

---

## RETOURNER DES PIONS

---

### *(Lights out)*

Claudine ROBERT,  
Mikhail ZAIDENBER  
Irem de Grenoble

#### Préambule :

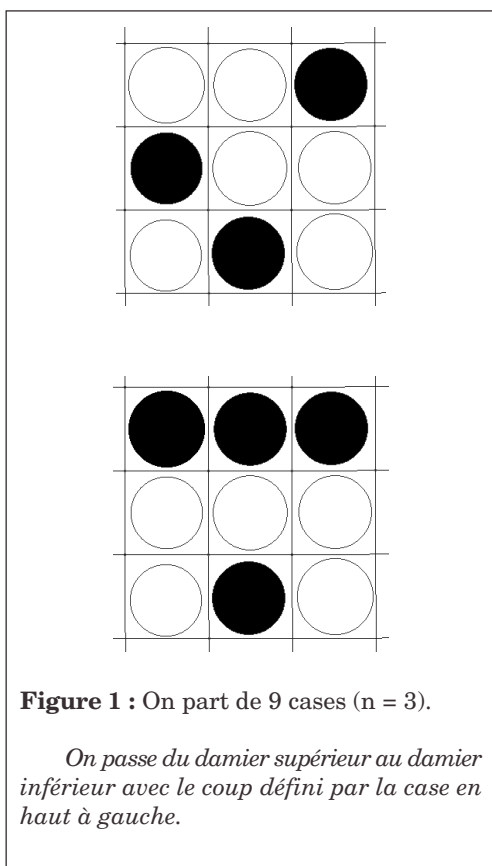
*Ce document est un texte de mathématiques qu'un élève de terminale (ES ou S) peut lire en grande partie, avec quelques aides et compléments. Bien sûr cette lecture est un travail difficile, il y a tout de suite des définitions, et un aspect formel, l'élève n'est pas guidé et devra faire des calculs intermédiaires. L'objectif est ici de lui donner l'occasion d'une part de voir sur pièce un fonctionnement de mathématicien sur un problème particulier, d'autre part d'expérimenter une composante de l'activité des mathématiciens et des ingénieurs : lire des articles.*

*On commence par décrire une situation où on retourne des pions sur un damier, selon une règle particulière, et on se pose des questions, très gratuites. Pourquoi un mathématicien s'intéresserait-il à cette situation, pourquoi chercherait-il à répondre à ces questions ? Eh bien, c'est un peu comme un pianiste qui se trouve face à un piano : il va pianoter, laisser ses mains*

*parcourir le clavier. Si la sonorité lui plaît, il jouera des morceaux plus difficiles et peut-être, si ce piano s'avère avoir de grandes qualités pour lui, il travaillera régulièrement dessus. De même, face au problème posé, le mathématicien jouera de quelques-unes des techniques qu'il maîtrise, pour voir ce que cela donne, et par plaisir ; il fera des « petits calculs » qui lui permettent d'avoir des résultats partiels, de situer la difficulté éventuelle de certaines questions : ce sont ces « petits calculs » que nous donnons ici. Et il se peut que cela l'emmène plus ou moins loin, vers des problèmes qu'il ne sait pas résoudre et auquel il souhaite s'attaquer : nous ne ferons ici que les évoquer.*

*On peut évidemment arguer de la futilité du problème posé, mais on sait aussi à quel point un tel argument n'est pas pertinent : les jeux mathématiques sont depuis toujours source de problèmes riches, notamment en combinatoire ou en automatique.*

On considère un quadrillage  $n \times n$ , composé de  $n^2$  cases ; deux cases sont voisines si elles ont en commun un côté. Dans chaque case, il y a un pion réversible, avec une face blanche et l'autre noire. Une disposition des pions définit un damier. On peut transformer le damier par coups successifs (figure 1). Un coup consiste à choisir une des cases, et à retourner le pion de cette case ainsi que les pions des cases voisines (cases ayant un côté commun). Le but du jeu est d'arriver au damier tout blanc.



La règle de retournement des pions est celle du jeu commercialisé avec un damier  $5 \times 5$  sous le nom de « lights out ». Vous pouvez jouer à ce jeu, sous le nom de « reversi », avec un damier dont vous choisirez la taille entre  $2 \times 2$  et  $50 \times 50$ , dans le chapitre probabilité du site de Jean-Paul Quelen :

<http://perso.wanadoo.fr/jpq>

Commençons par introduire quelques définitions *naturelles*<sup>1</sup> qui nous permettront de nous poser des questions tout aussi *naturelles*.

**Définitions :**

- Une partie est définie par :
  - (i) une suite finie de damiers, telle qu'on passe de l'un au suivant en un seul coup ou
  - (ii) le damier d'origine et une suite finie de coups.
- Une partie gagnante est une partie dont le dernier damier est tout blanc.
- La longueur d'une partie est le nombre de coups joués.
- Un damier gagnant est un damier tel qu'il existe une partie gagnante dont il est l'origine.

**Questions :**

- 1 — Tous les damiers sont-ils gagnants ?
- 2 — Comment trouver, en partant d'un damier gagnant :
  - une partie gagnante,
  - une partie gagnante, la plus courte possible,

<sup>1</sup> Naturel pour un mathématicien, comme nous l'avons dit plus haut.

— si  $k$  est le plus petit nombre de coups d'une partie gagnante, trouver toutes les parties gagnantes.

Les questions sont difficiles à traiter d'emblée pour un quadrillage  $n \times n$ . Commençons donc par le cas le plus simple,  $n = 2$ , en gardant en tête qu'on cherchera à généraliser.

### 1— Le cas $2 \times 2$ .

Il y a  $2^4 = 16$  damiers possibles. Si une partie gagnante passe deux fois par le même damier  $D$ , on peut la raccourcir : si on arrive en  $D$  au coup  $p$  puis au coup  $p + k$ , on peut supprimer les  $k$  coups entre les deux passages en  $D$ . D'où :

*Une partie gagnante de longueur  $l > 16$  peut toujours être raccourcie en une partie de mêmes extrémités et de longueur  $l' \leq 15$ .*

#### 1.1— Graphe des damiers.

La définition (i) induit l'idée de considérer un graphe à 16 sommets où chaque sommet représente un damier ; deux sommets sont voisins si on peut passer d'un damier à l'autre en un seul coup.

Si on peut passer du damier  $D$  au damier  $D'$  par un coup, le même coup fait passer de  $D'$  à  $D$  ; on considérera donc un graphe non orienté. Ce graphe  $G_{2 \times 2}$  est régulier : tous les sommets sont de degré 4. Il a donc  $16 \times 4 / 2 = 32$  arêtes.

Ce graphe est tracé dans l'annexe. Une partie gagnante est une liste de sommets tels qu'un sommet et le suivant sont voisins, le dernier sommet étant celui qui est associé au

damier tout blanc. On trouvera aussi dans cette annexe des calculs, faits par ordinateur, et qui démontrent la proposition suivante :

### Propriété :

*Pour le quadrillage  $2 \times 2$ , tous les damiers sont gagnants ; pour chacun des damiers  $D$ , il existe une partie gagnante partant de  $D$  et de longueur inférieure ou égale à 4. Plus précisément :*

— pour chacun des 4 damiers comportant une case noire, il existe une partie gagnante de longueur 1.

— pour chacun des 6 damiers comportant deux cases noires, il existe 2 parties gagnantes de longueur 2 et aucune de longueur 1.

— pour chacun des 4 damiers comportant trois cases noires, il existe 6 parties gagnantes de longueur 3 et aucune de longueur 1 ou 2.

— pour le damier tout noir, il existe 24 parties gagnantes de longueur 4, et aucune de longueur 1, 2 ou 3.

Les résultats obtenus ne permettent pas, à partir d'un damier donné, de construire des parties gagnantes. De plus, on peut se demander pourquoi les nombres de parties de longueur minimale données ci-dessus sont au nombre de 1, 2, 6, 24, qui, pour un mathématiciens, évoquent tout de suite  $1!$ ,  $2!$ ,  $3!$ ,  $4!$ .

Bref, on a des résultats qui répondent à certaines des questions posées en introduction, sans pour autant clarifier la situation du quadrillage  $2 \times 2$ .

Pour le quadrillage  $3 \times 3$ , le graphe des damiers  $G_{3 \times 3}$  a  $2^9 = 512$  sommets ; il est régulier : tous les sommets sont de degré 9. Il y a donc  $512 \times 9 / 2 = 2304$  arêtes. Il est peu lisible !

On va chercher une autre représentation, induite par la définition (ii), susceptible de mieux se généraliser et d'éclairer les résultats obtenus.

1.2 — *Représentations matricielles des damiers et des coups.*

On représente un damier par une matrice  $2 \times 2$ ,  $D = ((d_{ij}))$ , où  $d_{ij} = 1$  (resp. 0) signifie que la case  $(i,j)$  est noire (resp. blanche).

L'ensemble des damiers est transformé par ce codage en l'ensemble des matrices à coefficients dans  $\mathbf{F} = \{0, 1\}$ . Le fil conducteur de ce qui va suivre réside dans la considération suivante :

*Si on calcule modulo 2, changer la couleur d'une case revient à lui ajouter 1.*

$\mathbf{F}$  est muni de la multiplication usuelle et de l'addition modulo 2. Les matrices s'additionnent termes à termes. Nous représentons le coup associé à la case  $(i,j)$ ,  $i, j = 1, 2$ , par l'addition de la matrice  $C_{ij}$ , où :

$$C_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ; C_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ;$$

$$C_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} ; C_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} ;$$

Dans cette représentation

— jouer  $(i,j)$ , c'est passer d'un damier  $D$  au damier  $D + C_{ij}$

— jouer  $(i,j)$  puis  $(i',j')$ , c'est passer d'un damier  $D$  au damier  $D + C_{ij} + C_{i'j'}$

— etc.

Cette représentation permet de démontrer aisément les propriétés suivantes.

**Propriétés**

(i) *Dans une partie commençant par un damier donné, changer l'ordre des coups ne change pas le damier final.*

(ii) *Toute partie commençant par un damier  $D$  peut s'écrire (en notant par la même lettre le damier et la matrice qui le représente) :*

$$D + a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} \quad (1)$$

où  $a_{ij}$  est la somme, modulo deux, du nombre de fois où on a joué le coup  $i,j$ .

(iii) *Si une partie commence par un damier  $D$  et se termine par un damier  $D'$ , alors il existe une partie ayant au plus 4 coups, qui commence par  $D$  et se termine par  $D'$ .*

**Démonstration**

(i) L'addition des matrices est commutative.

(ii) On peut, d'après (i) regrouper les coups identiques. Comme jouer deux fois le même coup revient à ne rien faire, finalement seuls comptent les coups qui ont été joués un nombre impair de fois.

(iii) Pour la dernière partie de la propriété ci-dessus, il suffit en effet de jouer dans un ordre quelconque les coups  $(i,j)$  correspondants aux coefficients  $a_{ij}$  qui valent 1 dans l'écriture (1).

Un damier gagnant est alors un damier tel qu'il existe 4 coefficients  $a_{ij}$  (ces coefficients sont des éléments de  $\mathbf{F}$ ) tels que :

$$D + a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} = D_0$$

où  $D_0$  est la matrice dont tous les termes sont nuls. Ajoutons  $D$  aux deux membres de cette

égalité ; comme  $D + D = D_0$  et  $D_0 + D = D$ , un damier gagnant est un damier tel qu'il existe quatre coefficients  $a_{ij}$  tels que :

$$D = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} \quad (2)$$

Un damier gagnant est donc un damier qui peut s'écrire comme combinaison des matrices-coups  $C_{ij}$ . Montrons que cette écriture est unique, c'est-à-dire que deux quadruplets distincts de coefficients des matrices-coups conduisent à des damiers inégaux.

**Lemme :** Avec les notations précédentes, si :

$$\alpha_{11}C_{11} + \alpha_{12}C_{12} + \alpha_{21}C_{21} + \alpha_{22}C_{22} = \delta_{11}C_{11} + \delta_{12}C_{12} + \delta_{21}C_{21} + \delta_{22}C_{22} \quad (3)$$

alors :  $\alpha_{ij} = \delta_{ij}$  pour  $i,j=1,2$ .

**Démonstration.** Soustrayons le second membre de (3) dans l'égalité (3). On obtient :

$$\lambda_{11}C_{11} + \lambda_{12}C_{12} + \lambda_{21}C_{21} + \lambda_{22}C_{22} = D_0$$

où  $\lambda_{ij} = \alpha_{ij} - \delta_{ij}$  et où :

$$C_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ; C_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ;$$

$$C_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} ; C_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} ;$$

En calculant terme à terme, les sommes étant faites modulo 2 :

$$\begin{aligned} \lambda_{11} + \lambda_{12} + \lambda_{21} &= 0 \\ \lambda_{11} + \lambda_{12} + \lambda_{22} &= 0 \\ \lambda_{11} + \lambda_{21} + \lambda_{22} &= 0 \\ \lambda_{12} + \lambda_{21} + \lambda_{22} &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit par soustractions d'égalités que tous les  $\lambda_{ij}$  sont égaux. S'ils valent tous

1, la somme de trois d'entre eux ne peut pas faire 0. Ils sont donc tous nuls soit :  $\alpha_{ij} = \delta_{ij}$  pour  $i,j=1,2$ . Donc :

**Propriété**

(i) Tous les damiers sont gagnants, et la longueur minimale d'une partie gagnante est au plus 4.

(ii) Si  $k$  est le plus petit nombre de coups permettant de gagner à partir d'un damier  $D$ , alors les parties gagnantes de longueur  $k$  sont les  $k!$  parties obtenues en faisant varier l'ordre des  $k$  coups de l'une d'entre elles.

**Démonstration**

(i) L'écriture (1) conduit à 16 quadruplets possibles de coefficients, soit à 16 damiers distincts d'après le lemme ci-dessus. Comme il y a 16 damiers  $2 \times 2$  distincts, on les a tous obtenus.

(ii) Le nombre minimal de coups d'une partie gagnante est le nombre  $k$  de coefficients non nuls dans l'écriture (2) ; les coups peuvent être joués dans un ordre quelconque.

*Remarque :* L'unique damier gagnant pour 4 coups est celui qui s'écrit :

$$C_{11} + C_{12} + C_{21} + C_{22}.$$

C'est le damier dont toutes les cases sont noires, et il y a  $4! = 24$  parties gagnantes différentes à partir de ce damier. La propriété (ii) ci-dessus éclaire ainsi les chiffres 1, 2, 6, 24 obtenus dans la propriété énoncée dans la partie 1.1 : on sait maintenant pourquoi il s'agit de  $1!$ ,  $2!$ ,  $3!$ ,  $4!$ .

Nous n'avons pas ici donné d'algorithme pour déterminer, à partir d'un damier quelconque, une partie gagnante<sup>2</sup>. Si on a

2 Le tâtonnement est dans ce cas simple efficace et suffisant, mais n'est pas un algorithme. De plus, il n'est pas généralisable.

la décomposition du damier  $D$  selon l'écriture (2), il suffit, puisque  $D + D = D_0$ , de jouer dans n'importe quel ordre les coups  $(i,j)$  tels que  $a_{ij} \neq 0$ .

Pour trouver l'écriture (2), on peut écrire les 16 combinaisons et identifier. On peut aussi utiliser une méthode directe qui utilise le comptage suivant :

Etant donné deux matrices  $M = ((m_{ij}))$  et  $K = ((k_{ij}))$  on regarde le nombre, que nous noterons  $\langle M, K \rangle^3$ , de 1 qu'elles ont en commun, modulo 2, ce qui s'écrit :

$$\langle M, K \rangle = m_{11} \times k_{11} + m_{12} \times k_{12} + m_{21} \times k_{21} + m_{22} \times k_{22}$$

(la somme est prise modulo 2).

On remarque que :

$$\langle M, K + K' \rangle = \langle M, K \rangle + \langle M, K' \rangle$$

et que pour les matrices coups :

$$\langle C_{ij}, C_{i'j'} \rangle = 1 \text{ si } i = i' \text{ et } j = j'; 0 \text{ sinon.}$$

Si  $D$  s'écrit :

$$D = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22}$$

Alors :  $\langle D, C_{ij} \rangle = a_{ij}$

Finalem<sup>ent</sup>, pour passer d'un damier  $D$  au damier blanc, on regarde successivement les quatre matrices coups : si le nombre de 1 commun à  $D$  et  $C_{ij}$  est impair, on joue  $(i,j)$ , sinon on passe ce coup-là.

## 2 – Généralisations déterministes

Une généralisation *naturelle* est un **quadrillage  $n \times n$  ou  $n \times p$** . Les pro-

3 Il y a une raison à cela ; le nombre  $\langle M, M' \rangle$  s'appelle aussi en mathématiques le produit scalaire des matrices  $M$  et  $M'$  ; la procédure décrite ne relève pas d'une astuce, mais d'un mode de calcul classique dans le champ des « espaces vectoriels ».

blèmes sont plus difficiles, nous ne les abordons pas ici. On trouvera sur le site une généralisation au cas  $3 \times 3$  :

<http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~zaidenberg/reversi-1.pdf>

Une autre généralisation, qui englobe la précédente, est de considérer un **graphe d'ordre  $N$** , quelconque. A chaque sommet, il y a un pion dont une face est blanche, l'autre noire. Une disposition des pions définit un damier. La règle de transformation des damiers reste la même : on passe d'un damier à l'autre comme précédemment, en changeant la couleur d'un pions et des pions qui sont sur des sommets voisins du graphe<sup>4</sup>. Le graphe des damiers a  $2^N$  sommets, il est toujours régulier, tous ses sommets sont de degré  $N$  et il a donc  $N \times 2^{N-1}$  arêtes ; il se peut que tous les damiers ne soient pas gagnants.

Pour représenter les damiers, numérotons les sommets de 1 à  $N$ . Un damier sera représenté par un vecteur ligne, dont les composantes valent 0 ou 1 (la représentation d'un damier par une matrice  $n \times p$ , avec  $n > 1$  et  $p > 1$ , n'a plus ici de raison d'être, et est même impossible si  $N$  est un nombre premier). Un vecteur-coup est un vecteur ligne à  $n$  composantes avec des 1 aux sommets dont on retourne les pions, des 0 ailleurs. Jouer un coup se ramène à additionner un vecteur-coup au damier dont on part. Les calculs se font toujours modulo 2.

Voici quelques travaux sur ce sujet, ou sur un jeu apparenté (« Merlin magic square » qui relève de traitements analogues :

4 Les jeux « Merlin » relèvent de ce cas ; on part de damiers carrés, mais les voisins d'une case ne sont pas ceux du jeu « lights out ».

D. Pelletier : Merlin's Magic square, *Amer. Math. Monthly*, 94(1987) 143-150

Klaus Sutner : the s-game and cellular automata, *Amer. Math. Monthly*, 97(1990) , 24-34.

Klaus Sutner : Linear cellular automata and the Garden-of-Eden, *Math Intelligencer* 11, 1989,49-53.

### 3 — Généralisations aléatoires

3.1 — On prend un damier  $2 \times 2$ . Toutes les secondes, on choisit au hasard une case et on joue cette case. On s'intéresse à l'évolution du nombre de pions noirs au bout d'un certain temps.<sup>5</sup>

Le site déjà cité de Jean-Paul Quelen permet de simuler l'expérience suivante : on part d'un damier et on joue un certain nombre  $n$  de coups, au hasard. On peut ainsi simuler 1000 fois l'expérience consistant à jouer 10 coups au hasard à partir d'un damier avec une seule case noire, mettons la case sud-ouest.

On peut alors observer que :

1— Si on part d'un damier avec une ou trois cases noires (peu importe lesquelles), alors en répétant 1000 fois l'expérience pour  $n = 20$  (ou 30, ou 40, ou 100), on n'obtient jamais un nombre pair de cases noires ; le nombre de fois où on obtient une ou trois cases noires est environ 500 ; en codant 0 pour blanc et 1 pour noir, la moyenne du nombre de cases noires pour ces 1000 expériences est donc... voisine de 2.

2 — Si on part d'un damier avec zéro, deux ou quatre cases noires, (n'importe lesquelles) alors en répétant 1000 fois l'expérience pour  $n = 20$  (ou 30, ou 40, ou 100), le nombre de fois

où il y a 2 ou 4 cases noires est nul, le nombre de fois où il y en a 3 est voisin de 750 et les autres cas se répartissent à peu près à égalité entre 0 et 4 cases noires. La moyenne du nombre de cases noires pour ces 1000 expériences est donc... voisine de 2.

En remarquant que pour le damier  $2 \times 2$ , un coup fait passer d'un nombre pair de cases noires à un nombre impair de cases noires, on a :

3 — Si on part d'un damier avec une ou trois cases noires (peu importe lesquelles), alors en répétant 1000 fois l'expérience pour  $n = 25$  (ou 35, ou 45, ou 101 ou 105 ou un grand nombre impair), le nombre de fois où il y a 2 ou 4 cases noires est nul, le nombre de fois où il y en a 3 est voisin de 750 et les autres cas se répartissent à peu près à égalité entre 0 et 4. La moyenne du nombre de cases noires pour ces 1000 expériences est donc... voisine de 2.

4 — Si on part d'un damier avec zéro, deux ou quatre cases noires (n'importe lesquelles) alors en répétant 1000 fois l'expérience pour  $n = 25$  (ou 35, ou 45, ou 101 ou 105 ou un grand nombre impaire), on n'obtient jamais un nombre pair de cases noires ; le nombre de fois où on obtient une ou trois cases noires est environ 500 ; la moyenne du nombre de cases noires pour ces 1000 expériences est donc... voisin de 2.

On a ici un système (le damier) qui a cinq états possibles, un état étant le nombre de ses cases noires ; les cinq états possibles sont notés 0, 1, 2, 3, 4. Ce système change d'état à chaque instant, selon des probabilités de passage d'un état à l'autre qui se calculent aisément. Partant d'un état initial, on ne peut pas déterminer dans quel état le système sera à l'instant  $n$ , mais, pour chacun des états  $i$ ,

<sup>5</sup> La situation envisagée fournit un exemple simple de Chaîne de Markov.

$i = 0, \dots, 4$ , on peut calculer la probabilité qu'il soit dans l'état  $i$ . C'est ce que nous allons faire.

On note  $P = ((p_{ij}))$  la matrice  $5 \times 5$  dont le terme  $p_{ij}$  est la probabilité que le système passe de l'état  $i$  à l'état  $j$ ,  $[i, j = 0, \dots, 4]$ . La matrice  $P$  et le graphe probabiliste associé sont donnés dans l'encadré ci-dessous.

*Remarques*

Les quatre damiers avec 1 pion noir donneront après un coup :

- soit un damier à 2 pions noirs, avec une probabilité  $3/4$ ,
- soit à 4 pions noirs, avec une probabilité  $1/4$ .

Les quatre damiers avec 3 pions noirs donneront après un coup

- soit un damier à 2 cases noires, avec une probabilité  $3/4$ ,
- soit un damier à 0 case noire, avec une probabilité  $1/4$ .

Par contre, pour les damiers à deux pions noirs, il faut a priori distinguer le cas où les cases noires sont voisines (4 damiers distincts) de ceux où elles sont sur une diagonale (2 damiers) ; il se trouve que dans tous les cas, après un coup, on a une probabilité  $1/2$  d'avoir 1 noir et une probabilité  $1/2$  d'avoir 2 noirs.

Notons  $P_n$  la matrice ligne qui donne la loi de probabilité sur  $\{0,1,\dots,4\}$  des états après le coup  $n$ . On montre par récurrence que :

$$P_{n+1} = P_n \times P, \quad P_n = P_0 \times P^n.$$

Les logiciels de calcul scientifique donnent les termes des puissances de la matrice  $P$ .

A  $5 \times 10^{-5}$  près, on trouve, pour  $n \geq 8$  :

$$P^{2n} = Q \quad P^{2n+1} = R,$$

où les matrices  $Q$  et  $R$  sont données par :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Graphe probabiliste pour le changement du nombre de pions noirs.

Matrice de transition



$$Q = \begin{pmatrix} 1/8 & 0 & 3/4 & 0 & 1/8 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/8 & 0 & 3/4 & 0 & 1/8 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/8 & 0 & 3/4 & 0 & 1/8 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/8 & 0 & 3/4 & 0 & 1/8 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/8 & 0 & 3/4 & 0 & 1/8 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi :

Si le damier initial a 0, 2 ou 4 cases noires, à  $5 \times 10^{-5}$  près :

— à l'étape  $2n$  il sera dans l'état 0 avec une probabilité  $1/8$ , dans l'état 2 avec une probabilité  $3/4$ , dans l'état 4 avec une probabilité  $1/8$  ; l'espérance de cette loi de probabilité est 2, sa variance est 1.

— à l'étape  $2n+1$ , il sera dans l'état 1 avec une probabilité  $1/2$ , dans l'état 3 avec une probabilité  $1/2$ . L'espérance de cette loi de probabilité est 2, sa variance est 1.

Si le damier initial a 1 ou 3 cases noires,

— à l'étape  $2n$ , il sera dans l'état 1 avec une probabilité  $1/2$ , dans l'état 3 avec une probabilité  $1/2$  (résultats à  $5 \times 10^{-5}$  près).

— à l'étape  $2n+1$ , il sera dans l'état 0 avec une probabilité  $1/8$ , dans l'état 2 avec une probabilité  $3/4$ , dans l'état 4 avec une probabilité  $1/8$ .

On alterne ainsi avec deux lois  $p$  et  $p'$  de probabilité sur  $\{0,1,\dots,4\}$  définies par :

$$p = (1/8, 0, 3/4, 0, 1/8)$$

$$p' = (0, 1/2, 0, 1/2, 0)$$

Ces deux lois ont même espérance, 2, et même variance, 1.

3.2 — On prend un damier  $k \times k$ . Toutes les secondes, on choisit au hasard une case et on joue cette case. On s'intéresse à l'évolution du nombre de pions noirs au bout d'un certain temps.

Les simulations sur le site de Jean-Paul Quelen semblent indiquer qu'au bout d'un certain temps, la moyenne du nombre de pions noirs est voisine de  $k^2/2$ .

*Remarque* : un « petit calcul » permet de regarder le comportement asymptotique d'une case  $(i,j)$  donnée.

Soit  $X_n^{i,j}$  désigne le nombre de fois où la case  $(i,j)$  a été retournée lorsqu'on a joué  $n$  coups au hasard et  $p_n^{i,j}$  la probabilité que la valeur de  $X_n^{i,j}$  soit un nombre pair.

Pour  $1 < i, j < n$ , en jouant un coup au hasard, on a une probabilité  $5/k^2$  de retourner le pion de la case  $(i,j)$  car on peut tirer directement la case  $(i,j)$  ou alors l'une des quatre cases voisines. La formule des probabilités totales permet alors d'écrire, pour  $n > 1$  :

$$\begin{aligned} p_n^{i,j} &= \text{Prob}(X_n^{i,j} \text{ pair}) = \\ &= \text{Prob}(X_n^{i,j} \text{ pair et } X_{n-1}^{i,j} \text{ impair}) + \\ &\quad \text{Prob}(X_n^{i,j} \text{ impair et } X_{n-1}^{i,j} \text{ pair}) \\ &= \text{Prob}(X_n^{i,j} \text{ pair} / X_{n-1}^{i,j} \text{ impair}) \times (1 - p_{n-1}^{i,j}) + \\ &\quad \text{Prob}(X_n^{i,j} \text{ pair} / X_{n-1}^{i,j} \text{ pair}) \times p_{n-1}^{i,j} \end{aligned}$$

$$P_n^{i,j} = (5/k^2) \times (1 - P_{n-1}^{i,j}) + (1 - 5/k^2) \times P_{n-1}^{i,j} .$$

On en déduit alors que la limite de  $P_n^{i,j}$  lorsque  $n$  tend vers l'infini est 0,5.

Un calcul analogue montre qu'il en est de même pour des cases situées au bord du damier (en remplaçant  $5/k^2$  par  $3/k^2$  pour les coins et par  $4/k^2$  pour les autres cases qui sont sur un bord). Autrement dit, pour  $n$  grand, la probabilité que la case  $(i,j)$  soit noire est voisine de 0,5.

Les variables  $X_n^{i,j}$ ,  $1 < i, j < n$  ne sont cependant pas indépendantes, et passer d'une case à l'ensemble des cases du damier relève de techniques plus difficiles du calcul des probabilités.

## Conclusion

L'intérêt pour le jeu de « lights out » se maintient depuis plusieurs années. Un grou-

pe de l'Irem de Grenoble travaille dessus, ainsi que d'autres groupes dans divers pays, comme on peut le voir en cherchant sur le WEB (mots clefs : « lights out game ») ; il y a même un site du « fan club » de ce jeu.

Comme nous l'avons dit dans le préambule, nous avons présenté ici une première approche possible par un mathématicien. On peut aborder autrement cette situation, en la « plongeant » directement dans d'autres champs mathématiques.

La bibliographie est abondante, et une partie est facilement accessible à partir des sites :

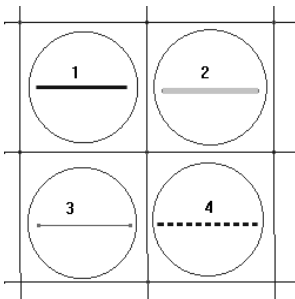
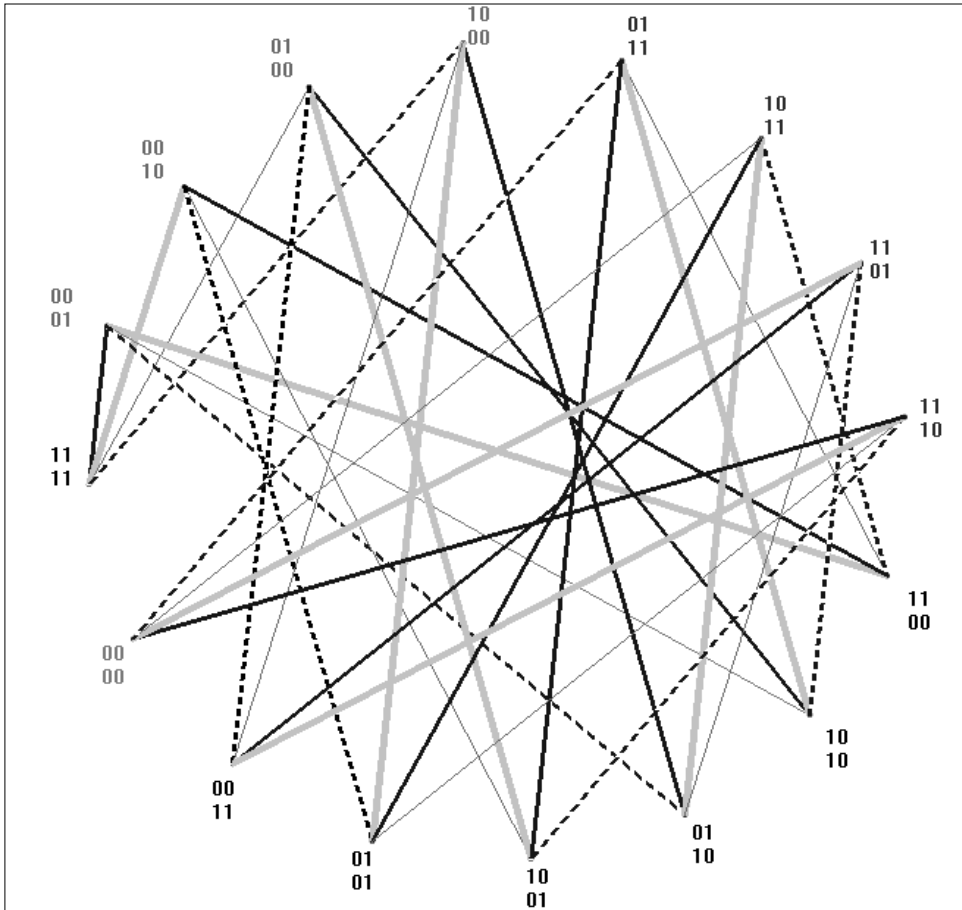
<http://capital2.capital.edu/faculty/jstadler/light-sout/lightsout.PDF>

<http://dalila.sip.ucm.es/~cpareja/lo/>

<http://www.geocities.com/jaapsch/puzzles/lomath.htm>

**ANNEXE**

**Le graphe des 16 damiers pour le cas  $2 \times 2$ .**



Les cases sont numérotées comme indiqué ci-contre. Les quatre traits possibles correspondant aux quatre cases du damier sont représentés ci-contre.

On peut numéroter les sommets de 1 à 16, le sommet 1 correspondant au damier noir et le 16 au damier blanc.

**Figure 1 :** Graphe des damiers du quadrillage  $2 \times 2$ .

La matrice d'adjacence  $A=(a_{ij})$  du graphe  $G_{2 \times 2}$  est une matrice  $16 \times 16$  dont le terme  $a_{ij}$  vaut 1 si les sommets  $i$  et  $j$  sont voisins dans le graphe, c'est-à-dire si on peut passer du damier  $i$  au damier  $j$  en un seul coup (la numérotation des 16 damiers est celle qui est indiquée dans la figure 1 ci-dessus). On remarque que  $A$  est une matrice symétrique où la somme des éléments d'une ligne ou d'une colonne vaut 4 (en effet, à partir d'un damier quelconque, on peut faire quatre coups distincts qui amènent à 4 damiers voisins distincts).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Notons  $A^n = (a_{ij}^{(n)})$  la puissance  $n$ -ème de  $A$  (le produit des matrices est ici le produit classique, ligne par colonne) alors :  $a_{ij}^{(n)}$  est le nombre de parcours avec  $n$  arêtes allant du sommet  $i$  au sommet  $j$  dans le graphe  $G_{2 \times 2}$ .

Ou encore :  $a_{ij}^{(n)}$  est le nombre de parties de longueur  $n$  qui, partant du damier  $i$ , arrivent au damier  $j$ .

[Cela se démontre par récurrence : en effet le nombre de parcours menant de  $i$  à  $j$  en  $n$  étapes est égal à la somme du nombre de parcours de  $i$  à  $k$  en  $n - 1$  étapes, somme prise pour tous les sommets  $k$  voisins de  $j$ . Ce qui peut aussi s'écrire, avec les notations employées :  $\sum_{k=1}^{16} a_{ik}^{n-1} a_{kj}$ . Mais cette quantité est précisément  $a_{ij}^{(n)}$ .]

En particulier,  $a_{ij}^{(n)} > 0$  signifie qu'il existe au moins une partie de longueur  $n$  menant de  $i$  à  $j$ .

On va ici calculer  $S_n = A + A^2 + \dots + A^n$  et s'arrêter soit si la colonne 16 de  $S_n$  a tous ses termes strictement positifs (ce qui signifie qu'on peut trouver une partie gagnante pour chaque damier), soit pour  $n = 15$  puisqu'on a vu qu'une partie gagnante est au plus de longueur 15. Le programme pour exécuter les calculs avec un logiciel de calcul scientifique (scilab par exemple) est de quelques lignes et donne le résultat en quelques secondes ; il s'arrête à  $n = 4$ . Tous les damiers sont donc gagnants **en au plus 4 coups**.

On remarque de plus, en observant  $S_4$ , que tous ses termes sont strictement positifs, ce qui, en terme de graphe s'interprète en disant que le graphe est *connexe* et de *diamètre* 4. Le tableau 1 donne, en les transposant, les dernières colonnes de  $A, A^2, A^3, A^4$ .

damier	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Nb. noirs	4	1	1	1	1	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2
A	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
A <sup>2</sup>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	2	2	2	2
A <sup>3</sup>	0	6	6	6	6	10	10	10	10	0	0	0	0	0	0
A <sup>4</sup>	24	0	0	0	0	0	0	0	0	32	32	32	32	32	40

*Tableau 1* : En première ligne, le codage des damiers, numérotés en parcourant le graphe de la figure 1 dans le sens des aiguilles d'une montre, en partant du damier noir (damier 1) jusqu'au damier blanc (damier 16). En deuxième ligne, le nombre de cases noires des damiers considérés. Les lignes suivantes sont les transposées de la dernière colonne des matrices  $A, A^2, A^3, A^4$ . Par exemple, le 10ème terme de la dernière colonne de  $A^2$ , noté  $a_{10,16}^{(2)}$ , vaut 2, c'est-à-dire qu'il y a deux parties qui permettent de passer du damier 10 au damier 16 (parties dont les damiers successifs sont 10, 6, 16 et 10, 7, 16).