L'HERITAGE DE POINCARE : DE L'ETHER A LA MODELISATION

Michel MIZONY
Irem de Lyon

Or je soutiens que dans toute théorie particulière de la nature il n'y a de science proprement dite qu'autant qu'il s'y trouve de mathématique.

E. Kant

1. — Introduction

Le but de cette réflexion est de mettre en évidence des difficultés entre mathématiciens et physiciens, entre mathématiques et autres disciplines ; la diffculté essentielle soulevée étant de nature plutôt épistémologique. Pour cela nous nous appuierons sur la pertinence des vues de Henri Poincaré et nous donnerons un schéma de modélisation.

Dans le système éducatif français, un certain nombre de réformes ont vu le jour et se mettent en place progressivement, révélant une montée de l'interdisciplinarité. Par exemple les TIPE dans les classes préparatoires, les TPE dans les lycées, les "itinéraires de découverte" dans les collèges.

Parallèlement nous devons pointer d'autres évolutions, d'une part un changement dans les épreuves de mathématiques de l'Agrégation, en particulier l'apparition d'une épreuve de "modélisation", d'autre part, depuis quelques années, un effort de vulgarisation (ou de promotion de la culture scientifique et technique) qui se traduit, par exemple, par des "semaines de la science" auprès du public.

Malheureusement, au gré de réformes récentes (suppression des TPE dans les classes terminales, changement dans les épreuves de l'agrégation de mathématiques), on assiste maintenant à un certain recul.

Il existe une nombreuse littérature concernant la modélisation mathématique, en particulier un dossier du Comité Scientifique des IREM présenté par J.P Raoult et celui de la CREM (Commission de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques). Dans la littérature les mots "relation", "lien", "interaction", "articulation" entre maths et autres disciplines apparaissent souvent et le mot "modélisation" y est rarement défini clairement.

La nécessité d'une approche épistémologique sur ces rapports entre mathématiques et autres sciences sera le but essentiel de ce texte. C'est le point sur lequel je voudrais insister car comment peut-on pratiquer un enseignement pluridisciplinaire sans avoir une certaine connaissance des difficultés qui émergent de ces rapports ?

Partons pour cela de deux exemples, celui de la radioactivité et celui de la relativité. A travers ces deux exemples examinons la question épistémologique : comment se manifeste cette relation, ce lien, cette interaction, cette articulation entre maths et autres disciplines, ce rôle des maths dans les autres sciences ?

Dans son magnifique livre "La science et l'hypothèse" (1902), Poincaré donne sa position : "Les théories mathématiques n'ont pas pour objet de nous révéler la véritable nature des choses ; ce serait là une prétention déraisonnable. Leur but unique est de coordonner les lois physiques que l'expérience nous fait connaître, mais que sans le secours des mathématiques nous ne pourrions même énoncer. Et il ajoute immédiatement après : Peu nous importe que l'éther existe réellement, c'est l'affaire des métaphysiciens ; l'essentiel pour nous c'est que tout se passe comme s'il existait et que cette hypothèse est commode pour l'explication des phénomènes. Après tout, avons-nous d'autre raison de croire à l'existence des objets matériels ? Ce n'est là aussi qu'une hypothèse commode ; seulement elle ne cessera jamais de l'être, tandis qu'un jour viendra sans doute où l'éther sera rejeté comme inutile."

Si la première phrase est facile à comprendre, la suivante exige une actualisation, d'autant plus nécessaire que le mot "éther" est un concept qui permet de comprendre en profondeur le lien entre l'espace mathématique utilisé pour étudier un domaine de la physique et ce domaine phénoménal. Pour être plus précis, un éther est la réification (la chosification) d'un espace mathématique utilisé pour étudier un domaine phénoménal. Et s'il y a unicité d'un domaine phénoménal, il y a multiplicité des espaces mathématiques pouvant exprimer un domaine de la physique (c'est ce que Poincaré nomme le pluralisme théorique), et donc multiplicité d'éthers possibles si l'on chosifie ces espaces mathématiques.

Prenons l'espace mathématique $\mathbf{R}^4$ utilisé dans l'expression usuelle de la relativité restreinte : dire que cet espace mathématique est l'espace-temps de la relativité restreinte, c'est effectivement l'utiliser comme un éther : "l'éther géométrique". Or on peut exprimer la relativité restreinte au moyen d'espaces mathématiques différents, comme nous le verrons. L'espacetemps, dit de Minkowski, a été réifié dans la formulation d'Einstein pour devenir un "éther géométrique" ; éther pratique certes mais éther.

Pour Poincaré, l'espace de Minkowski est avant tout un espace mathématique qui permet d'exprimer des concepts et des lois, point n'est nécessaire de le transformer en éther. Et cela Einstein le savait, comme il le dit en 1920 dans un article intitulé "Ether and the Theory of Relativity" et dans lequel il nomme un paragraphe : *More careful reflection teaches us, however, that the special theory of relati-*

vity does not compel us to deny ether. (i.e. Une réflexion plus profonde nous apprend, cependant que la théorie de la relativité restreinte ne nous permet pas de nier le concept d'éther).

L'exemple de l'émission radioactive (enseignée dans le secondaire) et celui de l'équivalence entre différentes formulation de la relativité einsteinienne (qui relève de l'enseignement supérieur) vont donc servir de fil conducteur pour préciser ce qu'est une modélisation et donc examiner cette articulation entre un "domaine phénoménal" d'une discipline scientifique et le domaine mathématique mis en jeu ; le schéma proposé ayant pour but de synthétiser (visualiser) des dires épistémologiques pertinents de Kant, Poincaré et Granger. L'éclaircissement de ce *rôle* des maths dans les autres sciences permettra en outre un éclairage sur le Vème axiome d'Euclide, comme le présente G.G. Granger :

> *"Dans le cas de l'axiome des parallèles, on se trouve, comme on l'a vu, en présence de plusieurs déterminations d'un objet géométrique dont la consistance est garantie. L'application à l'empirie de ces diverses variantes de l'objet virtuel résultant du choix est possible, comme l'ont montré les développements postérieurs de la physique. Il s'agit donc alors de conventions, dont il faut juger non de la vérité mais du contenu de leurs applications."*

2. — La radioactivité et la fonction exponentielle

Le physicien Jacques Treiner aime présenter cet exemple de l'enseignement de la radioactivité et des modèles mathématiques mis en jeux pour montrer des relations entre les deux disciplines.

2.1 *Présentation rapide des modèles*

Au départ un principe s'appuyant sur des faits expérimentaux : La quantité d'émission radioactive est proportionnelle à la quantité de matière radioactive, ce qui s'écrit plus précisément :

$$\Delta N = -\lambda N \Delta t \,, \qquad (1)$$

où N est le nombre de nucléons, ΔN le nombre de désintégration dans le laps de temps Δt et λ une constante (ne dépendant pas du temps) qui caractérise le type d'atome radioactif.

Nous avons deux modélisations, l'une continue (via une équation différentielle), l'autre discrète (via des variables aléatoires).

a) Dans la modélisation continue, il est a priori admis que Δt est aussi petit que l'on veut et donc est remplacé par l'élément différentiel dt ce qui conduit à l'équation différentielle $N'(t) = -\lambda N(t)$ et donc à la solution de décroissance exponentielle :

$$N(t) = N_0 \exp(-\lambda t)\,. \qquad (2)$$

b) Dans la modélisation discrète, à chaque nucléon k (k variant de 1 à N_0), est associé une variable aléatoire X_k qui représente la durée de vie de ce nucléon. Ces variables aléatoires sont supposées admettre trois propriétés : une même loi de distribution (la loi binomiale), une mutuelle indépendance et une probabilité de désintégration entre $[t, t + s]$ indépendante de t .

Soit maintenant $F(t)$ la probabilité qu'un nucléon se désintègre dans le laps de temps $[0, t]$; si l'on considère l'intervalle $[t, t + s]$, la dernière propriété permet de calculer cette fonction $F(t)$ de deux manières, et donc celle-ci va vérifier :

$$F(t + s) - F(t) = (1 - F(t))F(s) .$$

La résolution de cette équation fonctionnelle aboutit à :

$$F(t) = 1 - exp(- \alpha t), \text{ où } \alpha = F'(0) .$$

En effet en prenant $s = 0$ on a $F(0) = 0$, puis on divise les deux membres par s, d'où l'équation différentielle $F'(t) = (1 - F(t))F'(0)$ évidente à résoudre.

Il reste à retraduire ce résultat mathématique qui s'interprète de la manière suivante : Soit $N(t)$ le nombre moyen de nucléons restants au temps t, alors $N(t) = N_0 \exp(- \alpha t)$, et on retrouve ainsi la loi empirique, et en prenant $\alpha = \lambda$, on retrouve le résultat (2) de la modélisation continue.

Nous avons ainsi brièvement décrit deux modélisations conceptuellement différentes et pourtant empiriquement et mathématiquement équivalentes (via la loi des grands nombres). Il apparaît aussi des problèmes de traduction. Dans la première modélisation le principe physique (la quantité d'émission radioactive est proportionnelle à la quantité de matière radioactive) est traduit en prenant une fonction continue et dérivable sur **R**, dans la modélisation discrète, c'est au contraire le théorème sur la probabilité $F(t)$ qui va être traduit en la loi (physique) de décroissance exponentielle. Chacun de ces actes de traduction n'est pas trivial.

2.2. *Questionnement épistémologique*

Dans cette courte présentation de l'émission radioactive qui aboutit à la loi de décroissance exponentielle, nous avons donc deux modélisations qui rendent compte d'un "domaine phénoménal". Examinons la structure de ces modélisations. En effet il apparaît plusieurs éléments.

a) Au départ un principe physique : la quantité d'émission radioactive est proportionnelle à la quantité de matière radioactive qui conduit à une loi, permettant de prédire : la loi de décroissance exponentielle ; le principe permet ainsi au physicien d'associer à chaque type de nucléon une constante l .

b) L'obtention de cette constante se fait via l'utilisation de mathématiques. Pour cela il est choisi, a priori, un domaine des mathématiques, dans le premier cas l'analyse réelle, dans le deuxième cas la théorie des probabilités. Evidemment le choix a priori n'est pas fait au hasard, il est validé par la nécessité de trouver un théorème qui puisse s'interpréter par la loi de décroissance exponentielle.

c) Une fois ce choix fait, le principe physique, énoncé en langage courant, est traduit en un objet mathématique : dans le cas "continu" une équation différentielle, dans le cas "discret" une famille de variables aléatoires vérifiant quelques propriétés (indépendance, loi binomiale, ...). Il y a une opération de traduction dans ce passage du langage courant à un langage formel qui n'est pas évident ou pas toujours clair ; par exemple le nombre entier fini $N(t)$ de nucléons à l'instant t, qui, a priori, est une application des réels dans les entiers, devient de fait une fonction continue de **R** dans **R**, notée également $N(t)$, et qui de plus est dérivable !

d) On a alors la partie purement mathématique qui consiste en la preuve d'un résultat (mathématique), un théorème est établi ;

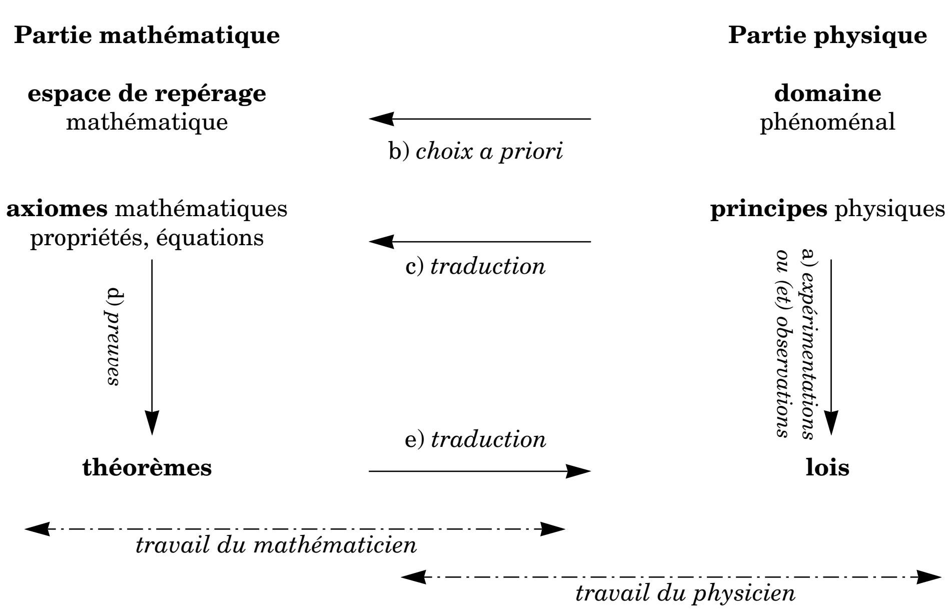
dans le premier cas, la résolution d'une équation différentielle, dans le deuxième cas, la résolution d'une équation fonctionnelle.

e) Enfin, on a la dernière étape qui consiste en la traduction d'un théorème, écrit dans le langage formel des mathématiques, en une loi physique, une formule, mettant en évidence des paramètres, ici le paramètre λ . Cette étape de traduction-interprétation ne va pas forcément de soi, comme on l'a déjà souligné dans le cadre de la modélisation discrète.

Nous résumerons ces cinq éléments ou étapes, mis en évidence dans cet exemple, à l'aide du schéma théorique ci-dessous mettant sous forme de flèches les étapes a), b), c), d) et e) :

La question épistémologique qui est mise en évidence provient des flèches horizontales. En effet, si les flèches a) et d) sont claires, l'une relevant de la physique et l'autre des mathématiques, les flèches b), c) et e) relèvent à la fois d'un travail de physicien et de celui d'un mathématicien et il est évident aussi que le physicien est intéressé par la flèche d) et le mathématicien par la flèche a). C'est là le nœud des relations entre maths et physique dans le cadre de l'élaboration d'une théorie principalement, mais aussi dans le cadre de la transmission d'un savoir dans la mesure où il y a choix et traduction donc toutes les possibilités de non-sens, contresens, fautes d'orthographe ou de syntaxe, faux amis, etc. Il est important de souligner que ces flèches horizontales ne relèvent pas d'une discipline, mais bien des deux.

Modélisation d'une théorie physique



De fait la question épistémologique peut s'énoncer en disant :

Qu'est-ce une modélisation ?

Chaque scientifique a une idée de ce qu'est une modélisation. Mais cette notion est-elle bien "formalisée" ? Il me semble que l'on se trouve dans une situation comparable à celle des mathématiciens du XIXème siècle à propos de la notion de fonction ; chacun savait ce qu'était pour lui une fonction (et faisait de belles mathématiques), mais aucun ne pouvait en donner une définition "universelle".

Ce schéma que je propose se situe dans la lignée de travaux de E. Kant (avec le choix a priori d'un espace de représentation d'un domaine de l'expérience) et de H. Poincaré (avec le pluralisme théorique qu'il a introduit), travaux bien actualisés par G. G. Granger. Il s'applique également dans les relations entre les maths et toutes les disciplines qui utilisent une modélisation mathématique, comme la biologie, la chimie, la mécanique, l'astronomie, l'économ(étr)ie, ..., la physique bien sûr et même les statistiques (on peut penser à l'aiguille de Buffon et au paradoxe de Bertrand qui n'a plus rien d'un paradoxe une fois posé ce schéma).

Une caractéristique fondamentale de ce schéma est de mettre en évidence, me semble-t-il, la complémentarité structurelle entre mathématique et physique. Je préfère appeler compagnonnage cette complémentarité.

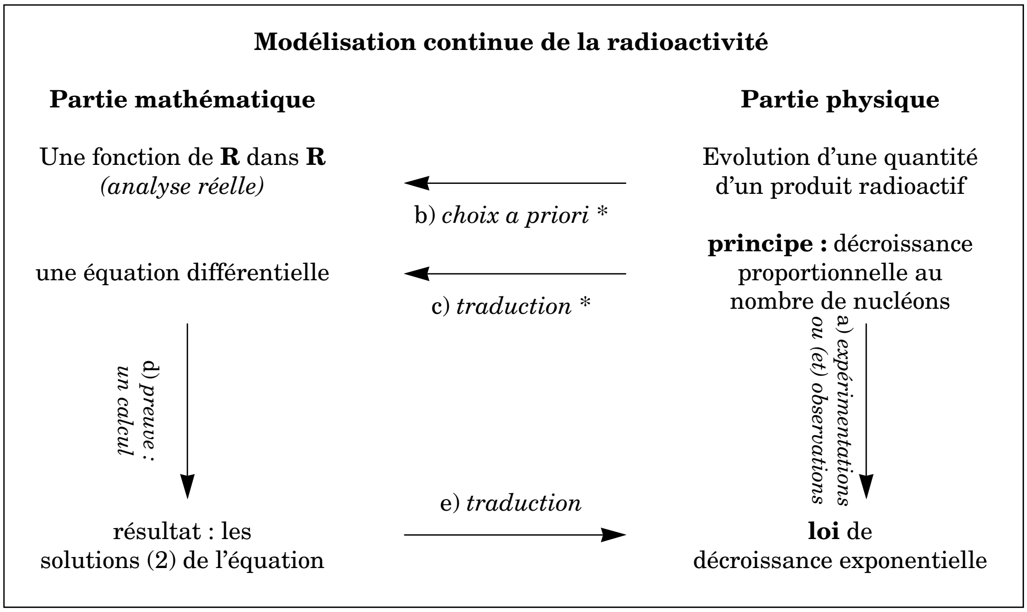
Revenons à notre problème d'émission radioactive, en schématisant les deux modélisations présentées sur la page ci-contre. A travers ces deux schémas de modélisations il apparaît les points sensibles (notés par une *) qui ne sont pas au même endroit, en particulier pour les flèches de traduction.

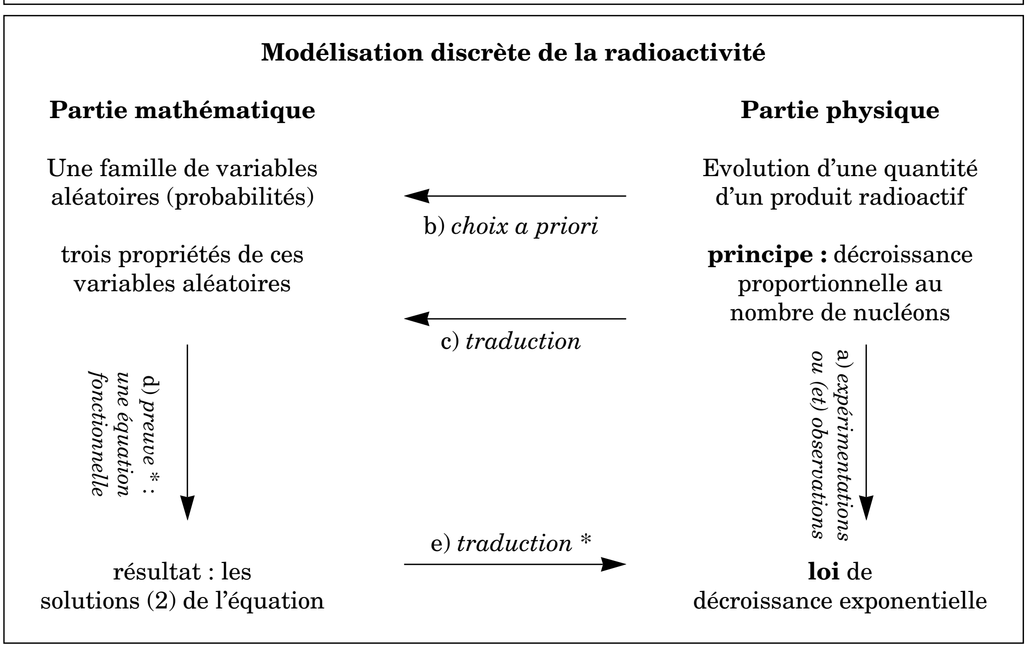
Il est important de revenir sur le fait qu'on a deux modélisations qui posent chacune des problèmes ; mais elles s'éclairent l'une l'autre et se confortent. Ceci est un phénomène très général qui se comprend bien dans le cadre du pluralisme théorique sur lequel nous reviendrons.

Passons maintenant au problème épistémologique de fond : Comment pourra-t-on dire qu'une modélisation est correcte, juste, valide, appropriée, judicieuse, pertinente ... ? Il faut en premier qu'il n'y ait pas de problème dans les flèches verticales, en clair pas d'erreur mathématique dans la flèche preuves et pas d'observation ou expérience invalidant la flèche principes-lois (principe de Popper). Il faut également qu'il n'y ait pas de contresens ou de faux sens dans les flèches de traductions. Mais est-ce suffsant ?

Par exemple dans notre modélisation continue de l'émission radioactive, le nombre (fini) de nucléons au temps t est traduit par une fonction continue et implicitement *dérivable*. Dans beaucoup de modélisations il y a des implicites, souvent des propriétés admises dans la partie mathématique et qui ne proviennent d'aucun principe physique. La collaboration entre le mathématicien et le physicien est alors essentielle pour débusquer ces implicites et pour éventuellement les légitimer si c'est possible.

En bref la validation d'une modélisation passe par la validation de *traductions*, et nos collègues linguistes en connaissent les difficultés, que nous, scientifiques, ne devons pas sous-estimer.


Modélisation continue de la radioactivité
Partie mathématique
Partie physique
Une fonction de **R** dans **R**
(analyse réelle)
Evolution d'une quantité d'un produit radioactif
b) *choix a priori **
une équation différentielle
principe : décroissance proportionnelle au nombre de nucléons
c) *traduction **
d) *preuve : un calcul*
a) *expérimentations ou (et) observations*
e) *traduction*
résultat : les solutions (2) de l'équation
loi de décroissance exponentielle


Modélisation discrète de la radioactivité
Partie mathématique
Partie physique
Une famille de variables aléatoires (probabilités)
Evolution d'une quantité d'un produit radioactif
b) *choix a priori*
trois propriétés de ces variables aléatoires
principe : décroissance proportionnelle au nombre de nucléons
c) *traduction*
d) *preuve * : une équation fonctionnelle*
a) *expérimentations ou (et) observations*
e) *traduction **
résultat : les solutions (2) de l'équation
loi de décroissance exponentielle

Enfin il y a la flèche de choix a priori de l'espace de représentation du domaine phénoménal dont la modélisation veut rendre compte. C'est un autre problème épistémologique que celui de la validité. En effet dès que l'on a une modélisation (valide) alors il en existe automatiquement des tas d'autres possibles, par simple transport de structures mathématiques. Elles peuvent s'avérer nettement moins commodes car amenant des preuves diffciles, mais permettre une flèche de traduction moins délicate. Par exemple pour la modélisation continue de l'émission radioactive on peut remplacer **R** par les réels non standards **R***, c'est un autre choix a priori qui conduira à une modélisation équivalente, avec des calculs plus délicats dus au fait que nous n'y sommes pas habitués, mais par contre avec un statut de l'élément différentiel dt conceptuellement plus proche du Δt du physicien. Ainsi cette modélisation "continue non standard" va conforter les deux autres.

C'est un point important de signaler l'existence de modélisations conceptuellement différentes et pourtant équivalentes.

Peux-t-on aller plus loin ? dans cet exemple des deux modélisations, conceptuellement différentes, de l'émission radioactive, peut-on prouver l'équivalence mathématique de celles-ci ? OUI, je le pense, mais à ma connaissance c'est un problème ouvert. Certes le théorème mathématique de "la loi des grands nombres", et sa traduction expérimentale via "la loi des fréquences cumulées" permettent de comprendre pourquoi ces deux approches ne sont non seulement pas contradictoires mais encore s'éclairent l'une l'autre. Mais l'"équivalence mathématique" reste à établir, à ma connaissance.

Voici comment procéder, heuristiquement parlant. Nous avons déjà dit qu'aucun principe physique ne permettait d'affirmer que la fonction continue $N(t)$ soit différentiable (dans le cadre de la modélisation continue). Supposons maintenant que $N(t)$ ne soit différentiable en aucun point (c'est donc un fractal par définition) ; cherchons les solutions fractales de l'équation différentielle $N'(t) = -\lambda N(t)$. Ce problème n'est pas incongru dans la mesure où il suffit de donner un sens mathématique au concept de "dérivée" d'une fonction différentiable nulle part, cela existe mais dépasse notre propos, et l'on sait que le mouvement brownien (c'est un fractal) est "solution de l'équation différentielle y" = 0".

Conséquences didactiques : Tous ces problèmes épistémologiques ne vont pas sans poser des questions de nature didactique ; même si ce n'est pas notre propos principal, nous pouvons cependant essayer de poser des questions de nature didactique. Si on se limite uniquement aux deux flèches verticales, celles qui posent le moins de problèmes, il y a déjà une question qui se pose : peut-on saisir le lien entre maths et physique (sur l'émission radioactive) sans connaître déjà un des deux aspects, soit la flèche verticale sur la partie mathématique (la fonction exponentielle) soit la flèche physique (la compréhension du phénomène radioactif) ? Comment signaler l'aspect conventionnel du choix a priori de l'espace mathématique associé au domaine phénoménal considéré, tel est la deuxième question, délicate, mais qui s'impose du fait des deux modélisations proposées du phénomène de la décroissance radioactive. Faut-il le faire au lycée et dans quel but ? Enfin sur les flèches de traductions, comment, par exemple, peut-on justifier le recours à une fonction continue (et même dérivable) pour exprimer une quantité discontinue de nucléons ? Le recours au traditionnel “parce-que-ça-marche” me semble inévitable et ... un peu court.

2.3. *Autres exemples “élémentaires” de modélisations*

L'astrolabe, la modélisation d'un instrument de mesure.

Quid concernant la modélisation d'un instrument de mesure (l'astrolabe, le sextant, l'horloge solaire, ou ... un ampèremètre, un calorimètre, pourquoi pas une chambre à bulles ou un radiotélescope) ? Le schéma de modélisation pour construire ou pour utiliser (en comprenant le fonctionnement) un appareil de mesure est le même, avec une nuance pour la flèche “observations”. Voici, ci-dessous, le schéma pour un instrument de mesure (ici l'astrolabe)... Dans cet exemple, il n'y a pas de difficulté particulière. Cet instrument peut faire un sujet de TPE ; pour avoir une description précise et de l'instrument et de son fonctionnement, on pourra se reporter au site :

http ://www.ens-lyon.fr/
RELIE/Cadrans/culture/musee/
HorlogesAstro/Cathedrale.htm.

Si l'on veut faire un TPE à dominante mathématique, voir :

http ://www.ens-lyon.fr/RELIE/Cadrans/
activpedago/cours/TexteAstrolabe.htm.

Par ailleurs ce site :

www.ens-lyon.fr/RELIE/Cadrans/

Modélisation de l'astrolabe

Partie mathématique		**Partie physique**
$\mathbf{R}^3$ euclidien	← b) *choix a priori*	L'espace-temps newtonien
l'axiomatique : géométrie de l'espace pour effectuer des projections planes	← c) *traduction*	principe : se repérer à l'aide d'un instrument plat en observant le ciel
↓ d) *preuves*		↓ a) mesures tests (construction) *mesures (utilisation)*
les théorèmes : 1— sur les projections conservant les angles 2 — sur les projections de cercles particuliers	e) *traduction* →	**loi** sur la lecture et le sens des graduations de l'astrolabe

fourmille d'activités pédagogiques pour le primaire et de "cours" pour le secondaire.

L'équation logistique.

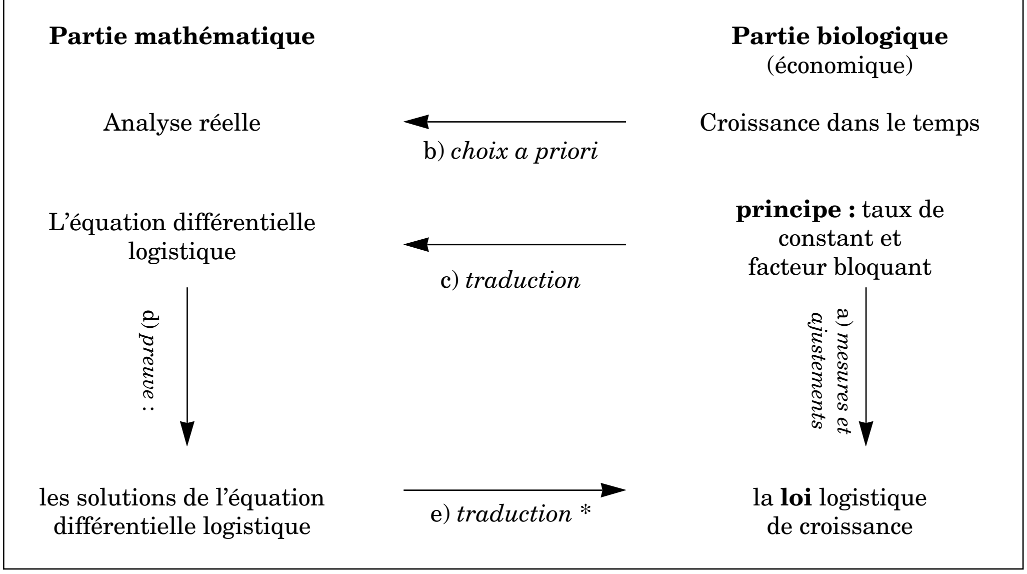
Cette équation est introduite comme exemple de base de modélisation en dynamique d'une population biologique ou économique ; elle constitue une première étape pour l'étude des systèmes dynamiques. Soit N le niveau d'une population ($N = N(t)$). L'équation logistique est $N' = (a/N_0)N(b - N)$ dont la solution, qui vaut N_0 au moment $t = 0$, est $N(t) = b/(1 + \lambda exp(-\mu t))$, où $\lambda = (b - N_0)/N_0$ est un facteur d'échelle, et $\mu = ab/N_0$ est le taux de croissance du phénomène.

Dans ce cadre la croissance $c(N)$ du phénomène est modélisée par $c(N) = a(b - N)$, pour traduire un facteur bloquant b à cette croissance, b représente un maximum pour cette population (maximum atteint par $N(t)$ lorsque t tend vers l'infini). Evidemment il existe d'autres modélisations de la croissance "naturelle" d'une population.

Si les flèches "preuve" et "thème" (la flèche e)) ne posent aucun problème, la flèche c) "version" est à définir en fonction de chaque population en tenant compte de la flèche a) "observations", en remplaçant l'équation logistique par une équation plus élaborée.

En effet les paramètres de la loi sont des grandeurs ajustables (pour coller au mieux aux observations) et non pas associées à des grandeurs mesurables (au sens physique du terme).

Modélisation de la croissance d'une population



Tirages au sort
et "la loi des grands nombres".

Il s'agit ici de la modélisation du hasard ; prenons le problème suivant posé à Lyon à l'occasion de l'exposition "An 2000, 5000 ans de mathématiques " : le problème du jour anniversaire. Une simulation interactive est proposée ensuite sur ordinateur qui met en évidence le résultat suivant : on tire au hasard un jour de l'année (un jour anniversaire) ; si on prend 23 personnes au hasard il y a une chance sur deux pour que deux personnes aient la même date anniversaire.

Pour comprendre ce résultat Il s'agit bien de modéliser la simulation du hasard. On a le schéma (simplifié) ci-dessous.

Quant à la validation par simulation, elle fonctionne bien ; cf. le cédérom *Fragments d'une exposition mathématique* disponible à l'Irem de Lyon. La technique des sondages relève du même type de modélisation.

La modélisation fonctionne à merveille dès que l'on a associé le bon espace probabilisé au type de tirage expérimenté ! Et chacun sait combien il n'est pas toujours évident de trouver le bon espace d'événements pour étudier un tirage au hasard (i.e. la difficulté réside dans la flèche ¨). Par ailleurs une réflexion sur le "Paradoxe de Bertrand" (On trace au hasard une corde dans un cercle. Quelle est la probabilité pour qu'elle soit plus petite que le côté du triangle équilatéral inscrit ? proposer des protocoles d'expérimentation ; cf. le cédérom *Fragments d'une exposition mathématique*), une réflexion sur l'aiguille de Buffon (cf. P. Eymard et J.-P. Lafon, p. 29), posent d'autres problèmes en particulier celui de l'existence de modélisations très différentes.

Quelques Remarques : (à vous d'en ajouter d'autres)

— Seul un travail pluridisciplinaire (par exemple entre mathématiciens et physiciens) peut valider un programme de modélisation.

— Il existe une dissymétrie ; le matheux pourra regarder trois flèches, la flèche verticale "preuves", la flèche de traduction ¨ "version" et la flèche de traduction Æ "thème" ; alors que le physicien (chimiste, biologiste, économiste, ...) examinera les flèches expérimentations (verticale), et de traductions "thème" et ! "version". Evidemment le mathématicien essaiera de comprendre la flèche "expérimentations", et le physicien la flèche "preuves". C'est en examinant des problèmes liés aux théories de la gravitation, à l'aide de

$$\begin{tikzcd}
\text{Théorie des probabilités} \arrow[d] & & \text{principe : tirages au hasard (statistiques)} \arrow[ll, "\textit{traduction}"'] \arrow[d] \\
\text{théorème central limite, loi des grands nombres} \arrow[rr, "\textit{traduction}"'] & & \textbf{loi}\text{ de stabilisation des fréquences}
\end{tikzcd}$$

ce schéma, que je me suis aperçu que les difficultés se situaient principalement au niveau des flèches de traductions (non-sens, contresens, faux amis, hypothèses ad hoc, ...).

— Dans toute modélisation il y a des traductions, sources d'erreurs et d'incompréhension entre les partenaires de la pluridisciplinarité mise en jeu.

— Il y a toujours pluralité de modélisations (conceptuellement différentes, mais mathématiquement et observationnellement équivalentes) d'un même domaine phénoménal.

3. — Plusieurs modélisations équivalentes de la relativité restreinte d'Einstein

Dans l'établissement de la relativité restreinte, Einstein a fait le choix en 1905 de prendre pour espace mathématique l'espace $\mathbf{R}^4$, muni de la métrique dite de Minkowski. L'éther que l'on peut associer à cet espace comme support de l'intuition est cet "éther géométrique".

On peut obtenir une modélisation équivalente à la relativité restreinte que l'on pourra appeler relativité Lagrangienne, par un simple jeu d'écriture en prenant l'espace topologique $\mathbf{R}^4$ sur lequel vit le lagrangien

$$L = c^2\, t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 .$$

Ce lagrangien est invariant par les transformations de Lorentz et plus généralement par le groupe de ... Poincaré. Les trajectoires des éléments d'épreuves sont elles données par les équations d'Euler-Lagrange, concept central dans cette modélisation. Il n'y a plus de métrique, plus de géodésiques. Penser ce jeu d'écriture permet de mettre l'éther géométrique à sa bonne place, celle de support de l'intuition. Dans cette "relativité lagrangienne", comment peut-on caractériser l'éther associé ? L'éther peut être pensé comme l'ensemble des trajectoires ! (il peut être pensé aussi comme l'espace topologique $\mathbf{R}^4$ suivant ce qui est le plus commode, à un moment donné pour un chercheur donné, comme support de l'intuition).

Donnons une autre modélisation en pensant à Leibniz (et à ses monades). Pour cela notons $\mathbf{R}^*$ le corps des réels non standards ; prenons l'espace mathématique $(\mathbf{R}^*)^4$, puis le lagrangien L^* associé à L et le groupe de Poincaré non standard. Je prends alors les équations différentielles non standard (intuitivement des équations aux différences) associées aux équations d'Euler-Lagrange usuelles. Je peux alors réifier le tout et j'ai donc un "éther relativiste de Leibniz" $(\mathbf{R}^*)^4$ dont chaque point est entouré par sa monade d'infiniment petits. Cette modélisation est, par construction, strictement équivalente aux précédentes, en particulier à la relativité restreinte usuelle avec son "éther géométrique" d'Einstein. Cet "éther de Leibniz" est complètement différent de l'éther d'Einstein ; son intérêt est de fournir un support intuitif intéressant car tout point est accompagné de sa monade (monade quantique ? pourquoi pas, une piste parmi tant d'autres !).

Pour le théoricien dont l'intuition est basée sur les mesures et les tests, il pourra faire un autre choix de modélisation parfaitement équivalente et ensuite associer un éther à ce choix. Partons du fait que les constantes de la physique sont connues avec 10 chiffres significatifs (on pourrait prendre 15 ou 50 chiffres significatifs, cela ne changera rien sur le fond). Il prend alors l'espace mathématique D_{10} formé des décimaux à au plus 10 chiffres significatifs, puis prend $(D_{10})^4$, qu'il considère mathématiquement comme plongé dans l'espace de Minkowski. Le tour est joué, il a réalisé une modélisation équivalente de la relativité restreinte, mais à la grosse différence près, son "éther décimal" est discret (et laisse de la place au quantique).

Nous voilà donc avec quatre éthers différents qui concernent la relativité restreinte (il y en a d'autres, une infinité comme dirait Poincaré en parlant des explications mécanistiques). Pourra-t-on les discriminer via l'expérimentation, juge ultime d'une théorie ? Non suivant Poincaré car on n'a accès qu'aux positions relatives de corps. Non pour moi car différencier deux éthers, c'est différencier les deux espaces mathématiques associés ; or quelle mesure va permettre de différencier $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^*$, D_{10} , ... ?

On ne peut pas passer sous silence une autre réalisation de la relativité restreinte, utilisant la géométrie de Lobachevski, mise au point par le croate Vladimir Varicak vers 1910 et bien présentée par Louis Rougier qui souligne au passage l'importance des points de vue de H. Poincaré. Dans l'éther sous-jacent dont la partie espace est courbe, il n'y a pas de contraction des corps, mais pour Louis Rougier la question n'a pas de sens, plus précisément il dit : « A quoi tient cette convenance de la géométrie non-euclidienne à la physique de la relativité ? M. Varicak semble l'interpréter par une anisotropie géométrique de l'espace, qui rendrait compte en particulier, de la contraction de Lorentz. Mais l'espace est un continuum amorphe ; il est dénué par lui-même d'efficace et de forme, et seuls les corps qui y sont plongés, ou le réseau de lignes et de surfaces qu'on convient d'y tracer, lui en donnent une par métaphore. La géométrie métrique est, non pas l'étude des propriétés de l'espace, mais celle de la structure du groupe des mouvements des corps solides et des groupes dérivés que l'on peut former avec ce groupe fondamental. »

3.1. *Et plus généralement*

Un petit mot sur la relativité générale, en prenant les éthers associés d'une part à la relativité générale classique d'Einstein et d'autre part à sa formulation lagrangienne que nous nommerons théorie de Newton-Lagrange de la gravitation. Dans une modélisation l'espace mathématique est courbe (une variété lorentzienne) dans l'autre il est plat (l'espace de Minkowski). Nous avons donc d'une part "l'éther géométrique courbe" dans lequel nous interprétons la gravitation comme "la matière courbe l'espace-temps" et d'autre part "l'éther lagrangien plat" dans lequel nous interprétons la gravitation comme "la matière déforme les trajectoires".

Là il est évident que les phrases "la matière courbe l'espace-temps" et "la matière déforme les trajectoires" présupposent le choix d'un éther et donc dire que "l'espace-temps est courbe" ou "l'espace-temps est plat" est dénué de tout sens (on est dans la métaphysique). Autrement dit, l'espace-temps n'existe pas en soi, c'est un concept métaphysique. Nous avons l'équivalence mathématique et observationnelle de ces deux modélisations conceptuellement distinctes (cf. Mizony, chap 7). Ainsi, si l'on fait "le choix a priori" d'un espace-temps plat, la théorie et les concepts newtoniens rendent compte d'observations, et si l'on fait "le choix a priori" d'un espace-temps courbe c'est la théorie (et les concepts) einsteinienne qui rend compte d'observations (pas forcément les mêmes). De plus, il faut considérer les deux modélisations pour prendre en compte toutes les observations, par exemple ce n'est que dans la modélisation plate de Newton-Lagrange que l'on peut interpréter le rayonnement du fond cosmologique car cette interprétation repose sur la loi "de corps noir" qui n'a rien à voir a priori avec la relativité générale. Au niveau didactique ce théorème, facile à démontrer, laisse toujours les étudiants (et les collègues matheux ou physiciens) perplexes, tellement il va à l'encontre d'idées reçues. Les réactions vont de "Où est l'erreur ?" à "Pourtant la matière courbe l'espace-temps" (affirmation qui de fait n'a aucun sens). Il pose le problème de la compréhension du Vème axiome d'Euclide et de son rôle dans des modélisations. Il permet la compréhension de dires de Emmanuel Kant : ... espace et temps sont les cadres a priori de toute description de notre expérience. La géométrie est une science qui détermine synthétiquement, et pourtant a priori, les propriétés de l'espace ... Il est indispensable dans la formation des enseignants qui s'intéressent aux relations entre physique et mathématique.

Un petit mot maintenant sur les recherches actuelles vers une [la] grande unification. On entend parler de cordes, supercordes, de particules exotiques ou supersymétriques, de matière sombre, noire (et plus noire que cela tu meurs ?), de géométrie non commutative de brane et que sais-je encore.

N'est-ce pas la résurgence de ces éthers que l'on croyait à jamais disparus ? Ils sont là, implicites et bien cachés, ils se manifestent dès qu'il y a réification d'espaces mathématiques. Il y a confusion entre les espaces mathématiques abstraits et les domaines phénoménologiques physiques concernés. Prenons chacun de ces éthers pour ce qu'il est : support de l'intuition (et commode) qui permettra, je le souhaite, de trouver autant de modélisations de la grande unification, (modélisations équivalentes mais conceptuellement distinctes) qu'il y a d'éthers pensables.

En résumé, pour Poincaré, les différents éthers sont des interprétations mécanistiques de domaines phénoménaux ; ces éthers ne peuvent rien nous apprendre sur la réalité, mais les espaces mathématiques associés à chacun sont plus ou moins pratiques, commodes, esthétiques. Il ne condamne pas le recours à un éther, au contraire, car, support de l'intuition, il peut être utile dans la compréhension, la transmission, la genèse et l'évolution d'une théorie.

Ce concept d'éther, vu comme réification d'un espace mathématique choisi dans une modélisation, permet de saisir ce que Poincaré nomme le "pluralisme théorique".

Ce concept d'éther permet, de mon point de vue, de distancier un espace mathématique d'un domaine phénoménal, et donc de mieux comprendre les rapports entre mathématiques et physique. Ici je ne peux que recourir à G.G. Granger qui, dans la ligne de Poincaré, considère l'espace mathématique, comme espace d'indexation d'un domaine phénoménal.

En très bref, le concept d'éther est à la fois vain et utile (Tout se passe comme si) ! Et l'espace mathématique associé est un choix a priori comme dirait Kant (synthétiquement ?).

3.2. *Questionnement épistémologique ; le pluralisme théorique*

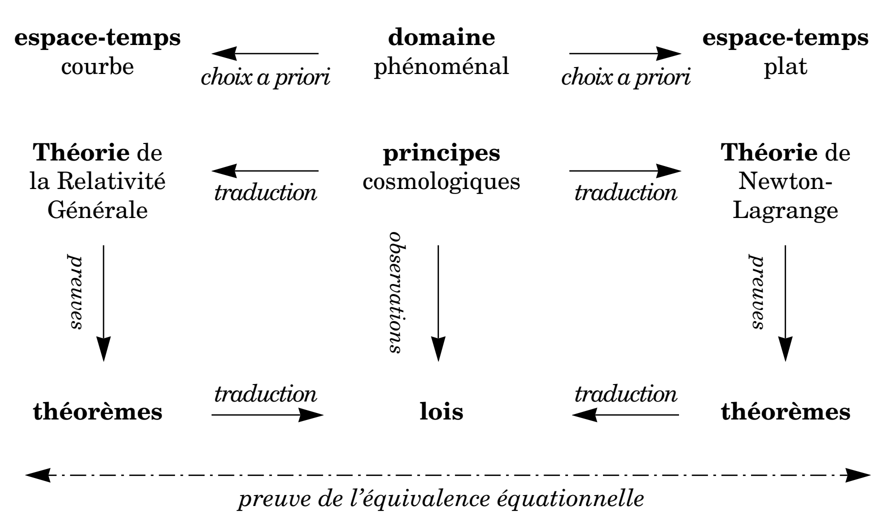
Nous avons présenté cinq modélisations de la relativité restreinte, mathématiquement équivalentes avec cinq éthers correspondants différents, ce qui correspond en partie au fait que ces modélisations sont conceptuellement différentes. Puis nous avons affirmé le même phénomène pour la gravitation, mais la démonstration mathématique est de nature existentielle et délicate. Par contre, comme l'équivalence mathématique est donnée explicitement pour les modèles d'univers, il peut être intéressant de la visualiser à l'aide du schéma de modélisation proposé.

Comme pour le problème de l'émission radioactive, traité dans la partie précédente, nous avons à faire à deux modélisations conceptuellement différentes rendant compte d'un même domaine phénoménal de la physique. C'est le pluralisme théorique cher à Henri Poincaré ; ce pluralisme est de fait trop ignoré et pourtant un élément fondamental à prendre en compte si l'on veut saisir ce qui se passe dans les relations entre mathématiques et physique. De plus dans cet exemple de pluralisme, il apparaît un élément très important, à savoir que l'espace-temps mathématique n'est pas le même dans ces deux modélisations pourtant équationnellement équivalentes et prédictivement équivalentes. Que signifie cet état de fait ?

Ici nous devons être incisif, voire provocant, car ce type de pluralisme théorique mettant en jeu la différence essentielle entre le domaine phénoménal (ici ce qui est souvent nommé l'espace-temps physique) et l'espace mathématique de représentation de ce domaine (espace mathématique appelé aussi l'espace-temps !) doit faire partie de la formation initiale de tout enseignant et de maths et de physique. Les profs de philo (des sciences ou de la connaissance) devraient également le savoir.

Que signifie cet exemple ? Le temps, l'espace, l'espace-temps n'existent pas en soi comme concepts de la physique ; ce sont des

Modélisations équivalentes de la cosmologie



concepts méta-physiques, comme le disait fort justement E. Kant :

« *Le temps n'est qu'une condition subjective de notre intuition, et il n'est rien en dehors du sujet.* »
« *... espace et temps sont les cadres a priori de toute description de notre expérience.* »

Ces propos, affirmations de Kant, se trouvent être justifiés par cet exemple. Mais que disait déjà Henri Poincaré :

« *L'expérience ne peut décider entre Euclide et Lobatchevsky. Les expériences ne nous font connaître que les rapports des corps entre eux ; aucune d'elles ne porte, ni ne peut porter, sur les rapports des corps avec l'espace, ou sur les rapports mutuels des diverses parties de l'espace.* »

Le dire le plus simple que j'ai trouvé pour saisir cette flèche :

$$\begin{array}{c} \text{espace de repérage mathématique} \\ \textit{choix a priori} \uparrow \\ \text{domaine phénoménal} \end{array}$$

est ce propos tenu vers la fin du XIXème siècle par Auguste Calinon :

« [...] *L'espace dans lequel nous localisons les faits géométriques de l'Univers est indéterminé ; c'est là un fait fondamental. Il en résulte notamment que cet espace n'est en luimême ni fini ni infini ; ce qui est fini ou infini, c'est uniquement telle ou telle représentation particulière et déterminée de notre Univers géométrique : ainsi nous pouvons représenter cet Univers par une figure euclidienne infinie ou par une figure de Riemann finie.* [...].*Dans l'univers deux corps s'attirent en raison inverse du carré de la distance qui sépare les images de ces corps dans la représentation euclidienne de l'Univers, les rayons lumineux étant représentés par des lignes droites. Et cela reste encore une loi générale de l'Univers, mais exprimée au moyen de la représentation euclidienne : toutefois nous demeurons absolument libres d'exprimer la même loi au moyen d'une autre représentation géométrique de l'Univers ; c'est une simple transposition à faire, quelque chose comme une traduction d'une langue dans une autre avec un dictionnaire.* [...] *Ainsi la physique et l'astronomie que nous connaissons ont été rédigées dans la langue euclidienne, mais il doit être entendu que cela n'avait rien de nécessaire, le choix de cette langue se justifiant seulement par des raisons de simplicité et commodité, ...* ».

Tout cela renvoie au concept d'éther (réification de l'espace mathématique de représentation d'un domaine phénoménal) que l'on peut exprimer sous la forme du schéma suivant qui peut être vu comme une inversion du schéma précédent :

$$\begin{array}{c} \text{espace de repérage mathématique} \\ \textit{réification} \downarrow \\ \text{éther} \end{array}$$

Pour saisir ce problème du point de vue de la philosophie de la connaissance on pourra se reporter à des travaux de G.G. Granger, en particulier à son livre "La vérification". Que dit-il ? p. 29 :

« *Les sciences ne visent qu'à connaître des objets, en construisant des modèles abs-*

traits de l'expérience, ... La validité de ces modèles est fondée à la fois sur leur cohérence et leur efficacité. En ce sens c'est bien le réel que représente et atteint la science ; mais seulement dans le réel ce que l'expérience nous donne comme communicable, par le moyen de systèmes symboliques, progressivement produits par le génie humain. »

Puis il examine le problème de la représentation du domaine phénoménal, ce qui le conduit à poser :

« *Ce que nous appelons référentiel est donc un espace de représentation adéquat des phénomènes.* »

puis à affirmer :

« *La vérification scientifique, outre son sens trivial d'élimination des illusions et des erreurs immédiatement décelables, consiste donc en une mise à l'épreuve, le plus souvent très médiate, d'un parti pris de représentation de l'expérience.* »

Cet espace de représentation est un objet mathématique ; pour la théorie de Newton, il s'agit de l'espace euclidien à quatre dimensions, pour la théorie de la relativité restreinte, de l'espace-temps plat de Minkowski, pour la relativité générale, d'une variété différentielle à quatre dimensions, pour la mécanique quantique, de l'espace des états (classes de vecteurs de norme 1 d'un espace de Hilbert !). Il sert à définir ce que Granger (p. 47) appelle des "énoncés indexés" : tout phénomène mesurable est paramétré par un point de cet espace de repérage.

En clair, le temps, l'espace ou un espace-temps est un objet mathématique, choisi a priori, permettant d'indexer un "domaine phénoménal". Cela donne raison à l'intuition de Kant. Autrement dit *dans toute modélisation il y a un choix a priori de l'espace mathématique servant à repérer l'ensemble des phénomènes*. En aucun cas il ne peut être identifié au réel de la physique. C'est lié au sens profond du Vème axiome d'Euclide (axiome des parallèles). Nous avons le choix de le prendre comme axiome, ou de prendre une de ses négations comme axiome. Ainsi si l'on paramètre un domaine phénoménal par $\mathbf{R}^3$, nous sommes libres de prendre cet espace euclidien ou non-euclidien. Donc on obtient ipso facto deux modélisations équivalentes.

Le pluralisme théorique est déjà une conséquence de cet axiome d'Euclide qui oblige donc à ne pas confondre un domaine phénoménal avec son espace de représentation mathématique. De plus c'est une richesse, puisque deux modélisations conceptuellement différentes s'éclairent l'une l'autre et se complètent.

A un niveau plus didactique, Jean Dhombres m'a fait la remarque suivante : « *... la modélisation ne peut pas être un modèle. Il faut qu'il y ait lutte, ou coexistence si on veut le dire pour exprimer une complémentarité, entre deux modèles. Du coup, si l'on pense que dans les classes il faille enseigner la modélisation, on doit mettre en jeu un savoir sérieux, et chose si difficile en classe, un savoir aux allures contradictoires.* »

3.3. *Le mythe du trou noir*

Le schéma de modélisation statique présenté est, comme tout schéma, simplificateur ; il me semble important de le faire fonctionner sur un exemple qui, bien qu'emblématique, montrera sa fonctionnalité.

Sur la modélisation des trous noirs

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\textbf{rayon de courbure} \arrow[d, "\textit{Changement de variables non bijectif}"'] & \textbf{distance radiale} \arrow[l, "\textit{erreur de traduction}"'] \arrow[d, "\textit{Aucune observation certaine}"] \\
\textbf{Théorème local} \arrow[r, "\textit{erreur de traduction}"] & \textbf{loi globale}
\end{tikzcd}$$

« *The essential result of this investigation is a clear understanding as to why the "Schwarzschild singularities" do not exist in physical reality. Although the theory given here treats only clusters whose particles move along circular paths it does not seem to be subject to reasonable doubt that more general cases will have analogous results. The "Schwarzschild singularity" does not appear for the reason that matter cannot be concentrated arbitrarily. And this is due to the fact that otherwise the constituting particles would reach the velocity of light.* »
Einstein (1939)

Einstein dit sa conviction que le rayon de Schwarzschild est infranchissable (la conséquence est l'impossibilité de la formation d'un trou noir par effondrement gravitationnel). Or cette conviction est maintenant un résultat démontré. En effet, il existe de nombreuses démonstrations du fait qu'un effondrement gravitationnel d'un corps sphérique ne peut pas donner naissance à un trou noir dans le cadre de la relativité générale. Il est important de donner quelques références. Outre l'article d'Einstein, citons N. Stavroulakis : Mathématique et trous noirs ; Gazette des mathématiciens ; J.V. Narlikar : The Schwarzschild solution : some conceptual di_culties, Found. Phys ; L. S. Abrams : Black holes : the legacy of Hilbert's error ; Can. J. Phys. ; et L. S. Abrams : The total space-time of a point-mass when Lambda < 0, and its consequences for the Lake-Roeder black-hole ; Physica. Et dernierement A. Mitra : Non-occurence of trapped surfaces and black holes in spherical gravitational collapse ; Foundations of Physics Letters.

Deux problèmes se posent : a) Pourquoi les démonstrations prouvant la formation de trous noirs, dans le cadre de la relativité générale, sont-elles erronées ? b) Des trous noirs ont-ils été observés, même indirectement ? Nous examinons ci-dessous ces deux questions.

a) Il y a trois principales sources d'erreurs : Je passe rapidement sur la première (dans la flèche verticale preuve) qui consiste à utiliser un changement de variable non bijectif, en oubliant les précautions à prendre. La deuxième source d'erreur (dans la flèche de traduction "version") est épistémologiquement importante, c'est la traduction de la notion de rayon par celle de rayon de courbure. Or le "rayon de Schwarzschild" à une signification périmétrique et non celle d'un rayon. Il s'agit d'un "rayon de courbure" (concept qui a un sens précis en géométrie). Pour ma part j'utilise maintenant systématiquement dans mon enseignement l'expression "rayon périmétrique de courbure" à la place de la dénomination dangereuse, surtout en géométrie non euclidienne, de "rayon de courbure". Ce "rayon périmétrique de courbure" est défini comme le quotient d'un périmètre par π et non comme la distance au centre, ce qui, dans le cas d'un espace courbe, n'est pas la même chose. La troisième source d'erreur (dans la flèche de traduction "thème") provient de l'utilisation globale du théorème de Birkhoff qui n'est valable que localement.

Chacune de ces erreurs invalide cette (fausse) théorie des trous noirs.

b) Au niveau observationnel, les candidats trous noirs se révèlent être des étoiles à neutrons, ou d'autres structures comme les présente A. Mitra qui fait le point sur les nombreux objets compacts possibles. Il ne reste plus que les candidats trous noirs supermassifs qui se trouveraient au centre de galaxies pour rendre compte de rotations rapides. Or il existe d'autres explications possibles de cette rotation rapide sans faire appel à un trou noir. En particulier une qui est une simple application d'un ... théorème démontré par Einstein dans son article de 1939. D'autres problèmes se posent : le concept d'horizon d'un trou noir n'est pas covariant au sens suivant : pour la solution de Schwarzschild il se situe à $r = 2M$, pour celle de Fock à $r = M$, etc. Et puis encore un autre : si le photon ne peut pas s'échapper d'un trou noir, comment le graviton pourrait-il le faire ? Ce qui signifie qu'un trou noir ne pourrait émettre qu'un champ gravitationnel nul !

Bref, le concept de trou noir est un concept purement géométrique, qui n'a aucune pertinence dans le cadre de la relativité générale (vue comme théorie physique de la gravitation).

4. — Conclusion

Qu'est-ce le temps, l'espace, l'espace-temps ?

Qu'est-ce une modélisation d'un domaine de la physique ?

Qu'est-ce ces "relation", "lien", "interaction", "articulation" entre mathématiques et autres disciplines ?

Le pluralisme théorique est un passage obligé, ainsi que l'exigence d'un travail sur ce nouveau concept de modélisation. On ne peut pas continuer à ignorer Henri Poincaré (et avec lui E. Kant et G.G. Granger), ni le sens profond du Vème axiome d'Euclide qui déjà fonde ce pluralisme théorique, ni le concept d'éther au sens de Poincaré, si utile pour l'intuition, mais qui, s'il n'est pas pris en compte, empêche de saisir ce qu'est une modélisation et donc la relation profonde de compagnonnage entre physique et mathématique.

Mais l'élément le plus important est, me semble-t-il, la première flèche horizontale de *choix a priori* :

espace de repérage mathématique $\longleftarrow$ domaine phénoménal,

qui traduit (actualise ?) le dire de Kant (du moins, c'est le sens que je donne à ce dire) ... *espace et temps sont les cadres a priori de toute description de notre expérience*, et prend en compte la phrase de Kant en exergue.

Note : Le mot modélisation a été introduit vers 1975 dans les dictionnaires. Par exemple dans le Larousse on trouve cette définition :

> Modélisation : *Modèle mathématique, représentation mathématique d'un phénomène physique, économique, humain, etc., réalisée afin de pouvoir mieux étudier celui-ci.*

Et dans le Petit Robert :

> Modélisation : *Mise en équation d'un phénomène complexe permettant d'en prévoir les évolutions.*

Bibliographie

Comité Scientifique des IREM (J.P. Raoult) : La modélisation ; IREM de Paris7, Paris (2004).

CREM : L'enseignement des mathématiques en relation avec les autres disciplines, Bulletin de l'APMEP. Num. 458. p. 354-374, Paris (2005)

L. S. ABRAMS : Black holes : the legacy of Hilbert's error ; Can. J. Phys. Vol 67 pp. 919-926 (1989).

L. S. ABRAMS : The total space-time of a point-mass when $L < 0$, and its consequences for the Lake-Roeder black-hole ; Physica A 227, pp.131-140 (1996).

G. Aldon et M. Leberre : Fragments d'une exposition mathématique, cédérom, IREM de Lyon, (2000).

L. BOI : Le problème mathématique de l'espace, une quête de l'intelligible ; Springer, (1995).

A. CALINON : Etude sur l'indétermination géométrique de l'univers ; dans la Revue philosophique de la France et de l'étranger, Vol 36, pp. 595-607, (1893).

A. EINSTEIN : Ether and the Theory of Relativity, an address delivered on May 5th, 1920, in the University of Leyden. Publié dans the Collected Papers of Albert Einstein.

A. EINSTEIN : Annal Math. Vol. 40 pp. 922-936 (1939).

A. EINSTEIN et L. INFELD : in "The evolution of Physics", New-York, Simon and Shuster, (1938).

P. Eymard et J.-P. Lafon : Autour du nombre π , Hermann, (1999).

V. FOCK : The theory of space, time and gravitation ; Pergamon Press, London (1964).

G. G. GRANGER : La vérification ; O. Jacob, (1992).

G. G. GRANGER : Philosophie, langage, science ; EDP Sciences (2003).

P. HOLLAND : The quantum theory of motion ; Cambridge university press, (1993).

E. KANT : citations tirées des ouvrages de G-G. Granger, de L. Boi et de J-M. Lévy-Leblond.

E. KANT : Premiers principes métaphysiques de la science de la nature ; librairie philosophique J. Vrin Paris, (1990).

J.-M. LEVY-LEBLOND : L'esprit de sel ; Fayard, (1981).

J.-M. LEVY-LEBLOND : La pierre de touche. La science à l'épreuve ; Gallimard (1996).

G. LONGO : Géométrie, Mouvement, Espace : Cognition et Mathématiques ; in Intellecta, n° 2, pp.195-218, (1997).

A. MITRA : Non-occurence of trapped surfaces and black holes in spherical gravitational collapse ; Foundations of Physics Letters, Vol 13, p. 543, (2000).

M. MIZONY et G. ARSAC : Que peut nous apprendre la gravitation sur l'espace-temps ? ; preprint de l'Institut Girard Desargues (UCBL), n° 12, (1998).

M. MIZONY : La relativité générale aujourd'hui, l'observateur oublié ; Aléas, (2003).

J.V. NARLIKAR : The Schwarzschild solution : some conceptual difficulties, Found. Phys. 18, n° 6, pp.659 - 668, (1988).

M. PATY : Poincaré et le principe de relativité, Congrès international Henri Poincaré, Nancy, 1994.

H. POINCARE : Les fondements de la géométrie ; in oeuvres, XI, Paris, (1956).

H. POINCARE : La science et l'hypothèse, Flammarion (1902), édition 1968.

L. ROUGIER : L'utilisation de la géométrie non-euclidienne dans la physique de la relativité, l'enseignement mathématique, seizième année, 1914, Gauthier-Villars (Paris) et Georg & Cie (Genève), pp. 5..18.

J-M. SOURIAU : Géométrie et Thermodynamique en cosmologie, in "Géométrie symplectique et Physique mathématique" CNRS Paris (1975).

N. STAVROULAKIS : Mathématique et trous noirs ; Gazette des mathématiciens, n° 31 pp119 -132 (1986).

V. VARICAK articles de 1910, 1911, 1912 et 1913 dans différentes revues.

S. WEINBERG : Gravitation and cosmology. John Wiley, New-York (1972).