
LA CONSTRUCTION DU CONCEPT D'ANGLE A L'ECOLE ELEMENTAIRE A TRAVERS LA NOTION DE CHAMP VISUEL

Valérie MUNIER, Hélène MERLE
IUFM de Montpellier
DEVICHI Claude
Université Montpellier 3

Résumé : A l'école élémentaire, malgré la polyvalence des maîtres et les incitations des programmes, les liens entre mathématiques et physique sont peu développés dans les classes. Pourtant de nombreuses situations se prêtent à une articulation entre ces deux disciplines. En particulier la géométrie permet de modéliser des situations de l'espace sensible et d'appréhender un certain nombre de phénomènes physiques. Nous avons travaillé sur la construction du concept d'angle à partir de plusieurs situations issues de la physique (réflexion de la lumière, notion d'azimut, hauteur du soleil ...). Le travail que nous présentons ici porte sur la notion de champ visuel en présence d'un obstacle. Nous exposons les résultats d'une expérimentation dans des classes de CE2 et de CM1, menée conjointement par des didacticiens de la physique, des mathématiques et par des psychologues du développement. Nous montrons l'efficacité de la séquence élaborée pour une première approche du concept d'angle. La comparaison des performances des élèves après enseignement montre que, contrairement aux pratiques habituelles qui introduisent l'angle au CM1, cet apprentissage peut démarrer avec profit dès le CE2. Ce concept, dont la difficulté a été soulignée par de nombreux auteurs, nécessite des approches multiples dans des contextes différents et un apprentissage à long terme ; les résultats obtenus permettent de proposer une progression sur l'ensemble du cycle 3.

1. Introduction

L'expression « enseignement de la géométrie » à l'école élémentaire recouvre deux champs de connaissances distincts : le champ des connaissances spatiales, nécessaires à l'enfant pour contrôler ses rapports à l'espace, et celui de la géométrie proprement dite [1]. Depuis plusieurs années, et plus encore dans les nouveaux programmes de mathé-

matiques de 2002, l'accent est mis sur l'acquisition des connaissances spatiales par les élèves. Un des objectifs de l'enseignement de la géométrie est d'aider à la construction de l'espace chez l'enfant, et il est même annoncé que « l'objectif principal est de permettre aux élèves d'améliorer leur « vision de l'espace » ... ». De plus « Les activités du domaine géométrique

Cette étude fait partie d'un projet de deux ans financé par le ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche dans le cadre de l'appel d'offre « école et sciences cognitives ».

Ont participé à ce projet : DUSSEAU Jean-Michel, FAVRAT Jean-François, IUFM de Montpellier et BALDY René, AUBERT Florence, Université Montpellier 3.

ne visent pas des connaissances formelles (définitions), mais des connaissances fonctionnelles, utiles pour résoudre des problèmes dans l'espace ordinaire ».

Or Berthelot et Salin [2] ont montré que malgré ces intentions, une des caractéristiques majeures de l'enseignement actuel de la géométrie est de sous-estimer la difficulté d'acquisition des connaissances spatiales proprement dites. On laisse à l'élève la charge d'établir les rapports adéquats entre l'espace et les concepts géométriques qui lui sont enseignés et qui sont censés lui donner prise sur ce domaine de réalité. Ces auteurs ont montré que, dans l'enseignement actuel, les connaissances géométriques sont présentées de façon ostensive (où nous retenons la définition de l'ostension donnée par Ratsimba-Rrajhon : « donnée par l'enseignant de tous les éléments et relations constitutifs de la notion visée »), c'est-à-dire qu'elles sont montrées et non construites comme des outils de résolution de problèmes. L'espace de travail à l'école élémentaire reste essentiellement celui de la feuille de papier et, malgré les intentions affichées, les élèves ne sont que rarement confrontés à des activités de modélisation de l'espace sensible. Quand elle est évoquée, la référence à l'espace sensible ne sert en fait que de prétexte à des activités de tracé et il s'agit alors d'ostension déguisée. L'acquisition des connaissances spatiales et géométriques et leur articulation sont alors difficiles pour les élèves et ils ne parviennent pas ou peu à mobiliser leurs connaissances géométriques pour résoudre des problèmes dans l'espace sensible.

Face à ces constatations, il nous semble pertinent d'introduire dès l'école élémentaire les savoirs géométriques de base comme outils permettant de résoudre effectivement des problèmes spatiaux et d'articuler probléma-

tique de modélisation et problématique géométrique. En effet la géométrie permet de modéliser de nombreuses situations de l'espace sensible et d'appréhender un certain nombre de phénomènes physiques.

Cette démarche permet d'inscrire l'apprentissage mathématique et plus particulièrement géométrique dans une démarche scientifique plus globale conformément aux IO. En effet, même si les disciplines mathématiques, sciences expérimentales et technologie se constituent au cycle 3, elles sont regroupées dans les nouveaux programmes de 2002 dans une partie intitulée éducation scientifique, afin de permettre « d'articuler un enseignement de mathématiques exigeant avec la découverte du champ disciplinaire des sciences expérimentales et de la technologie. ». L'objectif annoncé est tout d'abord « d'amener les élèves à comprendre ce qu'est une attitude scientifique et à exercer leur pensée rationnelle ». Au delà des attitudes communes visées à travers ces apprentissages, on peut souligner la similitude des démarches à mettre en œuvre à l'école : « l'enseignement des mathématiques est tout naturellement centré sur la résolution de problèmes », et en sciences expérimentales et technologie les élèves doivent mettre en œuvre des démarches d'investigation pour répondre aux questions productives dégagées par la classe.

L'inscription des mathématiques dans le cadre d'une éducation scientifique large doit enfin permettre, « à travers les activités d'élu-cidation qui se développent dans le cadre des sciences expérimentales » de donner du sens aux notions mathématiques abordées : « les connaissances proposées sont d'autant mieux assimilées qu'elles sont nées de questions qui se sont posées à l'occasion de manipulations, d'observations, de mesures. ».

Malgré ces incitations fortes des programmes et la polyvalence des maîtres de l'école élémentaire, les liens entre mathématiques et physique sont en pratique peu travaillés dans les classes. Il nous paraît donc nécessaire de développer des travaux de didactique permettant de produire des séquences d'enseignement inscrites dans une vision globale de l'enseignement scientifique.

2. Problématique

2.1 Problématique générale

Contrairement à Sophie Gobert pour qui « faire de la géométrie à l'école consiste à apprendre des connaissances de géométrie et apprendre que ces connaissances sont utiles pour résoudre des problèmes spatiaux » [3], nous avons fait le choix ici de nous appuyer sur une expérience spatiale mettant en jeu des phénomènes physiques pour permettre aux élèves non pas de mobiliser mais de construire un concept géométrique qu'ils n'avaient jamais abordé à l'école. Nous avons choisi de travailler sur la grandeur angle, réputée comme particulièrement difficile. Nous avons émis l'hypothèse que l'introduction de ce concept géométrique à partir de situations de physique, dans l'espace sensible, pouvait permettre, outre le développement de liens entre mathématiques et physique, une meilleure appropriation de ce concept. Pour tester cette hypothèse nous avons élaboré, observé et analysé plusieurs situations d'apprentissage en physique [4, 5, 6]. Elles permettent la construction du concept d'angle par l'élève comme connaissance nécessaire au contrôle de situations spatiales, puis comme savoir de géométrie, afin que l'apprentissage prenne racine dans une réalité spatiale qui a du sens pour l'élève.

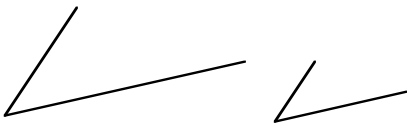
Ces situations d'apprentissage font interagir trois espaces : non seulement les espaces sensible et géométrique des mathématiciens [7], mais aussi l'espace physique. Dans cet espace on considère des objets conceptuels (champ magnétique, rayon lumineux, droite de visée), et les problèmes du physicien sont déjà des problèmes modélisés dans un cadre théorique. Cet espace physique est donc, tout comme l'espace géométrique où on manipule des objets conceptuels (droites, angles, points, ...), un espace construit qui ne doit pas être confondu avec l'espace sensible [7].

Les élèves ont à réaliser une double modélisation, de l'espace sensible à l'espace physique, puis à l'espace géométrique. C'est donc bien, comme pour Sophie Gobert, une « géométrie comme modèle de l'espace » qui constitue le cadre de notre travail [3], toutefois notre spécificité est d'avoir choisi un cadre pluridisciplinaire, avec pour double objectif de construire de nouveaux savoirs physiques et mathématiques. Dans chacune des séquences que nous avons élaborées, la conceptualisation de l'angle dans l'espace réel est nécessaire, l'identification de la pertinence de cette grandeur étant laissée à la charge des élèves. Dans ces situations « grandeur nature », les enfants manipulent dans la cour puis dans la classe, et ils sont amenés à modéliser la situation. Les activités de comparaison et/ou de reproduction des angles sont induites par la situation et apparaissent aux élèves comme nécessaires ; elles prennent ainsi du sens pour eux.

2.2 Questions liées aux difficultés des élèves et à la durée des apprentissages

Les difficultés des élèves face au concept d'angle sont nombreuses. Plusieurs recherches [8, 9, 10] ont pointé l'existence d'une concep-

tion erronée, résistant à l'enseignement classique : l'angle est perçu comme la donnée de deux segments ayant une extrémité commune et des supports distincts. Avec une telle conception, deux figures qui ne diffèrent que par la longueur des segments qui les constituent apparaissent comme représentant des angles différents, la grandeur d'un angle semblant dépendre de la longueur des segments tracés. Par exemple pour les élèves les deux angles ci-dessous ne sont pas égaux :



On peut penser que ces difficultés sont liées aux relations que font les élèves entre figures géométriques et concepts. Charalambos [11] souligne que les figures géométriques sont des instruments nécessaires à la compréhension des concepts géométriques et, qu'à ce titre, elles jouent un rôle important dans l'enseignement de la géométrie. Si elles possèdent certaines propriétés d'un concept (idéali-té, abstraction, perfection, universalité) elles ont aussi des propriétés figuratives (au sens piagétien du terme) que ne possèdent pas les concepts, mais qui peuvent avoir un fort impact visuel, comme c'est le cas ci-dessus : les élèves semblent comparer les zones de l'espace limitées par les segments tracés et pas par les demi-droites que ces segments sont sensés représenter.

De plus les élèves ont du mal à donner du sens au concept d'angle quand il n'est pas présenté sous sa forme primitive, scolaire, et à le reconnaître comme sous-figure d'une autre figure.

Les séquences que nous avons expérimentées ont été conçues pour invalider la conception de l'angle comme paire de segments car elles mettent toutes en jeu l'idée de direction, ce qui devrait permettre aux élèves de prendre conscience et de vérifier expérimentalement que l'angle ne dépend pas de la longueur des côtés.

Berthelot et Salin [9] ont émis l'hypothèse que l'obstacle lié à la longueur des côtés était d'origine didactique. Il peut aussi s'agir d'une représentation issue de la vie courante, l'angle d'une pièce, d'une table, etc., c'est-à-dire « le coin d'un objet ». Cela rejoint une conception erronée de l'angle soulignée par L. Vadcard : l'angle comme un coin attaché à une figure [12].

Pour notre part nous pensons que cette difficulté peut avoir une autre origine, l'introduction qui est faite de l'angle droit au cycle 2. En effet au cycle 2, les élèves doivent s'initier à l'organisation de l'espace, reconnaître quelques figures géométriques simples et mettre au point des techniques de repérage, de reproduction et de construction. Cela nécessite l'utilisation d'un gabarit d'angle droit. L'étude de plusieurs manuels montre que l'approche des angles en cycle 2 se limite presque exclusivement à la description de la technique de fabrication d'un gabarit d'angle droit, par double pliage d'une feuille de papier, et à l'utilisation de ce gabarit pour identifier des angles droits. Ce premier contact avec le terme d'angle, sans travail explicite sur l'idée d'écartement, risque d'enraciner chez les élèves la représentation erronée de l'angle comme coin attaché à une figure. Cette représentation pourra fonctionner plusieurs années avant d'être mise en défaut, ce qui peut donc la rendre d'autant plus difficile à déstabiliser. Il serait intéressant de réfléchir aux raisons

qui conduisent à ce choix d'introduire l'angle droit un à deux ans avant que les programmes ne fassent apparaître explicitement la notion d'angle. On peut noter que dans de vieux manuels de mathématiques de cours moyen [13] l'angle est défini dans une première leçon, et l'angle droit n'est introduit que quelques leçons plus tard. Pourquoi cette inversion ? Est-il trop tôt, d'un point de vue développemental, pour introduire le concept d'angle en fin de cycle 2, et si c'est le cas est-il réellement nécessaire d'introduire l'angle droit à un moment où les enfants ne peuvent pas encore construire le concept d'angle ?

Une analyse de manuels actuels et des pratiques courantes des enseignants montre que le plus souvent l'angle est introduit en CM1, voire au CM2, rarement au CE2. Or de nombreux travaux montrent la nécessité d'un travail à long terme sur ce concept difficile. Mitchelmore et White ont proposé des activités pédagogiques qui confrontent les élèves à une gamme large d'expériences relatives au concept et au mot « angle » [10]. Malgré le nombre important de séances (15) ces auteurs montrent que le concept de l'angle construit ainsi par les enfants n'est pas encore général. Les travaux de Douek [14], qui permettent la construction du concept de hauteur angulaire du Soleil, nécessitent eux aussi un apprentissage très long. Nous avons choisi de tenir compte des contraintes de l'école élémentaire et de ne pas proposer de séquences d'une durée supérieure à 4 ou 5 séances, ce qui correspond à une durée acceptable pour les enseignants. Toutefois les travaux précédemment cités montrent la nécessité d'un travail à long terme. Cela nous amène à envisager, plutôt qu'une séquence très longue, un apprentissage qui démarrerait dès le CE2 et serait repris dans des contextes différents en CM1 et CM2. Cela pose le problème de savoir si les élèves de CE2

peuvent accéder à ce concept ou s'il est trop tôt d'un point de vue développemental. Afin d'apporter des éléments de réponse à cette question et de voir dans quelle mesure les élèves sont capables de construire le concept d'angle en fonction de leur âge, nous avons fait le choix d'expérimenter une même séquence en CE2 et en CM1.

3. Compte-rendu des activités réalisées dans les classes

3.1 Situation proposée

La situation que nous présentons ici est basée sur la notion de champ visuel. Les élèves sont amenés à se poser le problème suivant : « que peut-on voir quand on est devant un obstacle ? ». La situation vécue par les élèves se situe dans l'espace, mais la modélisation effectuée ne prend en compte que la projection sur le plan horizontal, l'analyse complète en 3 dimensions étant trop complexe à l'école élémentaire.

Les élèves formulent alors des hypothèses sur la forme de la zone cachée au sol, puis construisent une expérience permettant de les tester. Cette expérimentation doit leur permettre de construire le concept d'angle comme limitant, ici, la zone cachée pour un observateur situé devant un écran.

Pour concevoir l'espace non visible pour cet observateur, l'enfant doit mobiliser la notion de droite de visée, qui s'appuie sur le concept de propagation rectiligne de la lumière. A cet âge, le modèle de référence est souvent celui d'un rayon indéterminé issu de l'œil [15], mais le sens de propagation n'intervenant pas dans le problème qui nous préoccupe, nous en ferons abstraction. Même si la notion de champ visuel ne figure pas explici-

tement dans les programmes de cycle 3, elle est nécessaire pour pouvoir appréhender certains phénomènes astronomiques, et des difficultés liées au concept de champ visuel ont été mises en évidence dans des travaux sur l'enseignement de l'astronomie à l'école élémentaire [16]. Ces travaux ont montré qu'un tiers seulement des enfants de cycle 3 déterminent correctement un champ visuel avant apprentissage. Il est donc nécessaire de travailler explicitement les notions de droite de visée et de champ visuel avant d'aborder l'étude des phénomènes astronomiques. La situation présentée ici vise au départ la construction du concept d'angle, mais elle doit également permettre aux élèves de construire et/ou de consolider ces notions.

3.2 Remarques méthodologiques

La séquence « champ visuel » que nous présentons a été expérimentée dans quatre classes de cycle 3, de niveau scolaire moyen, n'ayant encore jamais étudié les angles : deux classes de CE2 et deux classes de CM1 (classes des écoles Sibelius, Pottier et Condorcet de Montpellier, 2004). Les maîtres ont eux-mêmes animé les séances, que nous avons préparées en détail et que nous avons filmées.

Nous disposons, pour analyser l'impact de cette séquence, d'évaluations réalisées par des psychologues du développement cognitif, sous forme d'entretiens d'une dizaine de minutes avant et un mois après la fin de la séquence, ainsi que d'évaluations écrites réalisées par des didacticiens en fin de séquence. Le corpus analysé par les didacticiens concerne la totalité des élèves de chaque classe présents aux évaluations (42 et 45 élèves de CE2, 47 et 48 de CM1). Pour l'évaluation réalisée par les psychologues du développement, nous ne prenons en compte que les

élèves présents lors des bilans initiaux et finaux, ce qui ramène les effectifs à 36 élèves de CE2 et 36 de CM1. Etant donné la variabilité de ces effectifs ils seront systématiquement rappelés entre parenthèses dans la présentation et l'analyse des résultats.

En raison des effectifs relativement faibles des populations étudiées, les pourcentages établis n'ont qu'une valeur indicative facilitant la comparaison.

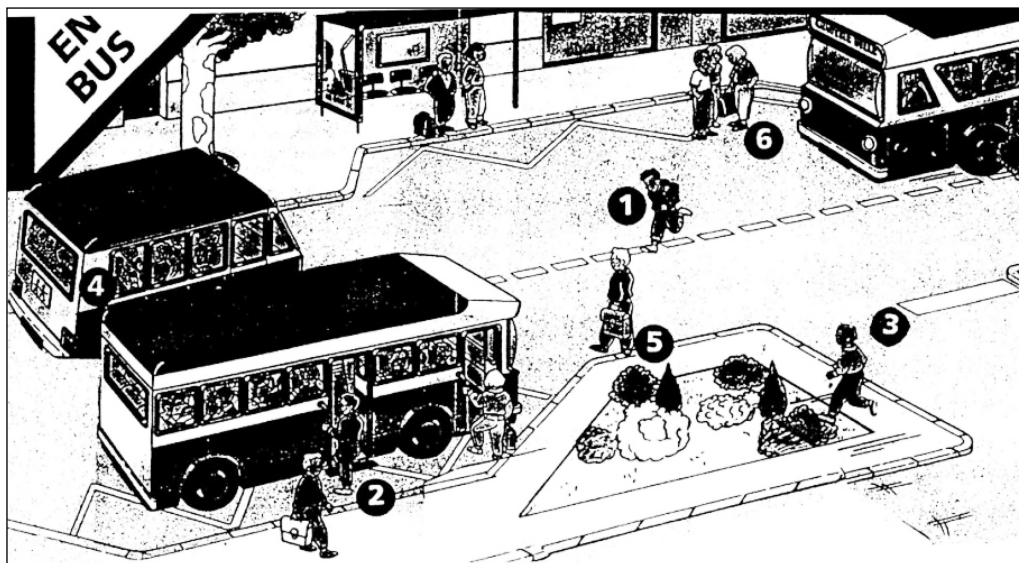
3.3 Description de la séquence

Deux « versions » de la séquence ont été testées, une dans un CE2 et un CM1, l'autre dans les deux autres classes. Les différences entre ces deux versions sont faibles et limitées aux séances 2 et 3. Notre objectif ici n'étant pas de comparer ces deux versions, nous ne détaillerons pas les résultats de chaque classe mais nous les regrouperons par niveau.

1ère séance : Dévolution du problème et formulation d'hypothèses.

La première séance a pour objectif de sensibiliser les élèves à la notion de champ visuel. Pour introduire la situation, les maîtres distribuent un schéma représentant la sortie d'une école, dans lequel des enfants sont en danger car ils vont traverser la rue alors qu'ils ne sont pas visibles d'un véhicule qui double un bus en stationnement.

Les élèves doivent analyser cette situation. Les avis sont différents : certains pensent qu'en effet les enfants qui s'appêtent à traverser ne sont pas visibles par le chauffeur du véhicule, mais tous ne sont pas du même avis. Un débat s'engage et aboutit à la formulation du problème : « que voit-on quand on a un obstacle devant les yeux ? ».



L'introduction du questionnement à travers une situation de prévention routière permet bien la dévolution du problème et les maîtres posent ensuite aux élèves l'exercice 1, après une discussion collective qui permet de s'assurer que les élèves comprennent bien cette schématisation « vue de dessus ». On obtient principalement trois types de réponses.

Les différentes réponses sont affichées : si certains élèves répondent correctement, d'autres considèrent qu'on ne voit pas la bande perpendiculaire à l'écran (solution « bande »), et enfin certains tracent des limites rectilignes obliques passant par les bords de l'écran mais ne passant pas par l'observateur (solution « obliques »). Un débat est organisé. Les élèves proposent rapidement une vérification

Exercice 1	réponse correcte	« bande »	« obliques »
<p>Un enfant est derrière un écran, colorie la zone qu'il ne peut pas voir.</p> <p>_____ Ecran</p> <p>● Enfant</p>			

LA CONSTRUCTION DU CONCEPT
D'ANGLE A L'ECOLE ELEMENTAIRE...

expérimentale pour tester les différentes hypothèses.

2ème séance : Expérimentation
dans la cour, détermination des
limites de la zone visible.

On positionne dans la cour un écran opaque et une chaise sur laquelle s'assoit un observateur. Les autres élèves se positionnent d'abord de l'autre côté de l'écran de façon à ne pas être visibles par l'observateur. Ils se déplacent ensuite jusqu'à la limite de la zone visible en s'arrêtant au signal de l'observateur, et placent une quille sur cette limite (photo 1).

Lors de la mise en commun qui suit, les élèves remarquent que ces quilles sont alignées et le vérifient à l'aide d'une corde tendue (photo 2). Ils notent aussi que les droites sont « obliques » ou « en diagonale » ce qui leur permet d'éliminer l'hypothèse « bande ». On leur demande ensuite si on aurait pu prévoir la position des quilles, quelques élèves rappellent l'hypothèse selon laquelle les limites passent par l'observateur, ce qu'ils vérifient expérimentalement à l'aide de la corde. Ils réalisent ensuite la même activité avec des cordes de tailles différentes puis, dans certaines classes, en modifiant la position de l'observateur, tout en restant sur la « médiatrice » de l'écran (photo 3).

A la suite de cette expérimentation, les élèves dégagent donc les points suivants : les limites de la zone cachée sont des demi-droites, obliques, passant par les bords de l'écran et par l'observateur, et que l'on peut prolonger « autant qu'on veut ».

De retour en classe les maîtres proposent l'exercice ci-contre permettant de schématiser la série d'expériences (pour ceux qui



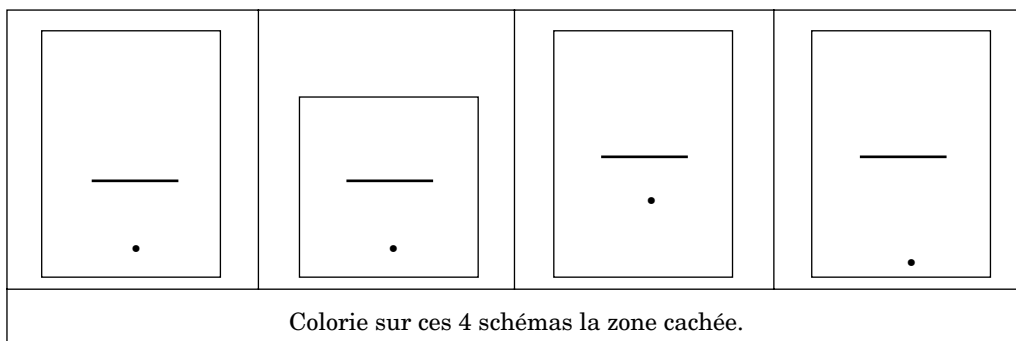
Photo 1



Photo 2



Photo 3



ont modifié la position de l'observateur). Pour les autres élèves un exercice analogue est proposé avec trois cases de taille différente mais la même position de l'observateur.

3ème séance : *Emergence du concept d'angle comme limitant la zone cachée. Elaboration de techniques permettant de comparer des angles.*

Les maîtres affichent des agrandissements des schémas réalisés à la fin de la séance précédente et demandent si la zone cachée est la même partout, ou si elle plus grande ou plus petite et dans quels cas.

Pour les deux schémas correspondant à la même position de l'observateur, certains élèves pensent que la zone cachée est la même, mais tous ne sont pas d'accord : pour certains, le fait que la zone coloriée soit plus grande entraîne que la zone cachée est plus grande. Après une discussion collective qui ne permet pas de conclure, les maîtres distribuent à chaque élève les schémas des expériences, puis leur demandent de rechercher une technique permettant de comparer les zones cachées. Après une longue phase de tâtonnement les élèves se mettent d'accord sur le fait que les zones cachées sont les mêmes car on peut

les superposer (découpage ou papier calque), quelle que soit la longueur des côtés dessinés. Les maîtres demandent ensuite par quoi est délimitée cette zone cachée. Les élèves parlent rapidement de « triangles », ou de « V », puis les maîtres leur indiquent qu'on appelle cela un angle. Les élèves concluent donc que c'est un angle qui délimite la zone cachée (hormis le petit triangle devant) et qu'il est le même pour une position donnée de l'observateur, même si les côtés ont des longueurs différentes.

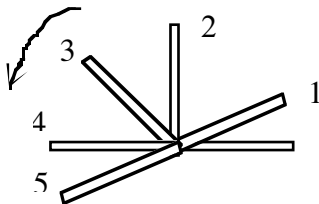
Pour les deux classes ayant modifié la position de l'observateur la discussion se poursuit sur la comparaison des deux derniers schémas. Par superposition les élèves concluent que la zone cachée est plus grande quand l'observateur se rapproche de l'écran et plus petite quand il s'en éloigne et les maîtres font verbaliser cette conclusion en termes d'angles.

4ème séance : *Séance de mathématiques sur les angles et exercices d'application.*

A l'occasion d'un rappel, les maîtres introduisent du vocabulaire : la zone cachée est délimitée par un angle dont le sommet est l'observateur et dont les côtés passent par les bords de l'écran.

En prolongement du travail de comparaison réalisé la fois précédente, les maîtres distribuent un exercice de reproduction d'angle et demandent aux élèves d'élaborer d'autres techniques permettant de comparer et de reproduire des angles. Après quelques difficultés manipulatoires, ils parviennent à réaliser des gabarits par pliage.

Les maîtres demandent ensuite de réfléchir à un instrument plus pratique que les gabarits pour comparer et reproduire des angles. Dans certaines classes les élèves proposent d'utiliser des ciseaux, en posant les deux lames à plat sur les côtés de l'angle, dans d'autres ils ne parviennent pas à imaginer un tel instrument. Dans tous les cas les maîtres introduisent alors une fausse équerre (deux bandes de carton étroites reliées par une attache parisienne) qu'ils utilisent ensuite pour introduire du vocabulaire (angle aigu-1, droit-2, obtus-3) et soulever des discussions au sujet de différents points problématiques. Lorsqu'en l'écartant ils arrivent à l'angle plat (4), certains élèves pensent que *là il n'y a plus d'angle*. Une discussion collective permet d'aboutir à la conclusion qu'il y a toujours un angle qu'on appelle l'angle plat. Lorsqu'ils dépassent 180° (5) certains élèves considèrent que *l'angle est passé en bas* ce qui permet de lancer une discussion et d'aboutir à l'idée que pour deux demi-droites il y a deux angles, un « ouvert » et un « fermé » (les angles rentrant et saillant).



Ces débats se font avec peu d'interventions des maîtres, les enfants sont très actifs au cours

de ces phases et s'impliquent beaucoup. Cette discussion aboutit à la nécessité du marquage des angles *pour savoir celui qui nous intéresse*. Les maîtres reviennent alors sur la situation de départ : l'angle « fermé » délimite la zone qu'on ne voit pas (hormis le petit triangle devant) et l'angle « ouvert » tout ce qu'on peut voir de l'endroit où on est, en regardant dans toutes les directions.

4. Evaluations

Rappelons que ces évaluations ont été réalisées par les psychologues sous forme d'entretiens avant et après la séquence et par les didacticiens en fin de séquence sous forme écrite. Elles ont pour but de tester l'efficacité de la séquence didactique et de voir s'il est pertinent de mettre en place cette séquence dès le CE2, à travers l'analyse et la comparaison des performances respectives des élèves de CE2 et de CM1.

4. 1 Résultats des épreuves écrites en classe

Les objectifs des différents exercices sont multiples. Pour chaque niveau nous voulons d'une part tester les acquis des élèves sur le concept d'angle et voir s'ils sont capables de réinvestir leurs connaissances dans des situations de géométrie différentes ; en particulier nous voulons savoir s'ils sont capables de reconnaître des angles dans une figure fermée (triangle, pentagone), ce qui n'a pas été fait en classe (nous désignerons ces premiers exercices par « exercices de mathématiques »). D'autre part nous souhaitons déterminer dans quelle mesure les enfants ont construit le concept de champ visuel (exercices spécifiques à la situation). Enfin nous cherchons à savoir s'ils parviennent à réinvestir leurs connaissances sur l'angle dans une situation physique

autre que celle à laquelle ils ont été confrontés (exercice de transfert).

Exercices de mathématiques

Les trois premiers sont des exercices « classiques » de mathématiques qui ont été choisis ou construits pour pouvoir comparer les résultats de nos élèves avec ceux de Close [17] et de Berthelot et Salin [9], ces derniers résultats concernant des élèves ayant vécu une situation a-didactique visant l'acquisition du concept d'angle (le jeu du « géométriscrable »).

Il s'agit dans tous les cas de **comparer des angles**. Les élèves disposent pour cela de papier calque, de brouillon pour réaliser des gabarits et de fausses équerres. Ils peuvent utiliser le matériel et la technique de leur choix.

Les deux premiers sont tirés de l'article de Berthelot et Salin [9]. Il s'agit dans ces exercices d'identifier des angles égaux dans des figures (triangles et pentagone). Aucune des réponses ne peut être donnée à l'œil car les mesures des angles concernés sont proches. Les côtés des angles égaux sont de longueurs différentes, alors que ceux des angles dont la différence de mesure est environ de 5 degrés sont de même longueur.

Pour ces exercices les résultats donnés par Berthelot et Salin sont une moyenne des deux item pour chaque exercice, nous faisons de même ci-dessous pour faciliter la comparaison.

Les pourcentages de bonnes réponses que nous obtenons pour ces deux premiers exercices sont inférieurs à ceux de Berthelot et Salin, surtout dans le cas des angles très voisins (item 2 de chaque exercice : R est

Triangle 1

Triangle 2

Y a-t-il dans le triangle 2 un angle égal à l'angle Q du triangle 1 ? Si oui lequel ?

Y a-t-il dans le triangle 1 un angle égal à l'angle T du triangle 2 ? Si oui lequel ?

Angles dans une figure fermée	CE2	CM1	B&S (CM2)
Exercice 1 (ci-dessus)	57 %	69 %	85 %
Sans prise en compte des erreurs dues à la précision	64 %	77 %	
Exercice 2 (pentagone)	53 %	69 %	90 %
Sans prise en compte des erreurs dues à la précision	85 %	86 %	
Pourcentages de réussite			

LA CONSTRUCTION DU CONCEPT D'ANGLE A L'ECOLE ELEMENTAIRE...

voisin de T pour les triangles par exemple, cf. figure précédente).

Deux raisons peuvent expliquer cela. D'une part des effets de contrat, certains élèves cherchant à tout prix à trouver un angle égal et sélectionnant par défaut le plus proche. D'autre part nous avons observé que les élèves ne mettent pas en œuvre des procédures très précises : ils utilisent souvent un calque ou un gabarit aux côtés trop courts, ou ils ne maintiennent pas assez fermement les côtés de la fausse équerre, qui prend du jeu et ne permet donc plus des comparaisons précises. Il serait donc nécessaire, au cours des séances, d'insister davantage sur le besoin de précision et d'introduire, au cours de la dernière séance, des exercices d'application mettant en défaut les procédures imprécises. De plus les élèves sont plus jeunes que ceux de Berthelot et Salin [9], donc moins habiles manuellement. Si on ne tient pas compte des problèmes de précision pour ces item (par exemple en considérant la réponse R comme correcte pour les triangles), on obtient pour ces exercices des résultats du même ordre que Berthelot et Salin pour les CM1, des résultats légèrement inférieurs pour les CE2, alors que Berthelot et Salin ont expérimenté avec des CM2.

Le troisième exercice est aussi tiré de l'article de Berthelot et Salin et complété par un item supplémentaire. Les élèves ont à comparer 8 paires d'angles. Les configurations ont été choisies pour observer dans quelle mesure les élèves sont capables d'éviter certains pièges et

Sur chaque paire d'angles écris le nom du plus grand ou écris « ils sont égaux »

AB	BD
AC	BC
CD	CD
GH	EF

ont pu dépasser les obstacles cités précédemment.

Dans cet exercice, sur les 8 item proposés, 6 permettent de contrôler si les élèves conçoivent la taille des angles comme indépendante de celle de leurs côtés, et s'ils sont capables de donner du sens à la relation « être plus grand que » entre deux angles de même nature. Les deux autres item proposent la comparaison d'un angle saillant et d'un angle rentrant dont la somme est égale à 360 degrés, l'angle saillant étant une fois aigu une fois obtus.

	CE2	CM1	Berthelot et Salin (CM2)
Angles de même nature	Entre 52 et 87 %	Entre 58 et 88 %	Entre 76 et 93 % la 1ère année entre 74 et 87 % la 2nde année

Pour ce qui est de la comparaison d'angles de même nature, nos résultats sont là encore inférieurs, mais dans chaque classe le pourcentage le plus faible concerne une paire d'angles voisins, ce qui rejoint le problème de précision évoqué précédemment.

Ce sont les item « Comparaison d'un angle saillant et d'un angle rentrant dont la somme est égale à 360 degrés » qui posent traditionnellement le plus de problèmes.

Il s'agit de questions difficiles et les élèves ont des résultats supérieurs à ceux de Berthelot et Salin et Close, ce qui montre que les séances proposées permettent une certaine appropriation des angles saillants et rentrants, même si ce n'est pas le cas pour tous les enfants.

Le quatrième exercice fait partie de l'évaluation EVAPM6 1987 réalisée en fin de sixième. Nos élèves avaient pour consigne de **reproduire un angle** donné, avec la technique de leur choix (calque, gabarit ou fausse équerre), alors qu'en fin de sixième les enfants devaient vraisemblablement utiliser un rapporteur.

Le pourcentage d'élèves capables de reproduire un angle en fin de sixième est de 70 %. Nous obtenons 83 % de tracés parfaits en CE2, et 87 % en CM1, donc des résultats supérieurs, bien que les enfants soient plus jeunes de deux ou trois ans.

Nous avons enfin confronté les élèves à une tâche de **production d'angles**. Les

élèves devaient tout d'abord dessiner un angle puis en dessiner un différent. 89 % des élèves de CE2 et 96 % des CM1 dessinent un angle sous sa forme prototypique. Les rares élèves qui échouent dessinent une figure géométrique, fermée ou non, un seul dessine un segment. Cette tâche est donc globalement bien réussie. Parmi les élèves qui ont réussi à dessiner un angle, 68 % des élèves de CE2 et 58 % des CM1 parviennent à en dessiner un différent, c'est-à-dire qu'ils identifient comme pertinent l'écartement entre les côtés dans la taille de l'angle. Parmi ceux qui se trompent l'erreur la plus fréquente consiste à dessiner le même angle avec une orientation différente.

Exercices spécifiques à la situation

A la question « que devient la zone cachée quand l'enfant avance vers l'écran, quand il recule ou si l'écran est plus grand ? », 60 % des élèves répondent correctement à chacune des trois questions, en CE2 et en CM1, et 69 % se trompent uniquement quand on fait varier la taille de l'écran en CE2, 71 % en CM1. Une large majorité des élèves est donc capable, à l'issue de cette séquence, de maîtriser la relation fonctionnelle entre la position de l'observateur sur la médiatrice et l'angle d'ouverture du champ.

Dans un autre exercice il s'agit de savoir où il est préférable de placer un passage protégé pour que des enfants puissent traverser une rue sans danger malgré la présence d'un obstacle visuel. En CE2, 16 élèves sur 42 choisissent le bon schéma (2) et expliquent correctement leur réponse (page suivante).

	CE2	CM1	Berthelot et Salin (CM2)	Close
Angles de natures différentes	40 %	46 %	27 %	33 %

LA CONSTRUCTION DU CONCEPT
D'ANGLE A L'ECOLE ELEMENTAIRE...

Onze autres élèves choisissent aussi ce schéma mais ne justifient pas leur réponse ou donnent des explications difficiles à interpréter.

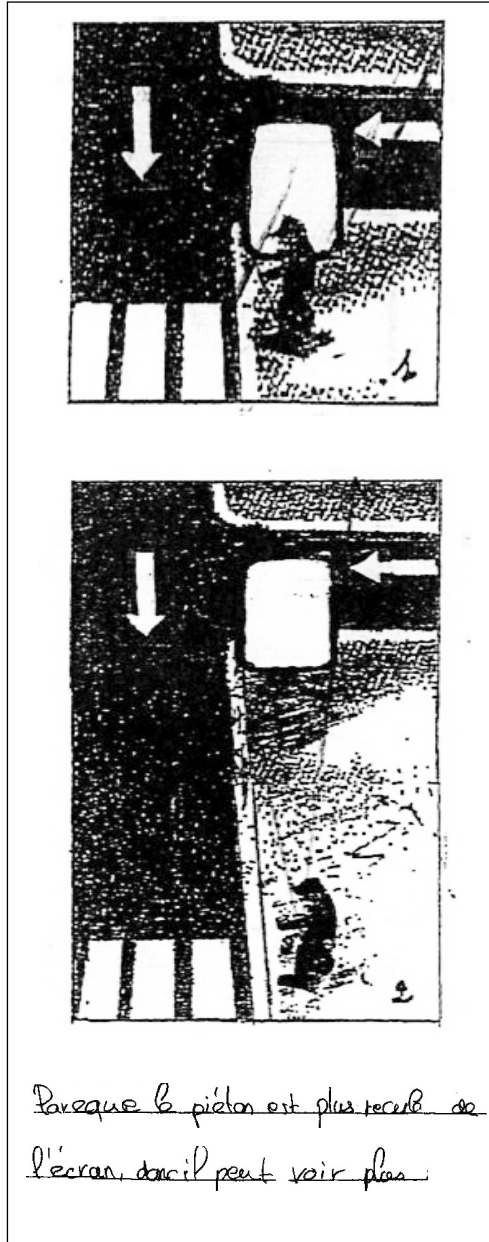
Pour les CM1, 33 élèves sur 47 choisissent le bon schéma, 16 d'entre eux justifiant clairement leur choix.

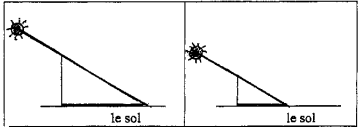
Exercices de transfert

Nous avons présenté aux élèves la description d'une autre situation, qu'ils n'avaient pas étudiée en classe, dans laquelle la grandeur pertinente est l'angle.

On décrit aux élèves une expérience réalisée par des enfants qui souhaitent repérer la position du Soleil dans le ciel. On leur propose les schémas de deux relevés d'ombre réalisés à la même heure avec des bâtons verticaux (gnomons) de tailles différentes. On leur demande ensuite ce qui est différent et ce qui est pareil dans ces schémas, puis on leur propose un schéma incomplet à terminer, avec un bâton de taille encore différente, pour lequel seuls le sol et le bâton sont dessinés.

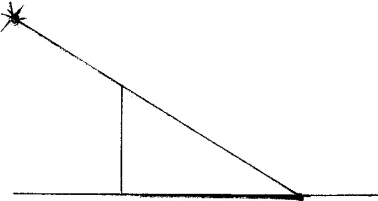
Pour tracer l'ombre sur ce schéma il faut identifier l'égalité des angles entre le sol et les rayons solaires dans les deux premiers schémas, réaliser un gabarit suffisamment grand de cet angle puis le faire coulisser parallèlement au sol sur le dernier schéma pour que le second côté passe par l'extrémité du gnomon. Il s'agit donc d'une tâche très complexe pour des élèves de cet âge. Cette situation a par ailleurs été « réellement » mise en œuvre dans plusieurs autres classes et nous avons mis en évidence les difficultés des élèves à identifier l'égalité des angles dans les premiers schémas, alors même qu'ils avaient eux-mêmes réalisés puis schématisés l'expérience [18].





Qu'est-ce qui est différent ?
les bâton sont différent

Qu'est-ce qui est pareil ?
le angle de l'ombre et du rayon du soleil dessin



Seuls 3 élèves sur 45 au CE2 et 10 sur 48 au CM1 réalisent parfaitement cet exercice, c'est-à-dire remarquent l'égalité des angles entre le rayon de Soleil dessiné et le sol et réalisent un tracé parfait. Cependant 11 élèves sur 45 en CE2 et 11 sur 48 en CM1 réussissent une partie de la tâche, c'est-à-dire remarquent l'égalité des angles mais se trompent dans les tracés ou ne formulent pas l'égalité des angles mais réalisent des tracés parfaits pouvant difficilement être attribués au hasard.

les élèves étaient invités à dessiner un angle sur une feuille A4, à en dessiner un différent puis à identifier des angles dans la figure de Piaget, Inhelder et Szeminska ci-dessous [19], en les coloriant.

4. 2 Résultats des évaluations des psychologues avant et après les séquences

Nous analysons ici les réponses des élèves à trois des questions posées lors des entretiens :

Les réponses ont été catégorisées et les résultats figurent dans les tableaux 1, 2 et 3.

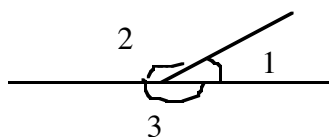


Figure 1


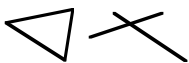

Catégories	Exemples	CE2 (36) bilan initial	CE2 (36) bilan final	CM1 (36) bilan initial	CM1 (36) bilan final
Angle (A)		19	20	15	28
Figure géom. (FG)		9	12	15	6
Ligne (L)		2	3	3	2
Pas de rép. (N)	"je ne sais pas"	6	1	3	0

Tableau 1 : Catégories, exemples de dessins d'élèves et résultats pour la tâche de dessin d'un angle.

Catégories	CE2 (19) bilan initial	CE2 (20) bilan final	CM1 (15) bilan initial	CM1 (28) bilan final
Réponse correcte	7	10	6	14
Dessinent le même angle orienté différemment	8	8	3	8
Autre	3	1	4	4
Pas de réponse	1	1	2	2

Tableau 2 : Catégories et résultats pour la tâche de dessin d'un angle différent.

Si au CE2 on constate peu de différence entre les deux bilans pour ce qui est des tracés corrects, et en particulier une adhésion qui reste forte à la figure géométrique, au CM1 en revanche les progrès sont nettement plus importants.

En ce qui concerne le dessin d'un angle différent nous n'avons pris en compte que les élèves capables de dessiner un angle. Dans les deux niveaux, on constate qu'à l'issue des séquences, malgré un progrès important, particulièrement au CM1, seule la moitié des élèves capables de dessiner un angle est capable d'en dessiner un différent, la plupart des autres dessinant le même angle orienté différemment.

Certains de ces résultats diffèrent de ceux obtenus pour les mêmes tâches lors des évaluations écrites posées par les didacticiens à l'issue des séquences. En effet pour la tâche de production 89 % des élèves de CE2 et 96 % des CM1 parvenaient à dessiner un angle, au lieu de 56 et 78 % ici.

Lorsqu'il s'agit de dessiner un angle différent les pourcentages de réussite diffèrent là encore selon le contexte d'interrogation : parmi

les élèves qui ont réussi à dessiner un angle, 68 % des élèves de CE2 et 58 % des CM1 parviennent à en dessiner un différent lors des évaluations écrites, et 50 % dans les deux niveaux lors des entretiens individuels. La différence est encore plus nette si on se réfère à l'ensemble des élèves. Les élèves capables de dessiner un angle puis un angle différent sont 28 % au CE2 et 39 % au CM1 lors des entretiens, et 60 % et 56 % lors des évaluations écrites. On peut penser que certains élèves ne sont pas encore capables, après enseignement, de mobiliser les connaissances géométriques nouvellement « acquises » hors du contexte scolaire, ce qui montre que le concept d'angle est encore en cours de construction. Il peut aussi s'agir d'une difficulté à s'exprimer lors d'un entretien individuel. Cela incite donc à une certaine prudence lors de l'analyse des diverses évaluations et montre l'intérêt d'un regard croisé didactico-psychologique sur les performances des élèves.

On constate tout de même des similarités malgré les contextes d'interrogation différents : que ce soit lors des évaluations écrites ou lors des entretiens, l'erreur la plus fréquente consiste à dessiner le même angle avec une orientation différente.

Catégories	CE2 (36) bilan initial	CE2 (36) bilan final	CM1 (36) bilan initial	CM1 (36) bilan final
Reconnaissent l'angle 1	9	15	7	8
Reconnaissent les angles 1 et 2	4	8	9	13
Reconnaissent les angles 1, 2 et 3	0	3	0	3
Reconnaissent au moins un angle	13	26	16	24
Pas de rép. ou rép. fausse	23	10	20	12

Tableau 3 : résultats pour la tâche d'identification d'angles dans la figure 1.

Le tableau 3 ci-dessus rassemble les résultats obtenus dans la tâche d'identification des angles dans la figure de Piaget (figure 1).

Ce tableau montre un net progrès dans la tâche d'identification, particulièrement au CE2. Autre fait notable, les pourcentages d'élèves capables d'identifier au moins un angle sont quasiment identiques en CE2 et en CM1 à l'issue des séquences. Par contre les élèves de CM1 parviennent davantage à identifier l'angle obtus.

5. Conclusion

En ce qui concerne l'efficacité globale de la séquence, les résultats des trois premiers exercices de mathématiques ne sont que faiblement inférieurs à ceux de Berthelot et Salin [9] et Close [17] si on néglige les erreurs liées à la précision, bien que les élèves soient plus jeunes d'un ou deux ans, et ils leur sont légèrement supérieurs pour ce qui est des angles rentrants et saillants.

Les deux exercices spécifiques à la situation montrent que la majorité des élèves (environ les deux-tiers) a acquis les connaissances

spatiales et géométriques permettant la maîtrise de la situation à laquelle ils ont été confrontés.

L'épreuve de transfert quant à elle montre des résultats plus faibles mais tout de même encourageants. Certains enfants arrivent à déterminer l'angle comme grandeur pertinente dans une situation complexe qu'ils n'ont jamais rencontrée auparavant. Il semble donc que la confrontation avec une situation spatiale dans laquelle la grandeur angle prend tout son sens conduise à une maîtrise du concept d'angle suffisante pour permettre à certains élèves d'appréhender de nouvelles situations physiques.

Les exercices de production d'un angle, puis d'un angle différent, sont des tâches peu courantes en classe, qui ont été proposées par les psychologues du développement et utilisées dans les deux contextes d'évaluation. Les entretiens individuels avant et après enseignement montrent des progrès pour ces deux tâches, principalement en CM1.

Les résultats obtenus pour ces productions, même s'ils diffèrent selon le contexte d'éva-

luation, montrent qu'il est plus difficile de dessiner un angle, puis un différent, que de comparer des paires d'angles. On peut donc se demander si les exercices de comparaison traditionnellement proposés permettent de tester la conceptualisation de l'angle ou s'ils révèlent une simple acquisition de techniques. En effet les élèves peuvent, grâce à un recours mécanique aux différentes techniques (utilisation de calque, de gabarit ou de la fausse équerre) réussir les tâches de comparaison sans avoir pour autant atteint le niveau de conceptualisation nécessaire pour produire un angle puis un autre différent. Le recours à une technique peut donc masquer des difficultés conceptuelles.

Les tâches de production sont rarement travaillées en classe, or ce travail montre qu'elles sont plus complexes que celles de comparaison et on peut donc conclure qu'elles devraient faire l'objet d'un enseignement.

Pour les tâches concernant la figure de Piaget, les progrès sont à souligner car l'identification d'angles dans des figures est une difficulté mise en évidence par de nombreux travaux.

Ces différents résultats montrent l'acquisition par les élèves d'une bonne représentation de l'angle formé par deux demi-droites. La situation ayant permis de prévenir l'installation des conceptions erronées usuelles pour une grande partie d'entre eux. Ces élèves se sont créés un référent empirique qui leur permet d'invalidier le rôle de la longueur des côtés dans la taille d'un angle, à la fois dans cette situation, mais également dans d'autres situations où elle pourrait se manifester. Cette situation expérimentale, dans l'espace réel, permet donc aux enfants d'acquérir des connaissances en mathématiques d'une part et en physique d'autre part (concept de droi-

te de visée, notion de champ visuel en présence d'un obstacle). Cependant ces résultats sont à nuancer dans la mesure où, pour certains de ces élèves, ces savoirs ne sont encore mobilisables que dans un contexte scolaire, comme le montrent les évaluations réalisées par les psychologues.

Si on confronte maintenant les résultats obtenus au CE2 et au CM1, on constate que, pour la plupart des tâches, les résultats sont du même ordre dans les deux niveaux : pour la comparaison de paires d'angles de même nature, pour les exercices spécifiques de la situation, pour la tâche de dessin d'un angle puis d'un angle différent, enfin pour l'identification des angles dans la figure de Piaget. Les seules différences significatives apparaissent lorsque les tâches nécessitent de la précision, lorsqu'il s'agit d'angles rentrants et lors des exercices de transfert. Ces résultats montrent qu'une première approche du concept d'angle est tout à fait envisageable dès le CE2, ce qui permet d'imaginer une progression pour l'apprentissage de ce concept sur tout le cycle 3. On peut, en CE2, se limiter à des situations dans lesquelles les angles ont des côtés de longueurs variées mais sont nettement différents, de manière à prévenir la conception erronée de l'angle liée à la longueur des côtés. Au CM, ce travail pourra être poursuivi avec davantage d'exigence en ce qui concerne la précision des tracés et des comparaisons et avec l'introduction des angles rentrants. Nous avons vu que l'utilisation d'une situation de physique dans l'espace sensible était pertinente. On peut donc proposer aux élèves, à chaque niveau, des séquences qui les confrontent à des activités de modélisation de l'espace sensible dans lesquelles la grandeur « angle » est la grandeur pertinente. L'utilisation de contextes différents devrait ainsi permettre d'avancer dans la construction du concept d'angle.

Bibliographie

- [1] BERTHELOT René et SALIN Marie-Hélène, 1993-94, « L'enseignement de la géométrie à l'école », *Grand N*, n°53.
- [2] BERTHELOT René et SALIN Marie-Hélène, 1999-2000, « L'enseignement de l'espace à l'école », *Grand N*, n°65.
- [3] GOBERT Sophie, 2001, *Questions de didactique liées aux rapports entre la géométrie et l'espace sensible, dans le cadre de l'enseignement à l'école élémentaire*, thèse de doctorat, Université Paris 7.
- [4] MUNIER Valérie et MERLE Hélène, « Une approche expérimentale du concept d'angle à l'école élémentaire à travers la notion de champ visuel », à paraître dans les actes du Colloque International sur l'Enseignement des Sciences - Expérimentation et construction des concepts (Charleville-Mézières, 12, 13 et 14 mai 2003).
- [5] MUNIER Valérie et MERLE Hélène, 2004, « De l'utilisation d'un instrument à la maîtrise des concepts en jeu : l'exemple de la boussole à l'école élémentaire », in : A. Giordan, J.-L. Martinand et D. Raichvarg (coord.), actes des XXVes JIES, (Chamonix, 30 novembre-4 décembre 2003).
- [6] MUNIER Valérie et MERLE Hélène, « Une approche interdisciplinaire mathématiques - physique du concept d'angle à l'école élémentaire », en cours de révision pour *RDM*.
- [7] CHEVALLARD Yves et JULLIEN M, 1990-1991, « Autour de l'enseignement de la géométrie au collège », *Petit x*, n°27.
- [8] BALACHEFF Nicolas, 1988, *Une étude des processus de preuve en mathématique chez les élèves de collège*, thèse d'état, Université Grenoble 1, pp. 395-464.
- [9] BERTHELOT René et SALIN Marie-Hélène, 1994-95, « Un processus d'enseignement des angles au cycle III », *Grand N*, n°56.
- [10] MITCHELMORE Mickaël et WHITE Paul, 1998, « Development of Angle Concepts: A Framework for Research. » *Mathematics Education Research Journal*, 10, 3, pp. 4-27.
- [11] CHARALAMBOS L., 1997, "A few remarks regarding the teaching of geometry, through a theoretical analysis of the geometrical figure." *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, 30 (4) pp. 2087-2095.
- [12] VADCARD Lucile, 2002, « Conceptions de l'angle chez des élèves de seconde. » *Recherche en didactique des mathématiques*. 22 (1) pp.77-119.
- [13] CROISILLE G. (1939), Nouveau cours. Arithmétique. Système métrique. Géométrie. Cours Moyen. Paris : Librairies-Imprimeries réunies.

- [14] DOUEK Nadia, 1998, "Analysis of a long term construction of the angle concept in the field of experience of sunshadows", *Proceedings psychology mathematics education of PME-XXII*, 2, pp. 264-271.
- [15] GUESNE Edith, 1984, « Children's ideas about light / les conceptions des enfants sur la lumière », *New Trends in Physics Teaching*, Vol IV UNESCO, Paris, pp. 179-192.
- [16] MERLE Hélène, 1999, « Difficultés dans la conceptualisation du mouvement de rotation de la terre sur elle-même », *Didaskalia*, n°14, pp. 61-94.
- [17] CLOSE G.S. (1982), *Children's understanding of angle at primary/secondary transfert age*. Londres. Master of science. Polytechnic of the South Bank.
- [18] MERLE Hélène et MUNIER Valérie, 2003, « Comment conceptualiser la hauteur du Soleil en tant qu'angle au cycle 3 ? », *Aster*, n° 36.
- [19] PIAGET Jean, INHELDER Barbel et SZEMINSKA Aline, 1948, *La géométrie spontanée de l'enfant*, Paris, PUF.