
LE WAGONNET, COTE PHYSIQUE ET COTE MATHÉMATIQUE

Eric HAYMA (professeur de sciences physiques),
Guy DUGOUR (professeur de mathématiques)
Irem de Clermont-Ferrand

I. Introduction.

Les nouveaux programmes de terminale S, nécessitent l'introduction précoce de la fonction exponentielle. Dès la rentrée de Tous-saint, nous avons effectué un premier tra-vail interdisciplinaire physique-mathéma-tiques.

Deux séquences de 1 h 30 (*avec présence des deux professeurs*), prises en part égale sur les horaires des deux matières, ont été consac-rées à l'introduction de la fonction expo-nentielle à partir de la décroissance radioac-tive de l'iode 131. Le choix de corps radioactif s'étant imposé à nous à la suite d'un TPE sur la scintigraphie thyroïdienne, réalisé par trois élèves de notre établissement, dans lequel les trois disciplines scientifiques étaient présentes.

Sachant que le temps de demi-vie de l'iode 131 est de huit jours, nous avons pu obte-

nir de manière fictive, puis représenter un nuage de points du plan avec en abscisses le temps écoulé (*par période de huit jours*) et en ordon-nées l'activité (*en becquerels*) correspon-dant du corps radioactif. Disposant d'un modè-le discret (*une suite géométrique*), nous devions passer au modèle continu. Pour cela, nous avons essayé d'ajuster le nuage de points par la courbe représentative d'une fonction en procédant par étapes successives :

- tracé « à main levée » d'une courbe passant par les points du nuage ;
- démonstration qu'une fonction polynôme de degré 2 ne peut pas convenir ;
- utilisation d'Excel pour visualiser que lorsque le degré de la fonction polynôme augmente, la précision s'améliore mais ce n'est pas la bonne solution ;

- le tracé « à main levée » des tangentes à la courbe aux points du nuage permet de constater que le coefficient directeur de la tangente est proportionnel à l'ordonnée du point ;
- en admettant que la propriété précédente est vraie en tout point de la courbe, il apparaît une équation différentielle du type $y' = ay$, ce qui prouve que la courbe obtenue représente (sous condition d'existence) une fonction totalement inconnue des élèves à ce jour ;
- la méthode d'Euler intervient alors pour fournir une fonction affine par morceaux approchant la fonction cherchée.

Compte tenu de la densité des programmes des deux disciplines, que ce soit en première ou en terminale, il va de soi, que l'objectif sous-jacent aux nombreux problèmes scientifiques posés par la démarche « expérimentale » décrite ci-dessus est d'optimiser le temps consacré à ces notions. La fonction exponentielle étant introduite, une interrogation nous est apparue :

Comment réinvestir en cours d'année et dans un nouveau travail commun les notions entrevues avec un « maximum » d'efficacité dans un minimum de temps ?

La lecture des programmes et des documents d'accompagnements des deux disciplines nous apporte un début de réponse.

En physique, la méthode d'Euler est employée pour résoudre les équations différentielles du type $y' = ay + b$ avec $a \neq 0$. Bien entendu, la résolution de ces équations figure au programme de mathéma-

tiques, avec comme recommandation, d'étaler le chapitre concernant les équations différentielles sur une majeure partie de l'année. De manière opportune, l'exercice sur le wagonnet de l'épreuve de mathématiques du baccalauréat série S, session de juin 2004, va compléter la réponse à notre question. En effet, cet exercice dont le principal objectif est la résolution d'une équation différentielle donnée dans l'énoncé fait abstraction de toute la partie modélisation (peut-être un choix légitime un jour de bac (?), surtout en période de transition quant au type d'épreuve). Pourtant, l'équation du mouvement s'obtient par une « simple » application des lois de Newton alors pendant l'année scolaire, pourquoi s'interdire la partie modélisation, surtout que le programme officiel de mathématiques ainsi que les commentaires sont sans ambiguïté :

- ... la présence des équations différentielles, bien que modeste dans le libellé du programme, est fondamentale pour amener à la compréhension de la puissance des mathématiques pour la modélisation ; un travail conjoint avec les autres disciplines favorisera cet objectif. ...
- ... On fera le lien avec l'étude de ces équations en physique ; on définira le temps caractéristique $\tau = -1/a$ pour $a < 0$

A ce propos, on pourra relire avec intérêt le document d'accompagnement du programme pages 31 à 34 et particulièrement le résumé de la problématique générale de l'utilisation des équations différentielles en physique :

- ... Il nous suffira ici de considérer la catégorie importante des phénomènes qui se déroulent sur une certaine durée. Le phy-

sicien relève l'évolution temporelle d'un certain type de phénomènes. Il obtient ainsi par des mesures les valeurs prises en fonction du temps par les variables qui décrivent le phénomène. Et ensuite il cherche à déduire ces fonctions d'une loi « instantanée » comme par exemple : à chaque instant, « l'accélération est proportionnelle à la force », ou encore « les forces de frottements sont proportionnelles à la vitesse ». De telles lois instantanées permettent d'écrire l'équation différentielle du phénomène. Les solutions de cette équation, correspondant aux diverses conditions initiales possibles, redonnent, si tout va bien, les évolutions temporelles observées. Les physiciens valident l'équation différentielle qui sert de modèle en vérifiant que, dans la limite des erreurs de mesure, les évolutions temporelles ainsi déduites sont conformes à la réalité expérimentale. ...

La lecture du programme de sciences physiques permet de s'assurer que les deux disciplines sont bien en phase :

- ... Etudier les variations temporelles d'un système nécessite d'introduire la variable temps dans le formalisme. S'interroger sur les paramètres qui influent sur la dérivée d'une grandeur physique, c'est chercher à établir une équation différentielle. La résoudre permet d'anticiper l'évolution du système. La mise en place d'une méthode numérique itérative permet de mieux ancrer l'idée du déterminisme et de la causalité : l'état d'un système à un instant donné dépend de son état aux instants antérieurs et des actions qui s'exercent sur lui.

Ainsi, au cours de leur dernière année de

lycée, les élèves ont pour la première fois la possibilité de toucher du doigt le double mouvement de l'activité scientifique dans le domaine de la physique : confronter les prédictions d'un modèle théorique à des modèles expérimentaux, utiliser des résultats expérimentaux pour affiner un modèle théorique.

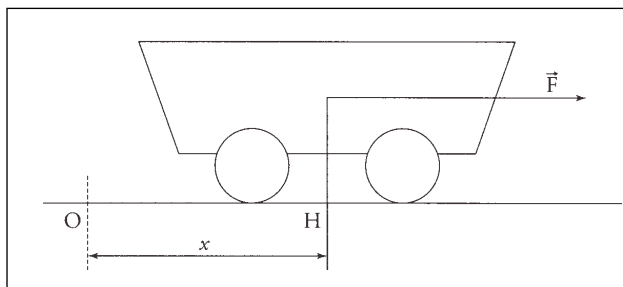
La variété des systèmes abordés au cours de l'année ne doit donc pas faire perdre *le fil directeur* du programme : *l'évolution des systèmes physiques*. ...

Dès lors, il n'est pas étonnant que les physiciens aient cherché pour chaque système étudié, une constante de temps qui lui soit propre : *le temps caractéristique*. Pour s'en persuader, il suffit de consulter les tableaux (document de travail) extraits des commentaires du programme de sciences physiques que nous joignons en annexe.

L'exercice sur le wagonnet constitue par conséquent le point de départ du travail commun que nous décrivons ci-dessous. Au mois de février, nous décidons de consacrer une heure de physique (*voir paragraphe II*) et une heure de mathématiques (*environ dix jours après, voir paragraphe III*) à cette activité. Auparavant, le professeur de physique a traité la partie mécanique de son programme. Le professeur de mathématiques a introduit la notion de fonction primitive sur des exemples « simples » et établi la formule de résolution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ avec $a \neq 0$ et fait un certain nombre d'exercices. L'activité, qui comporte une partie modélisation, permet de faire le lien entre les deux disciplines, de comparer les « langages » utilisés et les résultats obtenus par les deux méthodes de résolution.

**II. La séance de TD
de sciences physiques.**

Présentation du problème du wagonnet et résolution graphique par la méthode d'Euler



Un wagonnet de masse M se déplace sur une voie ferrée rectiligne et horizontale. Il est soumis à une force d'entraînement constante \vec{F} .

On a pu constater de manière expérimentale que, dans une telle situation, les forces de frottement sont proportionnelles à la vitesse du wagonnet, la constante de proportionnalité est le réel strictement positif k . Le wagonnet démarre avec une vitesse initiale nulle.

1°) *Etablissement de l'équation différentielle du mouvement.*

- a) Etablir le bilan des forces extérieures appliquées au système { wagonnet }.
- b) En appliquant la seconde loi de Newton, établir l'égalité vectorielle entre les différentes forces intervenant.
- c) Par projection sur l'axe Ox , de l'égalité précédente, établir l'équation différentielle du wagonnet et montrer qu'elle est du type $\frac{dv_x}{dt} = Av_x + B$.
- d) Exprimer A et B en fonction des données. Les calculer en précisant l'unité.

On donne : $F = 1000 \text{ N}$;
 $M = 500 \text{ kg}$;
 $k = 30 \text{ N.s.m}^{-1}$.

2°) *Résolution graphique de l'équation différentielle. Tracé de la courbe représentant l'évolution de la vitesse en fonction du temps.*

- a) A partir de l'équation différentielle, établir l'expression de la vitesse limite v_{lim} atteinte par le wagonnet et calculer sa valeur.
- b) Exprimer et déduire la valeur du temps caractéristique τ .
- c) Donner les deux équations permettant de résoudre graphiquement l'équation différentielle par la méthode d'Euler.
- d) Compléter les deux premières lignes du tableau en choisissant pour pas de résolution $\Delta t = 1 \text{ s}$.

$t(\text{s})$	$v_x(\text{ms}^{-1})$	$a_x(\text{ms}^{-2})$
0	0	...
1
2

- e) A l'aide d'un tableau, compléter le tableau jusqu'à $t = 100 \text{ s}$ et tracer la courbe d'équation $v = f(t)$.
- f) En déduire la vitesse à $t = 5 \text{ s}$ et $t = 30 \text{ s}$.

Déroulement de la séance (une heure)

L'exercice arrive en conclusion des deux premiers chapitres de mécanique, les lois de Newton et la chute verticale d'un solide. Il permet, dans un contexte différent (ici, le mouvement est horizontal), de réinvestir les connaissances acquises antérieurement :

- établir un bilan des forces ;
- utiliser la seconde loi de Newton en la projetant sur les axes d'un repère pour établir l'équation différentielle « de la vitesse » ;
- en déduire la vitesse limite, ainsi que le temps caractéristique ;
- résoudre graphiquement l'équation différentielle par la méthode d'Euler ;
- retrouver la vitesse limite, ainsi que le temps caractéristique et montrer l'importance du choix du pas du calcul.

L'énoncé est donné en bloc.

— Dans un premier temps, la consigne est de traiter individuellement le 1°) (*pendant 20 minutes*). Les élèves travaillent en semi-autonomie, l'enseignant circulant dans les rangs pour proposer une aide éventuelle. Correction de cette partie sur transparent (*cinq minutes*).

— La deuxième partie (exploitation et résolution de l'équation différentielle) est traitée par questionnement des élèves (*20 minutes*).

— L'enseignant établit, par questionnement des élèves, l'algorithme permettant le calcul de la vitesse et de l'accélération à l'aide d'un tableur (ici *Généris 5+*) pour une durée de 100 s avec un pas de 0,1 s (*cinq minutes*).

— On visualise alors le tableau de valeurs, ainsi que le graphe de la vitesse en fonction

du temps $v = f(t)$ à l'aide d'un vidéo projecteur. L'inconvénient du choix d'un pas trop grand est montré.

Cet exercice, qui constitue en quelque sorte une évaluation formative, n'a pas posé de problème particulier pour l'ensemble de la classe, et ce, pour principalement deux raisons :

- il intervient en fin d'apprentissage (cours et exercices d'applications traités) ;
- il est le réinvestissement d'une séance de travaux pratiques (mouvement de chute d'une bille dans un fluide) durant laquelle les notions précédentes ont été abordées.

Quelques remarques concernant la partie physique

— **En physique, les deux équations dont parle la question 2°)c) sont établies une fois pour toutes et réutilisées ensuite dans les exercices.**

Voici comment on les obtient dans le cas de notre exercice.

- Par projection sur l'axe Ox , l'accélération est $a_x = -\frac{k}{M}v_x + \frac{F}{M}$. Avec les données numériques, on trouve $a_x = -\frac{3}{50}v_x + 2$.

La vitesse est donnée par l'équation différentielle : $a_x = v'_x = -\frac{3}{50}v_x + 2$.

- On note respectivement a_i , v_i l'accélération et la vitesse à l'instant t_i et Δt l'écart de temps entre les instants t_i et t_{i+1} . Sachant que l'équation de la tangente au point d'abscisse

t_i à la courbe d'équation $v = f(t)$ est $y = v'(t_i)(t - t_i) + v(t_i)$, on déduit qu'à l'instant t_{i+1} la vitesse est $v_{i+1} = a_i \Delta t + v_i$ où

$$a_i = -\frac{3}{50} v_i + 2.$$

• Les deux équations $v_{i+1} = a_i \Delta t + v_i$ et

$$a_i = -\frac{3}{50} v_i + 2$$

sont celles utilisées pour appliquer la méthode d'Euler.

— **Le temps caractéristique, côté physique.**

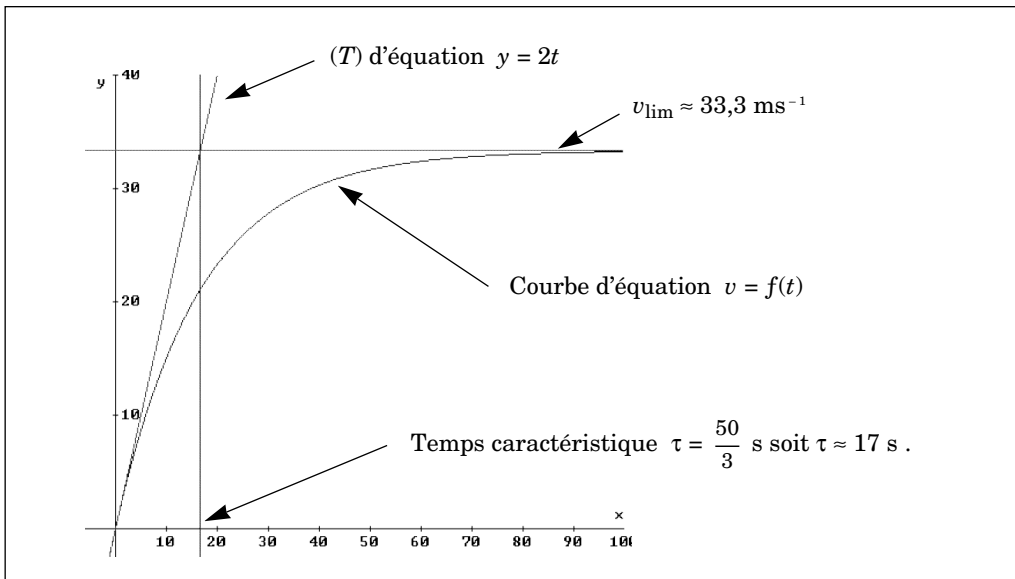
Le temps caractéristique τ correspond à l'abscisse du point d'intersection de l'asymptote d'équation $y = v_{\text{lim}}$, soit dans notre cas la droite d'équation $y = 100/3$ avec la tangente (T) d'équation $y = 2t$, au point d'abscisse $t = 0$ à la courbe d'équation $v = f(t)$. On trouve $\tau = 50/3$ soit environ 17 s, la vitesse est

alors de $21,4 \text{ ms}^{-1}$ ce qui représente environ 63 % de la vitesse limite.

• Le mouvement pour $t \leq \tau$ est appelé *le régime initial (ou transitoire)*. Pendant cette période, la courbe de la vitesse est quasi-linéaire, ce qui peut s'expliquer par le fait que les forces de frottements sont négligeables par rapport à la force d'entraînement.

• Pour $\tau < t < 3\tau$, la vitesse croît toujours, mais de plus en plus lentement en se rapprochant de la vitesse limite, les forces de frottement augmentent et deviennent voisines de la force d'entraînement.

• Pour $t = 3\tau$, la vitesse est de $31,7 \text{ m.s}^{-1}$ ce qui représente environ 95 % de la vitesse limite. Pour $t \geq 3\tau$, les physiciens conviennent que le *régime asymptotique (ou permanent)* est atteint. La vitesse est pratiquement égale à la vitesse limite soit $33,3 \text{ m.s}^{-1}$. La résultante des forces de frottement est opposée à la force d'entraînement.



La durée du *régime initial* est voisine de la valeur de τ qui apparaît, par conséquent, comme *caractéristique* du temps pendant lequel la vitesse du wagonnet évolue.

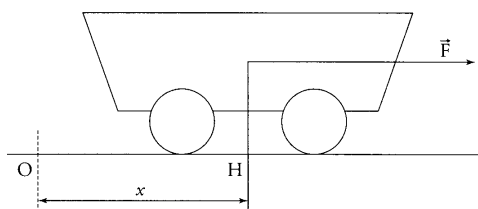
III. Le traitement mathématique.

L'heure de cours (*c'est un peu juste*) de mathématiques est entièrement consacrée à la résolution du problème dont l'énoncé est donné ci-dessous.

En fin de séance, quelques minutes sont réservées à la comparaison de la solution obtenue par la résolution de l'équation différentielle de la vitesse et des résultats fournis par la méthode d'Euler pour différentes valeurs de Δt , choisies par rapport au temps caractéristique τ .

A. L'énoncé de l'exercice.

Une autre version d'un exercice de bac S (session Juin 2004)



Un wagonnet de masse M se déplace sur une voie ferrée rectiligne et horizontale. Il est soumis à une force d'entraînement constante

\vec{F} . On a pu constater de manière expérimentale que, dans une telle situation, les forces de frottement sont proportionnelles à la vitesse du wagonnet, la constante de proportionnalité est le réel strictement positif k .

La position du wagonnet est repérée par la distance x , en mètres, du point H à l'origine O du repère en fonction du temps t , exprimé en secondes. On prendra t dans l'intervalle $[0; +\infty[$. Le mouvement suivi par le wagonnet est par conséquent caractérisé par une loi horaire du type $x = f(t)$ avec $[0; +\infty[$, où f est une fonction à déterminer.

1. Mise en équations du problème.

- Etablir le bilan des forces extérieures appliquées au système étudié.
- En énonçant les lois de Newton (*voir la note (1) à la fin de ce paragraphe III A*) utilisées et en justifiant clairement vos réponses, établir l'égalité vectorielle caractérisant la somme vectorielle des forces extérieures appliquées au système étudié.
- En projetant l'égalité vectorielle précédente sur l'axe Ox , établir l'équation différentielle (E) qui caractérise le mouvement du wagonnet.

On notera :

- x' la dérivée de x par rapport au temps t .
- x'' la dérivée seconde de x par rapport au temps t .

2. Traitement mathématique du problème dans le cas général.

- Prouver que x est solution de l'équation différentielle (E) si, et seulement si x' est solution de l'équation différentielle (E_1) $F = kv + Mv'$ avec $t \in [0; +\infty[$.
- Déterminer l'ensemble des solutions (on dit aussi solution générale) de l'équation différentielle (E_1).
- En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

3. *Résolution dans un cas particulier correspondant à des conditions initiales fixées.*

Dans cette question, on suppose que :

- L'intensité F de la force d'entraînement est $F = 1000 \text{ N}$.
- La masse M du wagonnet est $M = 500 \text{ kg}$.
- Le coefficient k est $k = 30 \text{ N.s.m}^{-1}$.

- a) Démontrer que la solution générale de l'équation (E) trouvée au 2.c) peut alors s'écrire :

$$x(t) = \frac{100}{3}t + C_1 e^{-\frac{3}{50}t} + C_2$$

avec $t \in [0; +\infty[$ et où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles.

- b) Sachant qu'à l'instant $t = 0$, le wagonnet démarre avec une vitesse initiale nulle, déterminer la solution de l'équation (E) correspondant à ces conditions.

4. *Questions concernant la vitesse instantanée du wagonnet.*

Dans cette question, la loi horaire du mouvement suivi par le wagonnet est la solution trouvée à la question 3.b).

- a) Déterminer la vitesse v du wagonnet en fonction du temps $t \in [0; +\infty[$.
- b) Calculer $V = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$.
- c) A l'aide du principe d'inertie (voir la note (2) à la fin de ce paragraphe III A), peut-on retrouver la vitesse limite sans résoudre l'équation différentielle ?

5. *Fin de l'activité.*

L'activité se termine par la comparaison des graphiques obtenus d'une part avec la courbe de la fonction v obtenue au 4.a) et d'autre part avec les courbes obtenues par la méthode d'Euler en physique pour différentes valeurs de Δt (voir la feuille comportant les graphiques à la fin de l'article).

Notes :

(1) Les lois de Newton

- *La première loi de Newton (ou principe d'inertie) :* Par rapport à certains référentiels, appelés référentiels galiléens (*), le centre d'inertie G d'un solide pseudo-isolé (solide dont la somme des forces extérieures qui lui sont appliquées est nulle) :

— reste au repos ($\vec{V}_G = \vec{0}$), s'il était au repos ;

— a un mouvement rectiligne uniforme ($\vec{V}_G = \vec{c}te$), s'il était en mouvement.

(*) Le référentiel terrestre sera considéré comme galiléen et tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est lui-même galiléen.

- *Deuxième loi de Newton :* Dans un référentiel galiléen, la somme des forces extérieures appliquées à un solide est égale au produit de la masse du solide par le vecteur accélération

$$\vec{a}_G \text{ de son centre d'inertie : } \sum \vec{F}_{ext} = m \vec{a}_G .$$

- *Troisième loi de Newton (ou principe des actions réciproques) :* Lorsqu'un système (A) exerce une force \vec{F}_{AIB} sur un système (B),

simultanément (B) exerce sur (A) une force

$$\vec{F}_{BIA} \text{ de telle sorte que } \vec{F}_{AIB} = -\vec{F}_{BIA} .$$

(2) Question 4. c)

La réponse attendue est fournie par la première loi de Newton : lorsque la somme des forces extérieures appliquées au wagonnet devient nulle, celui-ci (qui est en mouvement) « adopte » un mouvement rectiligne uniforme. La vitesse limite est alors obtenue en écrivant que la force de freinage et la résultante des forces d'entraînement ont la même intensité.

B. Déroulement de la séance (une heure).

L'exercice intervient après que les élèves aient pris un premier contact avec la notion de fonctions primitives sur un intervalle d'une fonction donnée (*cas des fonctions de référence et utilisation de la linéarité uniquement, un retour sur cette partie du programme sera effectué au cours de l'étude de l'intégration*) et après la résolution mathématique de l'équation différentielle du type $y' = ay + b$ avec $a \neq 0$. Les objectifs essentiels sont :

- de montrer que les disciplines scientifiques ne sont pas cloisonnées ; tout en faisant apparaître, de manière objective, les différences et les similitudes dans l'approche d'un même problème ;
- de montrer le rôle indispensable tenu par les mathématiques dans la modélisation ;
- de faire le point sur les différences de notation entre les deux disciplines ;
- de comparer les résultats obtenus par une méthode numérique et par la méthode théorique.

L'énoncé est donné en bloc. Dans un premier temps, les élèves prennent connaissance

de l'énoncé. Les questions sont traitées une par une, mais afin que les élèves aient un temps de recherche un peu plus long, il serait souhaitable de disposer d'un peu plus d'heure pour traiter entièrement l'exercice (*1 h 15 me paraît être un bon compromis*).

— Question 1 :

- Recherche individuelle par les élèves et correction au tableau par un élève : 15 minutes.
- Les élèves ne rencontrent pas de difficultés particulières pour résoudre cette question.

— Question 2.

- Recherche individuelle par les élèves et correction au tableau par un élève : 20 minutes.
- L'absence de données numériques et la présence de nombreuses données littérales ralentissent le travail d'un certain nombre d'élèves.
- Un temps de recherche plus important aurait été nécessaire.
- La détermination d'une primitive est conduite lentement (*auparavant, seuls des exemples « simples » ont été traités en classe*)

— Question 3.

- Recherche individuelle par les élèves et correction au tableau par un élève : à peine 15 minutes.
- Les élèves sont entraînés à chercher la dérivée d'une fonction et ne rencontrent pas de difficultés particulières, si ce n'est une certaine lenteur dans les calculs numériques pour un certain nombre d'entre eux.

Le reste du temps (à peine quinze minutes) est consacré aux deux dernières questions.

— **Question 4.**

- Les points a) et b) sont des questions habituelles pour les élèves, aussi l'enseignant les corrige directement (*afin de ne pas déborder sur l'horaire*) ;
- Le point c) est aussi « traité en direct » . La question étant posée aux élèves, après un délai de réflexion assez bref, ils fournissent eux-mêmes la réponse.

— **Question 5.**

- La feuille comportant les graphiques (*en couleurs*) est distribuée aux élèves.
- L'enseignant commente les différents graphiques.
- La conclusion de l'enseignant porte sur les avantages et les inconvénients de chacune des deux méthodes de résolution.

C. *Quelques remarques concernant la partie mathématique.*— **La mise en équations du problème (question 1).**

La séance de TP de physique ayant eu lieu une dizaine de jours auparavant, pour des raisons que nous ne détaillons pas ici, cette partie s'est déroulée assez rapidement, mais en employant le « langage physicien » et en énonçant clairement les lois physiques utilisées. Toutefois, les différences de notations sont signalées (ex : dérivée).

— **Traitement mathématique du problème (question 2).**

Un des intérêts mathématiques de la partie modélisation et de cette question réside dans le fait que les élèves sont amenés à

manipuler, à partir d'un « support concret », de nombreuses lettres représentant des grandeurs dont certaines sont variables et d'autres constantes. Ce qui, à ce niveau n'est pas forcément évident.

— **La vitesse instantanée du wagonnet (question 4).**

La détermination de la limite par deux méthodes, calcul mathématique et utilisation du principe d'inertie permet, là encore, de relier les deux disciplines.

— **Le temps caractéristique, côté mathématique.**

La comparaison des résultats (*voir la feuille comportant les graphiques à la fin de l'article*) permet, puisque l'on dispose de la solution exacte, de vérifier l'importance du choix « du pas » Δt pour utiliser à bon escient la méthode d'Euler et retrouver ainsi des résultats admis en physique :

- si Δt est « petit » devant τ , de l'ordre de $\tau/10$, alors la méthode d'Euler donne une courbe « très proche de celle obtenue par résolution de l'équation différentielle ;
- si Δt augmente tout en restant inférieur à τ , la valeur limite est maintenue mais il y a un écart de plus en plus important avec le régime initial ;
- si Δt devient supérieur à τ , la méthode d'Euler ne traduit pas du tout le mouvement et peut même donner des aberrations puisque la vitesse limite est dépassée.

D'un point de vue mathématique, il est légitime de justifier les résultats expérimentaux précédents.

Reprenons les deux équations $v_{i+1} = a_i \Delta t + v_i$ et $a_i = -\frac{3}{50} v_i + 2$ utilisées pour appliquer la méthode d'Euler, sachant qu'à l'instant $t = 0$ la vitesse est $v_0 = 0$.

Il est clair que la vitesse du wagonnet est une fonction croissante du temps qui prend ses valeurs entre 0 et la vitesse limite soit ici dans l'intervalle $[0; \frac{100}{3}]$.

Par conséquent pour tout entier naturel i on doit avoir : $0 \leq v_i < \frac{100}{3}$. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, tentons de démontrer cet encadrement :

Par hypothèses on sait que $v_0 = 0$ donc au rang de « départ » la propriété est vérifiée. Supposons que pour un entier naturel fixé i , mais quelconque, on ait $0 \leq v_i < \frac{100}{3}$. La propriété est-elle héréditaire ? De l'hypothèse de récurrence, on déduit successivement que :

$$-2 < -\frac{3}{50} v_i \leq 0 \text{ donc } 0 < -\frac{3}{50} v_i + 2 \leq 2,$$

c'est-à-dire $0 < a_i \leq 2$.

Comme Δt , v_i et a_i sont positifs alors $v_{i+1} = a_i \Delta t + v_i$ est positif. On peut alors conclure que pour tout entier naturel i , on a : $v_i \geq 0$.

Reste à savoir si $v_{i+1} < \frac{100}{3}$ sachant que $0 \leq v_i < \frac{100}{3}$.

Or $v_{i+1} < \frac{100}{3}$ équivaut successivement à :

$$a_i \Delta t + v_i < \frac{100}{3}$$

$$\left(-\frac{3}{50} v_i + 2\right) \Delta t + v_i < \frac{100}{3}$$

$$\text{(puisque } a_i = -\frac{3}{50} v_i + 2)$$

$$-\frac{3}{50} \left(v_i - \frac{100}{3}\right) \Delta t + v_i - \frac{100}{3} < 0$$

$$\left(v_i - \frac{100}{3}\right) \left(-\frac{3}{50} \Delta t + 1\right) < 0$$

$$-\frac{3}{50} \left(v_i - \frac{100}{3}\right) \left(\Delta t - \frac{50}{3}\right) < 0$$

$$\left(v_i - \frac{100}{3}\right) \left(\Delta t - \frac{50}{3}\right) > 0$$

D'après l'hypothèse de récurrence $v_i < \frac{100}{3}$

donc $v_i - \frac{100}{3} < 0$ et $\left(v_i - \frac{100}{3}\right) \left(\Delta t - \frac{50}{3}\right) < 0$

équivaut à $\Delta t - \frac{50}{3} < 0$. Or, cette inéquation a pour ensemble de solutions l'intervalle $[0; \frac{50}{3}]$.

Examinons le cas $\Delta t \in [0; \frac{50}{3}]$. Pour

$0 \leq \Delta t < \frac{50}{3}$, on a $v_{i+1} < \frac{100}{3}$ et ainsi, on peut

conclure pour tout entier naturel i : $0 \leq v_i < \frac{100}{3}$.

De plus pour tout entier naturel i , $v_{i+1} - v_i = a_i \Delta t$, sachant que a_i et Δt sont positifs on en déduit que $v_{i+1} - v_i \geq 0$. La suite $(v_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée donc convergente.

Pour tout entier naturel i , on a vu que :

$$v_{i+1} = \left(-\frac{3}{50} v_i + 2\right) \Delta t + v_i$$

soit

$$v_{i+1} = \left(1 - \frac{3}{50} \Delta t\right) v_i + 2 \Delta t.$$

Considérons la restriction à l'intervalle $\left[0; \frac{100}{3}\right]$ de la fonction affine f définie par :

$$f(x) = \left(1 - \frac{3}{50} \Delta t\right) x + 2 \Delta t. \text{ Puisque } 0 \leq \Delta t < \frac{50}{3}$$

équivalent à $0 < \left(1 - \frac{3}{50} \Delta t\right) \leq 1$ alors f est strictement croissante sur $\left[0; \frac{100}{3}\right]$ (coefficient directeur strictement positif) à valeurs dans $\left[f(0); f\left(\frac{100}{3}\right)\right] = \left[2 \Delta t; \frac{100}{3}\right]$.

Comme $0 \leq \Delta t < \frac{50}{3}$ alors $2 \Delta t \in \left[0; \frac{100}{3}\right]$ et ainsi :

$$\left[0; \frac{100}{3}\right] \supset \left[2 \Delta t; \frac{100}{3}\right].$$

— La fonction f est continue sur $\left[0; \frac{100}{3}\right]$, qui est un intervalle stable par f ;

— il est clair que pour tout entier naturel i , $v_{i+1} = f(v_i)$;

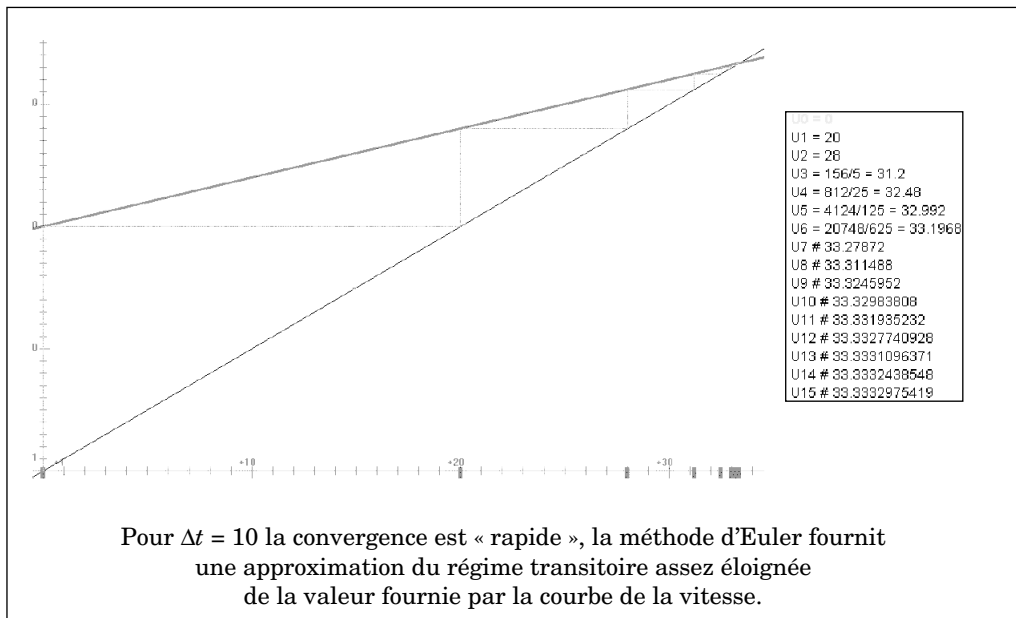
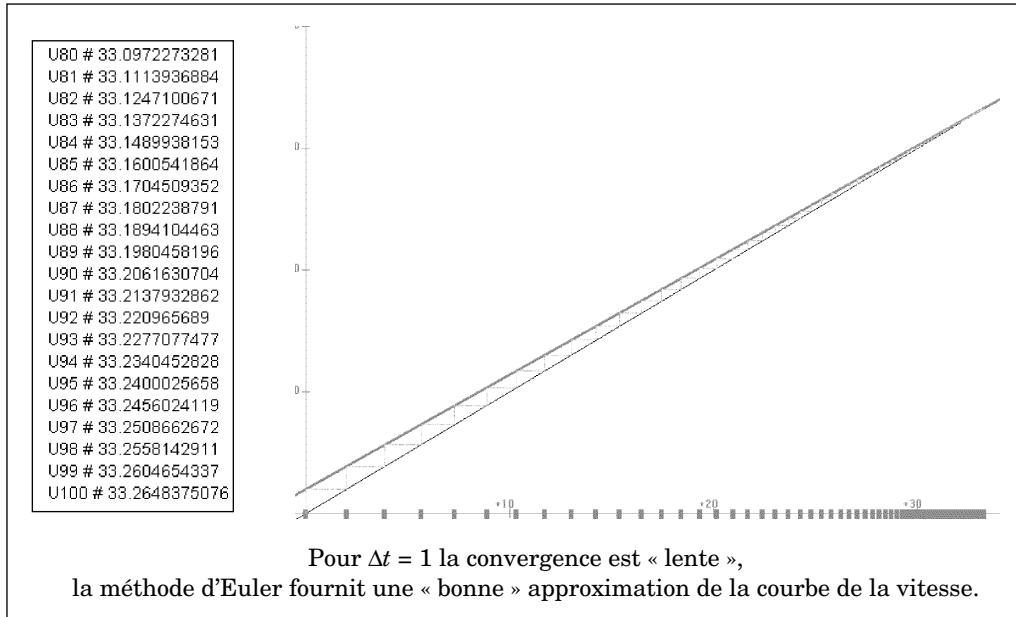
— sachant que pour tout entier naturel i , $v_i \in \left[0; \frac{100}{3}\right]$ [et que la suite $(v_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est convergente ; alors la limite de cette suite ne peut être qu'un point fixe de f appartenant à l'intervalle $\left[0; \frac{100}{3}\right]$.

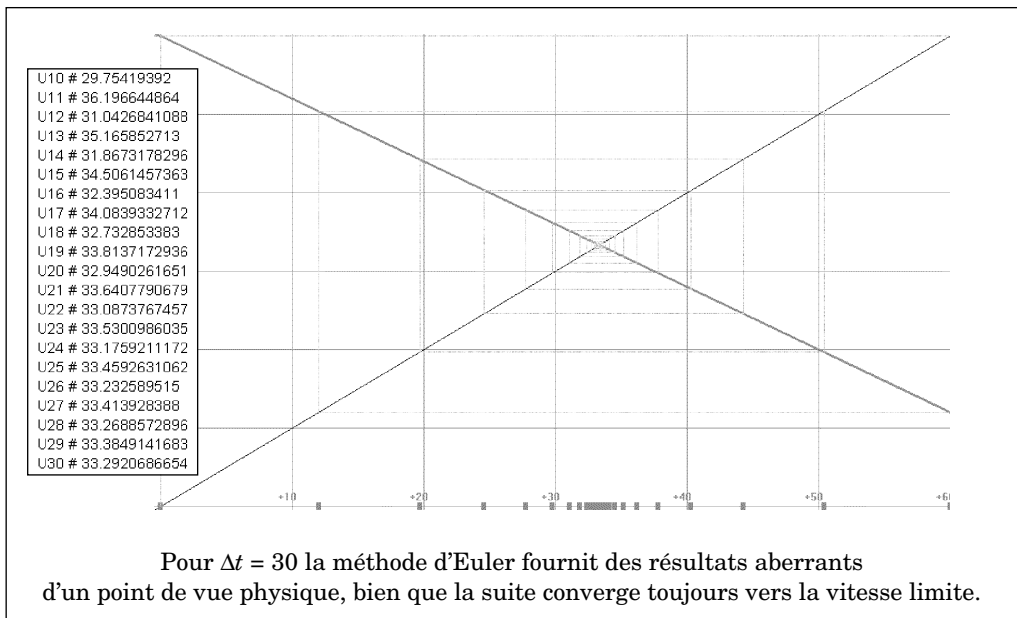
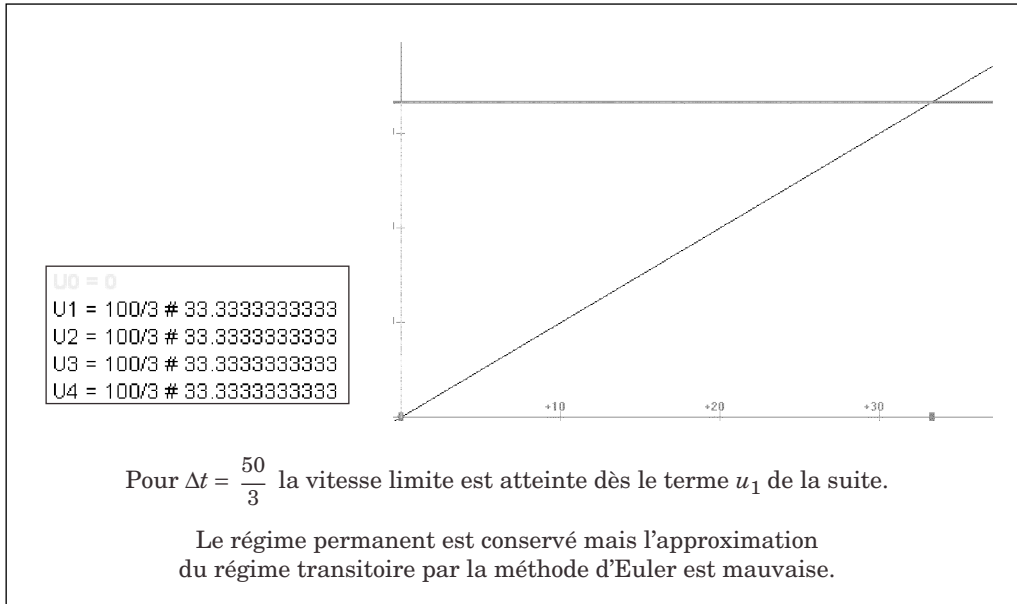
En résolvant l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $\left[0; \frac{100}{3}\right]$, on trouve une solution unique $x = \frac{100}{3}$.

Résumons-nous dans ce cas :

Pour $\Delta t \in \left[0; \frac{50}{3}\right]$, la suite croissante $(v_i)_{i \in \mathbb{N}}$ converge vers la vitesse limite $\frac{100}{3}$. La méthode d'Euler peut être appliquée et donnera des résultats cohérents. L'étude des variations de f montre qu'en prenant $v_0 = 0$, tous les termes de la suite croissante $(v_i)_{i \in \mathbb{N}}$, à partir de v_1 sont dans l'intervalle $\left[2 \Delta t; \frac{100}{3}\right]$.

Ceci suffit à justifier que plus Δt est proche de $\frac{50}{3}$ (mais strictement inférieur à cette valeur) plus la convergence de la suite vers la vitesse limite est rapide ce qui explique l'écart de plus en plus important entre les courbes obtenues par le méthode d'Euler et la courbe « exacte » en ce qui concerne le régime transitoire. On en déduit par contraposition que l'approximation fournie par la méthode d'Euler





est d'autant meilleure que Δt est « petit » devant le nombre $\frac{50}{3}$.

Bien sûr, chacun aura reconnu en $\frac{50}{3}$ la valeur du temps caractéristique τ .

Que se passe-t-il dans le cas $\Delta t = \frac{50}{3}$ c'est-à-dire $\Delta t = \tau$?

Sachant que $v_0 = 0$, on calcule successivement :

$a_0 = 0$, $v_1 = \frac{100}{3}$. Une « récurrence immédiate »

prouve que pour tout entier naturel non nul i on a : $v_i = \frac{100}{3}$. D'ailleurs, il est à noter

que, quelle que soit la valeur de la vitesse initiale v_0 , pour tout entier naturel non nul i

on a : $v_i = \frac{100}{3}$ (vérification aisée).

Ainsi pour $\Delta t = \tau$, la convergence de $(v_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est extrêmement rapide, puisqu'à partir de v_1 tous les termes de la suite sont égaux à $\frac{100}{3}$. C'est pour cette valeur

τ de Δt que l'écart entre les courbe obtenue par le méthode d'Euler et la courbe « exacte » est maximal en ce qui concerne le régime transitoire.

Et dans le cas $\Delta t > \frac{50}{3}$ c'est-à-dire $\Delta t > \tau$?

Ici on a $\Delta t - \frac{50}{3} > 0$, donc $(v_i - \frac{100}{3})(\Delta t - \frac{50}{3}) > 0$

équivalent à $(v_i - \frac{100}{3}) > 0$, ce qui contredit

l'hypothèse de récurrence $0 \leq v_i < \frac{100}{3}$.

La propriété n'est pas héréditaire donc elle n'est pas vraie pour tout entier naturel i . En outre, on peut justifier facilement que :

— si $v_i < \frac{100}{3}$ alors $v_{i+1} > \frac{100}{3}$;

— si $v_i > \frac{100}{3}$ alors $v_{i+1} < \frac{100}{3}$.

Ainsi pour $\Delta t > \tau$, il y a des termes de la suite $(v_i)_{i \in \mathbb{N}}$ qui sont strictement supérieurs à la vitesse limite, ce qui bien sûr n'est pas réaliste. Dans ce cas, la méthode d'Euler ne peut pas être appliquée puisqu'elle conduit, du point de vue physique, à une aberration.

L'étude précédente, bien qu'un peu longue, confirme les résultats expérimentaux qui sont résumés par les graphiques de la page située à la fin de l'article.

IV. Conclusion.

Dans l'exemple du wagonnet, l'avantage de la méthode mathématique est indiscutable, alors :

Pourquoi utilise-t-on quand même la méthode d'Euler en physique en terminale S ?

La réponse est apportée par la physique. Pour des vitesses « assez petites », la modélisation des forces de frottement par une relation du type $f = kv$ (forces de frottement proportionnelles à la vitesse) est adoptée. Mais, pour des vitesses plus élevées, ces mêmes forces sont modélisées (par exemple) par une relation du type $f = kv^2$ (forces de frottement proportionnelles au carré de la vitesse) et l'équation différentielle de la vitesse n'est plus de la forme $y' = ay + b$ avec $a \neq 0$.

Intérêts de tels travaux interdisciplinaires physique-mathématiques.

La présence des enseignants des deux matières pendant certaines séquences de cours, le choix d'activités faisant intervenir et prolongeant les connaissances acquises en physique et mathématiques contribuent à prouver aux élèves, de manière irréfutable, que les deux disciplines sont loin d'être cloisonnées mais au contraire interagissent entre elles.

Côté physique, un travail de concert entre les deux enseignants permet d'appréhender les notions de physique en maîtrisant l'outil mathématique indispensable aux applications (*exponentielle pour la radioactivité, fonctions ln et log, dérivée, primitives, résolution graphique et analytique d'équations différentielles pour la mécanique et l'électricité, etc.*). Il en résulte, par ailleurs, pour l'enseignant de physique un gain de temps considérable.

Côté mathématique, le gain de temps est aussi appréciable et la concertation entre les deux enseignants présente un côté rassurant pour les élèves.

En outre, en terminale S de nombreuses notions sont abordées et, si toutes confirment que les mathématiques sont une discipline à part entière (*que ce soit en enseignement obligatoire ou en enseignement de spécialité*) seuls les travaux interdisciplinaires prouvent leur rôle indispensable dans la modélisation et qu'ainsi elles ne sont pas « coupées » de la réalité.

Le point de vue des élèves sur l'exercice de mathématiques.

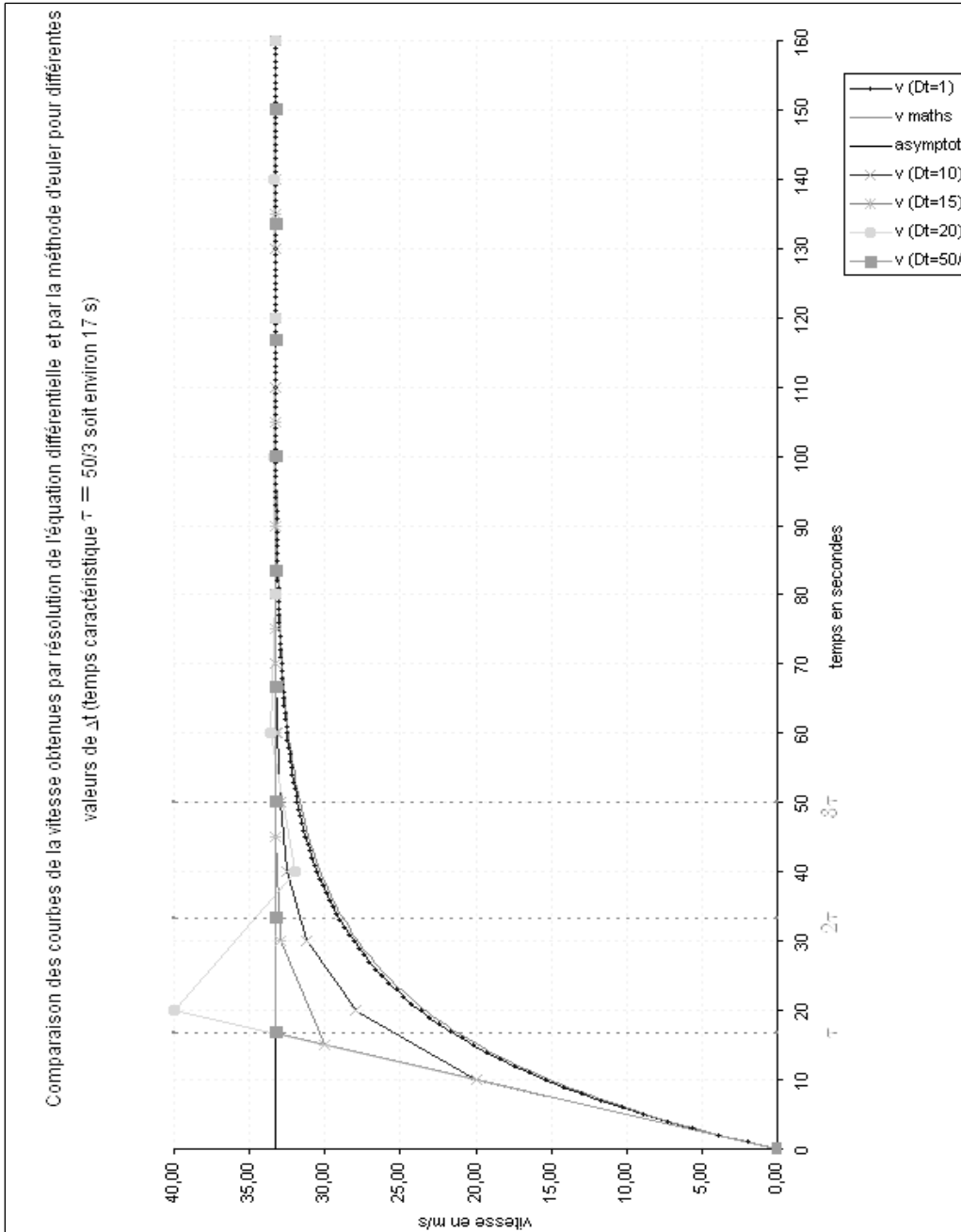
D'une enquête rapide et anonyme auprès des élèves de la classe, avec pour unique question : « Que pensez-vous de cet exercice ? », il ressort les avis présentés dans le tableau ci-dessous.

POUR	CONTRE
<ul style="list-style-type: none"> • exercice jugé intéressant (<i>par la classe entière</i>) ; • permet d'améliorer la compréhension dans les deux matières (<i>une grande majorité</i>) • exercice à renouveler sur d'autres parties du programme voire d'autres matières, sciences et vie de la Terre en particulier (<i>la majorité des élèves</i>) ; • établir l'équation différentielle permet de faire un travail non réduit à l'application d'une simple formule (<i>la majorité des élèves</i>) ; • permet de voir l'interaction entre les deux disciplines (<i>la majorité des élèves</i>) ; • l'exercice montre l'utilité des mathématiques (<i>quelques élèves</i>). 	<p><i>(dans cette colonne, excepté le premier point, ce sont essentiellement des réponses isolées mais caractéristiques de ce que l'on peut entendre sur ce type d'exercice)</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • il manque un peu de temps (<i>environ 40% de l'effectif</i>) ; • plus difficile que la physique ou les mathématiques séparément ; • l'abondance de lettres perturbe et complique les calculs ; • jugé trop long pour un exercice le jour du bac ; • demande une bonne maîtrise des notions de physique et de mathématiques ; • le jour de l'examen, il serait dommage de faire des erreurs de physique lors de l'épreuve de mathématiques.

Projet pour l'année prochaine.

Le même type de problème, mais adapté à la chute d'une bille dans un fluide qui a deux avantages par rapport au précédent. D'abord, il est plus respectueux du

programme de physique actuellement en vigueur (*chute verticale d'un objet dans les fluides*) ensuite, nous pourrions obtenir directement des données expérimentales et les mesures de la vitesse peuvent être effectuées à l'aide d'un logiciel.



ANNEXE

Evolution temporelle des systèmes

	A. Propagation d'une onde ; ondes progressives			B. Transformations nucléaires
	A.1. Ondes mécaniques		A.3. Ondes lumineuses	
	A.2. Ondes mécaniques progressives	sinusoïdales		
Grandeurs dépendant du temps	<ul style="list-style-type: none"> - élongation - pression, tension 	<ul style="list-style-type: none"> - élongation - pression, tension 	<ul style="list-style-type: none"> - grandeurs électromagnétiques (non vues en TS) - indice n du milieu 	<ul style="list-style-type: none"> - population (nombre de noyaux radioactifs) N - nombre de nucléons A - nombre de protons Z - nombre de neutrons, $A-Z$
Paramètres qui interviennent dans l'évolution temporelle du phénomène	<ul style="list-style-type: none"> - inertie (masse volumique, masse linéique ...) - élasticité (tension d'une corde, raideur d'un ressort, compressibilité d'un fluide ...) 	<ul style="list-style-type: none"> - inertie (masse volumique, masse linéique ...) - élasticité (tension d'une corde, raideur d'un ressort, compressibilité d'un fluide ...) 		
Conditions initiales	<ul style="list-style-type: none"> - amplitude et forme de la déformation initiale - vitesse initiale - écart à la pression initiale 	<ul style="list-style-type: none"> - amplitude et forme de la déformation initiale - vitesse initiale - écart à la pression initiale 		<ul style="list-style-type: none"> - population N_0 à l'instant choisi pour origine des dates
Temps caractéristique		<ul style="list-style-type: none"> - période T 	<ul style="list-style-type: none"> - période T 	<ul style="list-style-type: none"> - demi-vie $t_{1/2}$ - constante de temps $\tau = 1/\lambda$ - monotone
Régime		<ul style="list-style-type: none"> - oscillant 	<ul style="list-style-type: none"> - oscillant 	
Autres paramètres	<ul style="list-style-type: none"> - célérité v 	<ul style="list-style-type: none"> - célérité v - période T - fréquence ν - longueur d'onde λ 	<ul style="list-style-type: none"> - célérité dans le vide c - période T - fréquence ν - longueur d'onde λ 	<ul style="list-style-type: none"> - constante radioactive λ

Accompagnement des programmes de physique-chimie de terminale S
Document de travail – EDUSCOL mars 2002

C. Evolution des systèmes électriques				
	C.1. Dipôle (R,C)		C.2. Dipôle (R,L)	
			C.3. Dipôles (RLC)	
	Oscillations libres amorties		Oscillations libres entretenues	
Grandeurs caractéristiques dépendant du temps	<ul style="list-style-type: none"> - tension aux bornes du condensateur $u(t)$ - charge du condensateur $q(t)$ - intensité $i(t)$ 	<ul style="list-style-type: none"> - tension aux bornes de la bobine $u(t)$ - intensité $i(t)$ - charge du condensateur $q(t)$ 	<ul style="list-style-type: none"> - tension aux bornes du condensateur et de la bobine idéale $u_c(t), u_l(t)$ - charge du condensateur $q(t)$ - intensité $i(t)$ 	<ul style="list-style-type: none"> - tension $u_c(t)$ - charge du condensateur $q(t)$ - intensité $i(t)$
Paramètres qui interviennent dans l'évolution temporelle du phénomène	<ul style="list-style-type: none"> - résistance R - capacité C 	<ul style="list-style-type: none"> - résistance R du circuit - inductance L 	<ul style="list-style-type: none"> - résistance R du circuit - inductance L - capacité C 	<ul style="list-style-type: none"> - résistance R du circuit - inductance L - capacité C - énergie fournie par le dispositif d'entretien
Conditions initiales	<ul style="list-style-type: none"> - charge initiale du condensateur 	<ul style="list-style-type: none"> - intensité initiale 	<ul style="list-style-type: none"> - énergie initiale stockée dans le système (RLC) - charge initiale du condensateur - intensité initiale 	
Temps caractéristique	<ul style="list-style-type: none"> - Constante de temps $\tau = RC$ 	<ul style="list-style-type: none"> - Constante de temps $\tau = L/R$ 	<ul style="list-style-type: none"> - pseudo-période T - période propre T_0 	<ul style="list-style-type: none"> - période égale à la période propre T_0
Régime	<ul style="list-style-type: none"> - monotone 	<ul style="list-style-type: none"> - monotone 	<ul style="list-style-type: none"> - oscillant-amorti - aperiodique 	<ul style="list-style-type: none"> - oscillant
Autres paramètres	<ul style="list-style-type: none"> - E, m, E (échelon de tension) 	<ul style="list-style-type: none"> - E, m, E de l'échelon de tension 		

Accompagnement des programmes de physique-chimie de terminale S
Document de travail – EDUSCOL mars 2002

D. Evolution temporelle des systèmes mécaniques				
D.2.1. Chute verticale d'un solide		D.2.2. Mouvements plans		D.3. Systèmes oscillants
Avec frottement	Chute libre	Projectiles (frottements négligés)	Planètes et satellites	Avec frottements
Sans frottement				
Grandeurs caractéristiques dépendant du temps	<ul style="list-style-type: none"> - vecteur position OM - abscisse $z(t)$ - vecteur vitesse $v(t)$ - vecteur accélération $a(t)$ 	<ul style="list-style-type: none"> - vecteur position OM - coordonnées $x(t), z(t)$ - vecteur vitesse $v(t)$ 	<ul style="list-style-type: none"> - vecteur position OM - vecteur vitesse $v(t)$ - vecteur accélération $a(t)$ 	<ul style="list-style-type: none"> - écart à l'équilibre : abscisse $x(t)$, angle $\theta(t)$ - vecteur vitesse $v(t)$ - vecteur accélération $a(t)$
Paramètres qui interviennent dans l'évolution temporelle du phénomène	<ul style="list-style-type: none"> - masse m - dimensions, forme - nature du fluide (viscosité, masse volumique) - champ de pesanteur g 	<ul style="list-style-type: none"> - champ de pesanteur g 	<ul style="list-style-type: none"> - masse de l'attracteur M 	<ul style="list-style-type: none"> - masse m - longueur l du pendule - raideur k du ressort - champ de pesanteur g - frottements
Conditions initiales	<ul style="list-style-type: none"> - position initiale - vitesse initiale 	<ul style="list-style-type: none"> - position initiale - vitesse initiale, angle de tir 	<ul style="list-style-type: none"> - altitude - vecteur vitesse initiale - période T 	<ul style="list-style-type: none"> - écart à l'équilibre à $t = 0$ s - vitesse initiale - pseudo-période T - période propre T_0
Temps caractéristique	<ul style="list-style-type: none"> - constante de temps : date qui correspond, pour la courbe $x_G = f(t)$, au point d'intersection de la tangente à l'origine ($v = 0$ m.s⁻¹) et de l'asymptote (v_{lim}) - monotone 			
Régime	<ul style="list-style-type: none"> - monotone 	<ul style="list-style-type: none"> - varié 	<ul style="list-style-type: none"> - périodique 	<ul style="list-style-type: none"> - oscillant amorti - aperiodique
Autres paramètres	<ul style="list-style-type: none"> - masse - dimensions 	<ul style="list-style-type: none"> - masse - dimensions, forme 	<ul style="list-style-type: none"> - distance au centre de l'attracteur - masse de la planète, du satellite 	