'Euler". Ici $m(t)$ est le "nombre d'événements détectés" ; que vient faire la méthode d'Euler [3] ? On glisse du phénomène au modèle.

Ensuite on fait l'hypothèse que le radon 220 est seul en cause et "on en déduit que Δm est proportionnel à la fois à $m(t)$ et Δt" avec comme constante celle du radon, connue bien sûr : on revient au phénomène. Comble de l'ironie on demande de "traduire mathématiquement" cette phrase.

Enfin on repasse au modèle puisque "la méthode d'Euler donne $m(t + \Delta t) = m(t) + \Delta m$ " et on demande de choisir un pas parmi 1µs, 0,5s et 20s. Partant de là on superpose les résultats, on ne sait trop comment, puisque Δt vaut 7s d'un côté et 0,5s de l'autre. On a évité l'écueil des 4% d'erreur, mais au prix d'une confusion totale.

Pourquoi choisit-on d'ailleurs 0,5s ? Parce qu'une règle dit que le pas doit être autour du centième de l'intervalle de travail ! Cette règle a bien une valeur empirique mais ce n'est pas de la science. Même si l'on intègre le fait culturel de la précision de 1%, encore faut-il travailler sur un intervalle de l'ordre d'un temps caractéristique. Pourquoi rejette-t-on 1µs ? Parce que temps de calcul serait trop long ! Et si c'était utile, à l'heure du téraflop largement dépassé ? Et 20s ? Parce que le résultat ne serait pas satisfaisant ! En quoi donc ? On ne dit pas. La physique ne connaît plus l'incertitude.

Plus loin on laisse Δt tendre vers zéro pour considérer la dérivée $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t$ sans autre forme de procès. C'est bien courageux pour un phénomène prenant des valeurs entières et sujet aux fluctuations que l'on sait.

On fait résoudre l'équation différentielle : c'est bon. Mais on dit que "la méthode d'Euler donne des points qui sont solution de l'équation différentielle". Et on le répète pour être bien sûr de se tromper. Si l'on passe sur une expression inadaptée, car les points ne sont solution de rien, il reste une erreur commune chez les étudiants : croire que les points d'Euler sont sur une courbe intégrale, alors que la méthode fait passer sans arrêt d'une courbe intégrale à une autre ; dans notre cas ils sont tous sur la courbe intégrale d'une autre loi exponentielle : c'était l'écueil du **2**.

Enfin pour appliquer la méthode d'Euler "il ne faut pas connaître la solution analytique de l'équation différentielle", dit-on. Comme on connaît la fonction exponentielle, à quoi joue-t-on ?

Conclusion.

Qui a donc pu croire à la pertinence de ce genre de thématique pour des élèves du lycée, et pour le baccalauréat ? L'exercice que nous venons de critiquer concerne les physiciens, mais les mathématiciens de tout bord ne méritent-ils pas leur part de reproches, quand ils se félicitent d'une collaboration exemplaire en la matière ?

3 Plutôt que de méthode d'Euler il faudrait d'ailleurs parler de simulation directe. On donne aujourd'hui le nom de méthode d'Euler à une méthode simple de résolution approchée d'une équation différentielle ; ici on n'en pas encore écrit. Cela étant Euler n'aurait pas désavoué cette simulation. Elle ne suppose pas la notion de dérivée et est donc adaptée à un niveau très élémentaire. Il y a une autre confusion courante. Pour établir l'exponentielle comme solution de $y' = y$, l'annexe des programmes propose de définir $\exp x$ comme limite de $(1 + x/n)^n$; ce n'est pas non plus la méthode d'Euler, car on fait dépendre le pas de x.

Des physiciens rompus à la modélisation, aux équations différentielles ou aux dérivées partielles comme aux phénomènes aléatoires, ne mesureront peut-être pas la difficulté pour des élèves qui rencontrent pour la première fois une situation aussi complexe, dont la notion d'équation différentielle dans un exemple où il n'y a pas de dérivée. Ces derniers adhèreront sans doute à un discours bien préparé et connoté de science moderne. Cependant, si l'on veut faire œuvre vraiment utile, il faudrait que les élèves, au moins les meilleurs, puissent jeter un regard critique sur tout cela. On en est loin. Quelle responsabilité alors de la part des mathématiciens qui ont donné ou donneront leur caution, eux qui ont assumé pendant des décennies la partie structurante de l'enseignement scientifique !

La coopération entre disciplines serait une bonne chose. Mais la cherche-t-on vraiment ? Il aurait fallu mettre en phase les programmes : en seconde, en dehors du cas colinéaire, on peut ajouter des vecteurs mais pas des forces. Et puis les mathématiques enseignées pourraient employer un langage un peu plus compatible avec les besoins des sciences expérimentales. Pourquoi faut-il absolument qu'en toute occasion le discours des mathématiciens diffère de celui tenu dans les autres sciences pour exprimer la même chose ? Cela va-t-il vraiment dans le sens de l'universalité de leur discipline ?

Il faut en finir avec une attitude béate devant cette prétention de modernité qu'on nous propose aujourd'hui pour les classes. A tout prendre la "droite de quatrième" était nettement "moins pire".

[AZ] Annales 0 : exemples d'exercices, épreuve de physique chimie de série S, BO n° 27 du 4 juillet 2002, édité par la DEsco, en ligne sur le site Eduscol à l'adresse \par http://eduscol.education.fr/D0056/radon220.pdf

[CS] Comité Scientifique des IREM, auteur anonyme, *Réponse au texte sur l'enseignement des mathématiques avec les autres disciplines*, printemps 2004

[DA] Document d'accompagnement, Mathématiques classe Terminale série scientifique, Annexe-radioactivité-Terminale S, édité par la DEsco

[JD] Jean Dhombres, *Poser la modélisation comme question épistémologique pour l'introduction des propriétés des exponentielles dans les classes*, rédaction pour le Comité scientifique des IREM, 22 août 2005

[PL] Philippe Lombard, *A propos des nouveaux programmes*, Repères-IREM n°2, janvier 1991

[TF] Jacques Treiner et Laure Faure, présentation au Comité scientifique des IREM de la radioactivité en classe de Terminale S, automne 2005