LA RUBRIQUE « POINT DE VUE » :

Un lieu de débat pour les enseignants de Mathématiques

La rubrique « POINT DE VUE » *est destinée à être un lieu de débat et un outil de réflexion pour les enseignants de mathématiques sur tous les sujets qui concernent leur profession.*

Elle accueille dans ce numéro un texte de Raymond Barra, ancien directeur de l'Irem de Poitiers, consacré à l'esprit des nouveaux programmes.

Cette rubrique est ouverte à tous et destinée à recevoir des articles courts, d'environ trois pages…

Nous attendons vos propositions.

Le Comité de Rédaction

Point de vue

FORMATION SCIENTIFIQUE, VRAIMENT ?

Raymond BARRA

Depuis longtemps les instructions générales, les préambules des programmes successifs, soulignent la nécessité d'initier à la démarche scientifique, de veiller à la formation scientifique de nos élèves et à toute cette sorte de choses.

Qu'en est-il vraiment ? Voici trois exemples tirés du programme 2002 de Terminale Scientifique.

A. Premier Exemple : *l'intégration*

1) L'intégrale d'une bonne fonction (continue positive), est maintenant définie comme le nombre qui exprime la mesure de l'aire sous la courbe dans l'unité choisie. En français et a fortiori en mathématiques, l'usage de l'article défini « le » ou « la » signifie l'existence et l'unicité de l'objet ainsi désigné. Admettons que l'existence ne fasse pas problème (bien que ce soit le nœud du problème). Mais puisqu'il y a référence à un choix d'unité, ne serait-il pas formateur de dire la nécessité de légitimer cette définition, c'est-à-dire de prouver que le nombre en question ne dépend pas de l'unité ? (Ce qui d'ailleurs ne semble pas si évident à nos élèves). Ce point n'est pas abordé.

2) Puis conformément au programme les propriétés de l'intégrale sont admises. Dire, admettre, c'est laisser croire qu'à cette étape de la théorie ces propriétés pourraient être démontrées à partir de ce qui précède mais que pour diverses raisons on ne le fera pas. Or seule la définition précède ces énoncés, et l'on sait bien que cette définition et la notion intuitive d'aire ne permettent pas à elles seules de les prouver. (La linéarité n'est pas si évidente même avec la parabole et une droite). Ne serait-il pas correct de dire dans le cadre

d'une bonne formation, que ces propriétés sont prises comme axiomes ?

Surtout pour une véritable formation, l'occasion ne serait-elle pas propice pour expliquer, même brièvement, qu'il arrive que les notions intuitives ne suffisent plus, qu'il faut les préciser, les dépasser ? Dans son livre *Analyse mathématique* édition 2001, M.Godement après avoir examiné le problème : donner un sens à la mesure de l'aire du domaine sous la courbe, conclu en disant que pour éviter ces recours au folklore (sic), il vaut mieux prendre ce nombre, i.e. l'intégrale, comme *définition*, souligné par lui, de l'aire. Et M.Dixmier pourtant avare de commentaires dit dans son ouvrage pour étudiants, de bien noter que c'est l'intégrale qui permet de définir l'aire et non pas le contraire.

Pour une bonne formation, ne serait-il pas préférable de suivre l'idée de Riemann, quitte à admettre bien des points techniques ? Que penseront ceux de nos élèves à qui l'on dira l'an prochain que pour toute la communauté mathématique la vérité est le contraire de ce que nous leur avons enseigné ?

Le programme est quand même très vague qui dans les contenus écrit « introduction de la notation somme de a à b de f(x)dx comme aire sous la courbe », et dans les commentaires écrit que l'objectif est de « donner un aperçu de la définition et du calcul de cette aire » en se gardant bien de préciser quelle est cette définition.

Mais dans le préambule de ce programme il est écrit que « les élèves doivent comprendre comment se construisent les mathématiques ».(On peut d'ailleurs se demander pourquoi parler d'intégrales plutôt que de primitives puisque celles-ci suffisent pour calculer des aires).

B. Deuxième exemple : *la continuité*

Il y a des programmes sans continuité des programmes avec, il faut bien changer un peu. Celui de 2002 est avec. Et demande d'indiquer, et non de prouver, que toutes les fonctions usuelles et leurs composées sont continues. Plus loin le programme demande d'indiquer que toute fonction dérivable est continue mais ne demande pas d'en profiter pour démontrer que toutes les fonctions usuelles le sont. Car la dérivabilité des fonctions usuelles ayant été prouvée en Première leur continuité en résulte, et le théorème sur la limite d'une composée assure aussitôt la continuité de leurs composées.

Est-ce donner une bonne formation que de cacher d'où viennent les choses lorsqu'il est si facile de le faire ?

Dans le préambule de ce programme il est écrit que les élèves « doivent se rendre compte que les mathématiques sont une école de rigueur qui exige une pensée claire. »

C. Troisième exemple :
exponentielle et méthode d'Euler

Admettons ce qui est écrit dans le programme, que la présence des équations différentielles est « fondamentale pour amener à la compréhension de la puissance des maths pour la modélisation ». Admettons, tout en disant que cette puissance des maths aurait déjà dû apparaître lors d'autres questions de physique (vitesse instantanée par exemple), et en géométrie.

Donc, on pose maintenant la question : existe-t-il une fonction non nulle, égale à sa dérivée, et prenant la valeur 1 en 0 ? La question place l'élève devant un mur infranchissable. On admet donc cette existence et on appelle exponentielle cette fonction solution. Puis plus tard en s'intéressant à un tout autre problème, l'intégration, on découvre que $1/x$ a une primitive nommée *ln*, que *ln* a une réciproque, et miracle, il se trouve que celle-ci est l'exponentielle. (En fait cela n'est pas aussi rapide que le laisse entendre le programme. A croire sa rédaction puisque cette réciproque existe il en est aussitôt de même de la fonction *exp*, oubliant de signaler tout le travail qui reste à faire pour montrer que cette réciproque est bien solution de $y' = y$).

Après cela, l'élève est en droit de penser que les mathématiques peuvent se construire par de heureux hasards.

Entre-temps, on aura mis en œuvre la méthode d'Euler, vraisemblablement pour trouver des valeurs approchées dont il serait formateur de signaler que faute de pouvoir mesurer la qualité de ces approximations, la chose perd un peu de son intérêt. De même qu'il serait formateur de signaler tout le travail qu'il resterait à faire pour prouver l'existence par cette méthode. Le programme n'y invite pas.

Il est écrit dans le programme que la méthode fait apparaître une suite géométrique et donne l'idée que l'exponentielle est l'analogue continu de la notion de suite géométrique. Oui c'est vrai qu'elle donne cette idée à ceux qui l'ont déjà. Mais alors ne faudrait-il pas dire que c'est justement ainsi que Euler voyait l'exponentielle et non comme solution de $y' = y$, et que ce n'est pas pour cette équation qu'il a inventé sa méthode ?

Au fait s'il est vraiment si fondamental d'introduire l'exponentielle avant le logarithme, pourquoi ne le fait-on pas en posant le problème de définir a^x lorsque x est réel, on dispose de tous les outils pour le faire proprement et bien plus rapidement que par tous ces détours.

On pourrait trouver un intérêt d'avoir eu à manipuler une fonction sans connaître sa courbe et son expression analytique, mais cet intérêt était présent lorsque *ln* était définie avant *exp* comme primitive de $1/x$.

Novembre 2004