LA RUBRIQUE « POINT DE VUE » :

Un lieu de débat pour les enseignants de Mathématiques

La rubrique « POINT DE VUE » *est destinée à être un lieu de débat et un outil de réflexion pour les enseignants de mathématiques sur tous les sujets qui concernent leur profession.*

Elle accueille dans ce numéro un texte de *Michel de Cointet et de François Pluvinage en réaction au Point de vue de Raymond Barra, publié dans le numéro précédent.*

Cette rubrique est ouverte à tous et destinée à recevoir des articles courts, d'environ trois pages…

Nous attendons vos propositions.

Le Comité de Rédaction

Point de vue

PROGRAMMES OU PRATIQUES ?

Michel de COINTET,
François PLUVINAGE,
Irem de Strasbourg

Dans un texte qui s'appuie sur des exemples pris dans l'enseignement d'analyse, Raymond Barra met en doute la conformité des programmes de mathématiques publiés en 2001 pour la Terminale scientifique avec les intentions de formation exposées dans le préambule. Si l'on veut des programmes qui soient exempts de toute imperfection ou imprécision, Raymond Barra a évidemment raison. Mais un tel souhait nous semble correspondre à une préoccupation à laquelle déjà Hans Freudenthal s'opposait dans un article publié par la revue l'Enseignement Mathématique en 1963 (vol. 9, pp. 28-44), quand il disait à propos de mathématique moderne « c'est inquiétant toute cette activité des programmeurs ».

On admet aujourd'hui que le fonctionnement effectif des classes est tributaire de bien autre chose que des seuls textes de programmes. Cette prise de conscience est d'ailleurs mise en évidence par la floraison de documents complémentaires, de textes d'accompagnement et d'exemples d'activités ou d'exercices émanant de l'institution elle-même.

Les exemples que propose le texte de Raymond Barra pointent des questions à propos desquelles une réflexion soigneuse est certainement nécessaire de la part des enseignants et auteurs de manuels ou documents scolaires. Encore convient-il que la réflexion ne se satisfasse pas de la seule cohérence mathématique, mais soit aussi guidée par un souci didactique.

Examinons ce que dit Raymond Barra de ces exemples.

A. Premier exemple : l'intégration

Que dit le Programme ?

Contenus : *« Pour une fonction continue positive sur* [a,b]*, introduction de la notation comme aire sous la courbe.»*
Mise en œuvre : *« On indiquera que l'aire sous la courbe peut être approchée en l'encadrant par deux suites adjacentes construites en quadrillant le plan de plus en plus finement. »*
Commentaire : *« Les élèves ont une notion intuitive d'aire (avec la propriété d'additivité) et savent calculer certaines aires élémentaires ; »*

Pour ce qui est de l'intégrale et des aires, nous pouvons renvoyer au manuel de 1983 de l'Irem de Strasbourg (chapitre 4), qui avait été rédigé avec notamment un soin mathématique poussé. Ce qu'il convient d'admettre à propos des aires y est exposé explicitement (dans des cas de surfaces donnant lieu à des encadrements polygonaux) et la démarche proposée est mathématiquement fondée, sans être hors de portée des élèves. Cette démarche « précise » et « dépasse » les notions intuitives, donc participe à une formation scientifique telle que la souhaite Raymond Barra. Or le point de vue qui y est adopté correspond à l'orientation des programmes actuels. En outre, le niveau d'apprentissage que cette démarche permet d'atteindre est indispensable pour accéder ensuite à celui où se place une définition de l'aire du domaine sous la courbe par une intégrale : ce sera dans le cadre d'une théorie mathématique dont on réservera, comme par le passé, l'élaboration et l'étude à l'enseignement supérieur (remarquons que le mot « axiome » n'a de sens que dans un tel cadre tout comme ceux d'« existence » et d'« unicité »). La « vérité » dont parle Raymond Barra qui s'en dégagera alors, non seulement dite mais expliquée, pourra être comprise de l'élève devenu étudiant et ne sera nullement contraire à ce qui a été enseigné précédemment. Comme le dit Hans Freudenthal, dans le même article, « *Il n'y a pas d'exactitude absolue. A chaque niveau* [d'apprentissage] *correspond une forme d'exactitude qui lui est propre. Exiger de l'élève l'exactitude d'un niveau où il ne se trouve pas, est malhonnête au nom de l'honnêteté* ». Remarquons que ce type de démarche peut être engagé dès le début du collège : à l'école primaire, un carré n'est pas un rectangle parce que le niveau d'apprentissage est celui de la désignation en géométrie perceptive, régie par les règles d'économie du langage ; dès la sixième, le carré est un rectangle parce qu'il en a les propriétés caractéristiques : à ce niveau d'apprentissage, on progresse vers la déduction, en découvrant, à l'aide de plusieurs exemples, ce que sont une définition, une propriété déduite, puis, à partir de là, une démonstration.

Hans Freudenthal est catégorique : « *Ce qui est vraiment funeste, c'est l'habitude de négliger les problèmes de montée à partir du niveau zéro* [pour nous ici, l'aire d'un rectangle ou d'un polygone]. *Je pense que c'est ce qui explique la faillite presque complète de notre enseignement — faillite démontrée par le fait qu'à une minorité presque négligeable près, on est absolument incapable d'appliquer les mathématiques qu'on a apprises même aux problèmes les plus simples qui se présentent hors des mathématiques* » et, plus loin : « *On s'efforce de partir du premier niveau, celui des notions abstraites ou même de niveaux plus élevés*[pour nous ici, l'aire définie comme intégrale]. *Ce qui devrait être le point de* *départ, apparaît après coup, sous le titre d'applications. On fait un dessert non digérable de ce qui aurait été bon pour un hors d'œuvre. En posant à l'élève des problèmes appliqués, on lui demande de retourner à un niveau où il n'a jamais exercé ».*

Les auteurs des programmes actuels semblent avoir écouté ce discours à propos d'aires et d'intégrales.

B. Deuxième exemple : la continuité

Que dit le Programme ?

Dans les « modalités de mise en oeuvre » du paragraphe « Dérivation » : « On fera remarquer que toute fonction dérivable est continue ».
Dans les commentaires du paragraphe « Langage de la continuité et tableau de variation » : « Démontrer qu'une fonction est continue... n'est pas un objectif du programme ».

Le texte mentionne donc bien le lien entre dérivabilité et continuité. Alors, démontrer la continuité d'une fonction dérivable pourquoi pas ? Que ce soit immédiat, le « il suffit d'écrire » de Raymond Barra n'est pas un argument très convaincant. Qu'en l'omettant, on cache « d'où viennent les choses », nous ne comprenons pas bien ce que cela veut dire dans ce cas puisque la notion de continuité précède celle de dérivabilité dans le discours mathématique.

C. Troisième exemple : l'exponentielle

Que dit le Programme ?

Contenus : « Etude de la fonction $f' = kf$.
Théorème : Il existe une unique fonction f dérivable sur R telle que $f' = kf$ et $f(0) = 1$. »
Mise en œuvre : « L'unicité sera démontrée ; l'existence sera admise dans un premier temps. »
Commentaire : « Ce travail se fera très tôt dans l'année car il est central dans le programme de mathématiques et de physique. »

Il nous apparaît clairement que la question « Existe-t-il une fonction dérivable, égale à sa dérivée, et prenant la valeur 1 en 0 ? » place l'élève devant un mur infranchissable. Il peut en chercher longtemps une démonstration et, s'il n'en trouve pas, celles qu'il trouvera dans un manuel l'en convaincront (tout en le rassurant sur ses capacités). La méthode préconisée par le programme se heurte ici au cumul des difficultés nouvelles qu'elle présente et à son inadaptation totale au niveau d'apprentissage d'un élève de classe terminale, de plus « très tôt dans l'année ». Nous serons donc d'accord avec Barra sur ce point.

Le commentaire du programme concernant l'introduction de la fonction exponentielle impose une lourde contrainte au professeur de mathématiques. Il lui reste, avec son collègue de Sciences Physiques, à réfléchir à une solution qui relève de la quadrature de ... l'hyperbole.

On peut trouver peut-être d'autres démarches paraissant plus cohérentes, plus économiques en pré-requis, plus simples au moins aux yeux de leurs auteurs. Encore faudra-t-il s'entendre sur le sens de ces critères et, en rédigeant entièrement ces démarches, examiner toutes les difficultés qu'elles peuvent présenter, aussi bien d'ordre technique qu'en termes de niveaux d'apprentissage, à pour bon nombre d'élèves (la définition de la fonction exponentielle en a, sinon cela se saurait !). Il nous semble, par exemple, que la méthode dite du prolongement ne peut, en aucun cas, être proposée à des élèves ou des étudiants ne disposant pas d'une bonne maîtrise de **R** et, a fortiori, à ceux qui ont du mal à travailler avec d'autres nombres que ceux que leur donne leur calculatrice.

Les programmes ne sont pas tout...

Un problème peut-être plus grave qui se pose aujourd'hui au professeur provient des propositions qui sont faites concernant le baccalauréat. On sait à quel point les collègues enseignant en Terminale sont amenés à les prendre en considération dans le quotidien de leur activité professionnelle.

Ainsi un document récemment diffusé par l'Inspection Générale présente des « Exemples d'exercices comportant une restitution organisée de connaissances ». Une préoccupation de rigueur est manifeste dans ce document, mais on peut se demander si elle n'est pas d'une part excessive, d'autre part déplacée, par rapport au souci de la formation scientifique rappelé par Raymond Barra. Limitons-nous à un exemple, celui de l'exercice R6 extrait de ces exemples. Cet exercice demande de démontrer des propriétés classiques de l'exponentielle uniquement à partir de trois propriétés énoncées en « pré-requis » : l'exponentielle est une fonction dérivable sur les réels, sa dérivée vérifie, pour tout x, l'égalité $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(0) = 1$. Ce faisant, on ne demande pas à l'élève de montrer la culture mathématique du sujet qu'il a pu acquérir, mais de se plier à une directive formelle, pour le bien fondé de laquelle il doit faire confiance aux auteurs du sujet. Certes, un bon gymnaste du raisonnement réussira, mais s'agit-il de former à la gymnastique du raisonnement ? Probablement non, ce qui implique, mais on le savait déjà, que la rigueur c'est bien, à condition qu'elle soit mise en œuvre à bon escient.

Sur l'exemple de R.O.C. (Restitutions Organisées de Connaissances) que nous venons d'examiner, nous voyons bien que l'essentiel des préoccupations des professeurs se situe bien au-delà de la rédaction des programmes. Sur les exemples proposés par Raymond Barra, nous avons constaté que le programme actuel de Terminale Scientifique suscite tant la contestation de démarches préconisées (demande de davantage de liberté ?) qu'une exigence de précisions supplémentaires dans la rédaction de celles-ci (demande de davantage de contraintes ?), toutes choses que le lecteur peut, à son tour, contester. Il en sera probablement encore de même de tout programme dès qu'il impose des démarches.

Membres de commissions de rédaction de programmes antérieurs, nous croyons fortement à l'importance de leur rédaction et nous y avons travaillé en conséquence. Mais, à l'expérience, nous en connaissons et reconnaissons les limites. L'essentiel est bien dans la pratique de leur enseignement.