" INSCRIRE UN CARRE DANS UN TRIANGLE "

Jean TERRERAN
Lycée C & R Janot, Sens

Ce problème, posé aux élèves de seconde en 1947 par Lebossé et Hémery ([LEB1947]) est un classique, voire un « incontournable » [1]. Ainsi, en 1484, Nicolas Chuquet dans sa *Géométrie* ([CHU1979]) demandait, parmi de nombreux autres problèmes d'inscription de figures, de *calculer le côté du carré inscrit dans un triangle équilatéral*. H. L'Huillier signale que c'est un problème classique chez les géomètres italiens (Fibonacci, Pacioli,...) où l'on trouve aussi un triangle isocèle (Piero de la Francesca) et même le triangle 13.14.15.

Au XVIIIème siècle, Etienne Bézout proposait d'*appliquer l'algèbre à la géométrie* ([BEZ1788]) pour construire ce carré [2]. En revanche, on ne trouve de traces de ce problème ni dans Les *Éléments* d'Euclide ([EUC1993]), ni dans les *Éléments de Géométrie* de Clairaut ([CLA1987]).

Au cours du temps les modes de résolution changent au gré des changements de programme : conformément au programme de 1931, P. Chenevier ([CHE1931]) propose aux élèves de seconde de procéder comme Bézout, sans le citer. En 1947, Lebossé et Hémery utilisent l'outil « homothétie ». Aujourd'hui le programme de seconde 2000 fournit l'outil « triangles semblables ». J'avais souvent proposé cet exercice aux élèves de seconde, c'était un bon exemple d'application des homothéties. La découverte du

1 Un article sur le sujet écrit par Patrick Guyot a déjà été publié dans le Repère n° 51, d'avril 2003 ([GUY2003]).
2 L'édition originale parut en 1770 à l'Imprimerie Royale. Le Cours de mathématiques à l'usage des gardes du pavillon et de la marine avait été publié à Paris, en 6 volumes, à partir de 1764.

texte de Bézout allait me permettre de le proposer à nouveau. La première tentative, sous forme de problème ouvert a été un échec.

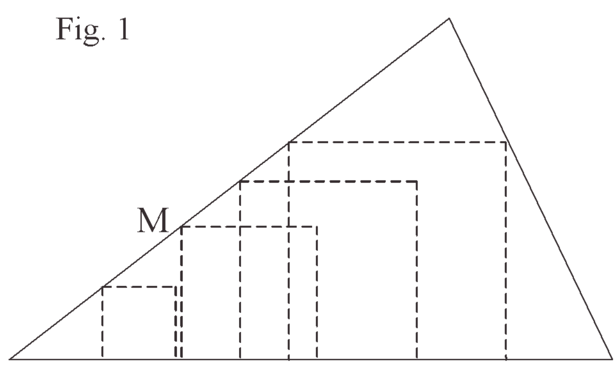
Que font les élèves ?

Il y a ceux qui construisent un rectangle et qui cherchent en vain à le transformer en carré et ceux qui, par des constructions « miraculeuses », pensent avoir trouvé la solution Il faut alors beaucoup de temps et de persuasion pour les convaincre (le sont-ils vraiment ?) de leurs erreurs. Avant que tout le monde ne se décourage, il faut renoncer à examiner ces solutions et proposer d'autres pistes. On comprend bien pourquoi l'Académie Royale des Sciences a fini, sous l'impulsion de d'Alembert, par ne plus examiner les solutions au problème de la quadrature du cercle.

Certains ont ainsi construit un carré dans le triangle et ont modifié le troisième côté de ce triangle, Thalès ou les triangles semblables permettant de trouver la solution. Les autres ont inscrit des carrés de différentes tailles (voir la fig.1) et ont... observé ; ils conjecturent alors assez vite un alignement qui leur permet de conclure. Au risque de choquer les puristes, cette méthode s'apparente fort à la méthode de fausse position utilisée en algèbre : une « fausse position » du sommet M sur un des côtés permet d'en déduire la bonne solution. Ce n'est pas surprenant dans la mesure où, dans les deux cas, il s'agit d'un problème de proportionnalité ; dans le cas géométrique, le mot position retrouve son sens traditionnel.

Mis à part cette remarque qui avait plu aux élèves, cette activité reste relativement pauvre. Dans son article sur le même sujet, Patrick Guyot pose la même question, mais avec beaucoup plus de succès. Heureusement Bézout allait arriver. Malgré le handicap de n'être pas bourguignon [3 & 4], la proximité de sa ville natale — Nemours n'est qu'à dix lieues de Sens — est peut-être une des raisons pour lesquelles la bibliothèque municipale de cette ville possède plusieurs de ses ouvrages [5]. Le théorème d'arithmétique qu'on lui attribue res-

Fig. 1



3 Le groupe « Histoire des Maths » de l'Irem de Dijon étudie depuis quelques années les mathématiciens bourguignons.
4 Non bourguignon, certes, mais que serait-il advenu si le duc Sans Peur n'avait été assassiné au pont de Montereau, à moins de quatre lieues de Nemours, en 1419 ?
5 L'exemplaire de la Bibliothèque de Sens appartenait au citoyen français Bourbon Berset, lui a-t-il été confisqué en 1793 ?

tait un bon souvenir de Terminale C et constituait une invitation à en savoir plus sur ce mathématicien du XVIIIème.

Si le tome 1 (Arithmétique et géométrie) de son *Cours de Mathématiques* est assez classique, le tome 2 (« contenant l'algèbre & l'application de l'algèbre à la géométrie ») comporte en revanche plusieurs idées originales. La suite de cet article présente une activité construite à partir de sa méthode d'inscription du carré dans le triangle (on la trouvera *in extenso* sur le site de l'Irem de Dijon ([DIJ]).)

En utilisant les heures en demi-classe, les élèves ont été répartis en groupes de trois ou quatre.

Séance n°1 : (55 min)

exercice 1 :

Voici le texte, sans la figure, d'un problème posé par Etienne Bézout (1) dans son Cours de Mathématiques à l'usage du Corps Royal de l'Artillerie (Édition de 1788) :

Proposons- nous donc pour première question, de *décrire un quarré* ABCD (fig.9) *dans un triangle donné EHI.*

1°) Lire cet énoncé et reformuler la consigne pour qu'elle soit plus facilement comprise par un élève du XXIème siècle.

(1) Etienne Bézout est un mathématicien né en 1730 près de Sens, à Nemours où le lycée porte son nom, et est mort aux Basses-Loges, près de Fontainebleau, en 1783.

Les élèves ont déjà travaillé sur un texte du XVIIIème (Le calcul approché de $\sqrt{20}$ par la méthode d'Euler). Ils traduisent tous, ou presque, « décrire » par « inscrire » sans difficulté.

2° On donne, (cf. p. 8), la solution de Bézout. Les questions posées ci-dessous doivent permettre de comprendre chaque étape de la construction et de la démonstration. La reproduction de la figure 9 étant de mauvaise qualité, on a ébauché une nouvelle figure que l'on complétera au fur et à mesure de la lecture.

a. Lire les lignes 1 à 3 et observer la figure : la consigne a-t-elle été bien traduite ?

b. Lire les lignes 4 à 10 et expliquer ce que veut faire l'auteur.

c. Lire les lignes 11-12 : Comment les données et les inconnues sont-elles nommées ?

d. Lire la ligne 13 : Quel théorème du cours de seconde reconnaît-on dans le paragraphe donné en bas de page sous la réf. *Géom.109* ?

e. Écrire les rapports que l'on peut déduire de la similitude des triangles, puis observer comment ces proportions étaient écrites au XVIIIème siècle (ligne 14). On lit :

EF est à EG comme FI est à GB, comme ...

Par exemple : « 6 est à 2 comme 21 est à 7 » ou « 40 est à 5 comme 96 est à ...»

f. Dans la section *Arithmétique* de l'ouvrage, au paragraphe 169, Bézout rappelle simplement les règles de calcul qui permettent de transformer des rapports. Lire alors les lignes 15 à 16 et refaire les calculs.

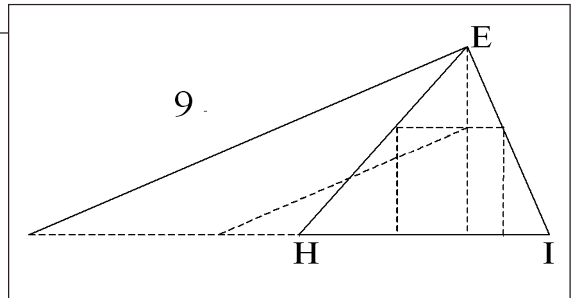
Vérifier que l'on obtient bien : $x = ab/(a+b)$.

g. Lire les lignes 17-18. Quelle est la quatrième proportionnelle à $a + b$, b et a ?

Dans le paragraphe 184, Bézout rappelle que l'on sait construire cette quatrième proportionnelle à la règle et au compas.

h. Lire et comprendre la méthode de Bézout (lignes 19 à 21), en notant, au fur et à mesure sur la figure, les lettres correspondantes.

i. A quoi les lignes 22 & 23 servent-elles ?



Par ces mots, un triangle donné, nous entendons un triangle dans lequel tout est connu, les côtés, les angles, la hauteur, &c.

Avec un peu d'attention, on voit que cette question se réduit à trouver sur la hauteur EF un point G par lequel menant AB parallèle à HI, cette ligne AB soit égale à GF ; ainsi l'équation se présente tout naturellement, il n'y a qu'à déterminer l'expression algébrique de AB, & celle de FG, & ensuite les égaler.

Nommons donc a la hauteur connue EF ; b, la base connue HI, & x la ligne inconnue GF ; alors EG vaudra $a - x$.

Or puisque AB est parallèle à HI, on doit (*Géom.* 109) avoir EF : EG :: FI : GB :: HI : AB ; c'est-à-dire, EF : GE :: HI : AB , ou $a : a - x :: b :$ AB , donc (*Arith.* 169) AB = $\dfrac{ab - bx}{a}$;

puis donc que AB doit être égal à GF, on aura $\dfrac{ab - bx}{a} = x$; d'où, par les règles de la première Section, on tire $x = \dfrac{ab}{a + b}$.

Pour construire cette quantité, il faut, conformément à ce que nous avons dit (184), trouver une quatrième proportionnelle à $a + b$, b , & a , ce que l'on exécutera en cette manière. On portera de F en O une ligne FO égale à $a + b$, c'est-à-dire égale à EF + HI, & l'on tirera EO ; puis ayant pris FM égale à HI = b , on mènera, parallèlement à EO, la ligne MG, qui par sa rencontre avec EF, déterminera GF pour la valeur de x ; car les triangles semblables EFO , GFM , donnent FO : FM :: FE : FG , ou $a + b : b :: a :$ FG ;

FG vaudra donc $\dfrac{ab}{a + b}$.

109. *Deux triangles qui ont les angles égaux chacun à chacun, ont les côtés homologues proportionnels, & sont, par conséquent, semblables.*

Que font les élèves ?

a. Les élèves ont beaucoup de difficultés à admettre l'expression *triangle donné* : « On n'a pas le droit de mesurer, donc on ne connaît rien ! » Toute la difficulté de la détermination d'une donnée par une lettre resurgit.

b. Même les élèves qui « voient » ce que Bézout veut faire (« s'il trouve G, il aura le carré ») rechignent à l'exprimer. La plupart d'entre eux préfère se lancer directement dans la résolution sans annoncer d'abord la stratégie choisie, ce n'est pas nouveau.

c. Pas de difficulté.

d. On reconnaît sans hésiter les triangles semblables, et l’expression *égaux chacun à chacun* est jugée plus précise que l’énoncé proposé dans le cours.

e. & f. Le guidage proposé pour comprendre cette partie a éliminé toute difficulté. Il serait peut-être plus riche de les aider moins et de les laisser chercher davantage.

g. Peu d’élèves comprennent le terme *quatrième proportionnelle*, ils maîtrisent pourtant assez bien les tableaux de proportionnalité vus en collège, mais ils les considèrent peut-être comme une boîte noire.

h. C’est une partie délicate. S’ils savent établir des proportions dans des circonstances données, ils n’imaginaient pas que l’on puisse provoquer des situations pour en créer[6]. Je leur ai signalé que Descartes, mais aussi d’autres avant lui, remplaçait le côté de longueur $a + b$ par un côté de longueur 1 et obtenait ainsi le produit $a \times b$ de deux nombres donnés. Quelques élèves ont tenu à vérifier.

i. Pas de difficulté.

Que font les élèves ? *(Séance 2)*

1°. Pas de difficulté.

2°. Chacun se doute que c’est le triangle rectangle le plus pratique (mais c’est le seul triangle particulier, il faudrait proposer aussi un triangle isocèle pour voir) moins nombreux sont ceux qui réussissent. Ceux-là tracent la bissectrice, non parce que tout point de la bissectrice est équidistant des côtés de l’angle droit, mais parce que la diagonale du carré est à 45°.

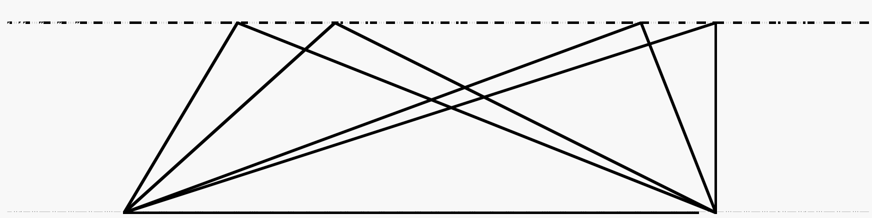
Commentaires :

Toutes ces solutions sont astucieuses et peuvent susciter l’admiration de quelques-uns, mais les autres se demandent pourquoi s’ingénier à inscrire des figures dans d’autres figures : « Déjà qu’on a du mal à construire le cercle inscrit dans un triangle ! » Hélas ! Aucun des auteurs cités plus haut ne répond à cette question. On trouve bien aujourd’hui, dans les manuels d’analyse de 1ère, une échelle de 6 m que l’on ne peut approcher du pied du mur

Séance n° 2 : (55 min) **exercice 2 :**

On a vu que la méthode de Bézout consistait à construire la grandeur $x = ab/(a+b)$.

1. Expliquer pourquoi les carrés inscrits dans chacun des quatre triangles ci-dessous sont égaux.



2. En déduire un troisième mode de construction du carré inscrit, en utilisant le triangle le plus approprié parmi les quatre proposés.

6 Dans l’activité de Patrick Guyot, Marolois et Al Khwarizmi proposent directement, sans analyse préalable, une solution, respectivement géométrique et algébrique, que les élèves justifient.

autant qu'on le voudrait à cause d'un bloc de béton cubique de 1 m^3 ; la question étant de savoir quelle hauteur on va pouvoir atteindre. Mais on peut difficilement croire que ce problème seul a motivé Bézout et tous les autres.

Alors imaginons ...

exercice 3 :

Reprenons la formule de Bézout $x = ab/(a+b)$. Cette relation peut s'écrire aussi : (rayer la relation fausse)

$$\frac{x}{a} = \frac{b}{a+b} \quad \text{ou} \quad x(a+b) = ab$$

$$x = \frac{b}{1+b} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

Entourer celle qui a été utilisée lors de la construction de Bézout et faire vérifier. Dans les exercices qui suivent, on va utiliser les autres formes.

Que font les élèves ?

Il est plus prudent de vérifier soigneusement tous ces résultats, les simplifications sont parfois fantaisistes (on l'a bien cherché !) La dernière forme est souvent rejetée et la réduction au même dénominateur n'est réussie qu'au terme de beaucoup de souffrances.

exercice 4 :

Définition : a et b étant deux nombres positifs donnés, le nombre Y défini par la relation

$$\frac{1}{Y} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

s'appelle la *moyenne harmonique* de a et b. (Elle a peut-être été inventée par les Pythagoriciens pour la musique).

1° *Exemples :*

a. Vérifier que 7 est la moyenne harmonique de 4 et 28.

b. Résoudre l'exercice (travail personnel) pour la prochaine séance.

2° Trouver une relation entre Y et le côté x du carré construit précédemment.

3° Ainsi, inscrire un carré dans un triangle permet de construire « à la règle et au compas » la moyenne harmonique de deux nombres a et b donnés, il suffit pour cela de :

- Construire le double de x ❑
- Doubler d'abord a dans le triangle ❑
- Doubler d'abord b dans le triangle ❑
- Doubler d'abord a et b dans le triangle ❑

(Cocher les bonnes réponses et faire vérifier)

Que font les élèves ?

2° Ce calcul est encore insurmontable pour trop d'élèves.
1° et 3° Bien réussis en général.

Commentaires :

S'il s'agissait réellement d'un mode de construction de la moyenne harmonique, il serait étonnant qu'Euclide n'ait pas proposé sa propre solution dans les *Éléments*, alors qu'il connaissait ces moyennes et qu'il donne une construction de la moyenne géométrique de a et b.

Or, si l'on écrit la relation de Bézout sous la forme $ab = (a + b)x$, le problème revient à égaler deux aires de parallélogrammes (ou de rectangles), l'un donné par sa base a et sa hauteur b, l'autre par sa base $a + b$, et sa hauteur cherchée. La construction découle alors directement de la proposition VI.24 des *Éléments*[7].

exercice 5 : *(à commencer en classe si vous êtes en avance, à terminer à la maison.)*

1° Construire un rectangle MNPQ et un rectangle MRSQ qui contient MNPQ et dont la longueur MR vaut MN + NP.

2° La diagonale [MS] coupe [NP] en T. La parallèle à (MN) passant par T coupe [MQ] en U et [RS] en V.

a. Montrer que les rectangles TPQU et NRVT ont même aire.

b. En déduire que les rectangles MRVU et MNPQ ont même aire.

3° On appelle a et b les longueurs respectives NP et MN. A l'aide d'une des relations de l'exercice 3 non encore utilisées, donner la valeur de la longueur NT.

(Cette dernière méthode de construction est due à Euclide au IIIème siècle av. J.C)

Que font les élèves ?

1° & 2° Bien réussi : tout le monde utilise, sans aide, l'égalité des triangles situés de part et d'autre de la diagonale.

3° Peu réussissent, il faudrait peut-être demander d'exprimer les aires de ces deux rectangles.

Commentaires :

Cette activité 2 est assez longue, et plusieurs groupes ont dû terminer seuls à la maison, ce qui a ajouté à la difficulté. Cet exercice a été corrigé la semaine suivante. Les deux méthodes de construction (Bézout et Euclide) ont été présentées sur des transparents. Les analogies observées renforcent l'idée qu'on inscrit un carré dans un triangle pour obtenir une moyenne harmonique. Les élèves sont perplexes, ils se demandent si leur professeur de mathématiques a le droit de faire de telles hypothèses. Promesse leur est faite de les informer de toute « protestation » émanant de lecteurs de cet article.

exercice de travail personnel :

1° En musique, une corde de longueur L produit un son lorsqu'elle vibre.

Une corde de longueur L/2 donnera le même son, mais une octave plus haut (plus aigu). Pour obtenir un son moyen entre les deux précédents, on utilise une corde dont la longueur L' est la moyenne harmonique des deux longueurs précédentes.

Montrer que L' = 2L/3.

(Cette méthode a été utilisée par Pythagore pour construire une gamme qui porte son nom et qui a été peu modifiée depuis.)

2° Un cycliste grimpe un col à la vitesse moyenne de 18 km.h^{-1} puis le redescend à la vitesse moyenne de 42 km.h^{-1}.

Calculer la vitesse moyenne de ce cycliste sur l'ensemble du trajet aller-retour.

Que représente cette moyenne pour les deux vitesses de montée et de descente ?

Que font les élèves ?

La question 1° (corde) ne soulève pas de difficulté particulière, malgré une cer-

7 Clairaut traite aussi cette question dans la seconde partie, pragraphes V et VI, pp 77 et suivantes de ses Elémens de Géométrie.

taine incrédulité face à ce Pythagore-là. La seconde (vitesse), en revanche, est moins bien réussie : une partie des élèves calcule évidemment la moyenne arithmétique, l'autre, « flairant » le piège, utilise la bonne moyenne, mais peu justifient ce résultat correctement.

Pour finir, on a remarqué qu'une même formule écrite de différentes manières pouvait conduire à autant de méthodes différentes et on a pris rendez-vous un peu plus tard pour utiliser la dernière formule avec la fonction inverse (même s'il ne s'agit plus d'une construction à la règle et au compas, les manipulations sur la courbe peuvent se révéler intéressantes)

Conclusion :

Cette activité pourra paraître longue à certains collègues (deux séances de module et trente minutes de corrections), les calculs posant bien plus de difficultés que les démonstrations géométriques. Il est quand même intéressant de mêler différents domaines des mathématiques (ici algèbre et géométrie, en dehors du cas habituel du calcul dans un repère) ainsi que différentes époques (Antiquité et XVIIIème siècle) pour montrer que les mathématiques se construisent et s'enrichissent progressivement, en un mot qu'elles « bougent »... même s'ils trouvent que leur professeur exagère un peu avec ses hypothèses. Beaucoup, enfin, ont bien compris que pour résoudre un problème plusieurs stratégies sont possibles.

Bibliographie

([LEB1947]) C. Lebossé & C. Hémery, *Géométrie Plane*, Classe de Seconde des collèges et lycées, Fernan Nathan, 1947. 6e édition, 1951.

([CHU1979]) Manuscrit de 1484, transcrit et commenté par Hervé Lhuillier, *La Géométie de Nicolas Chuquet, première géométrie en langue française*, Paris, Vrin, 1979.

([BEZ1788]) E. Bézout, *Cours de Mathématiques à l'usage du Corps Royal de l'Artillerie*, (4 tomes), Paris, Ph. D. Pierres, 1788.

([EUC1993]) *Les œuvres d'Euclide, traduites littéralement par F. Peyrard*, 1819, A. Blanchard, Paris, 1993.

([CLA1987]) A. Clairaut, *Elémens de Géométrie*, 1753, Siloë, Laval, 1987.

([CHE1931]) P ierre Chenevier, *Cours d'algèbre*, [...] Classe de seconde, Paris, Hachette, 1931.

([GUY2003)) Patrick Guyot, *Un carré dans le triangle. De l'utilisation de textes anciens pour résoudre un problème*, Repères-IREM n°51, avril 2003.

([DIJ]) http://www.u-bourgogne.fr/irem