
DEBAT MATHEMATIQUE, DEBAT DEMOCRATIQUE :

Une expérience d'enseignement à de futurs professeurs d'école

Georges MOUNIER
Irem et IUFM de Lyon

Dans le cadre d'un parcours de formation de professeurs d'école stagiaires intitulé « l'école du citoyen », j'ai été amené à intervenir, à plusieurs reprises, comme professeur d'IUFM, enseignant de Mathématiques, sur le thème « comment les disciplines scolaires peuvent-elles participer à la formation du citoyen ? »¹.

Je décris ci-dessous les deux séances de trois heures que j'ai animées.

Le texte d'appel à destination des stagiaires indique bien le plan de ce qui a été fait :

La construction des valeurs démocratiques peut se faire aussi en mathématiques.

¹ Le programme de 2002 indique : « la tenue de débats où chacun doit savoir réfréner sa parole, laisser la place à celle de l'autre et comprendre son point de vue, chercher à le convaincre en argumentant, est la première forme d'éducation à la démocratie. » [B.O.]

En mathématiques, la recherche de problème donne souvent lieu à un débat. Dans une démocratie la consultation des citoyens est précédée d'un débat.

A partir d'une recherche de problèmes, on essaiera de répondre aux questions suivantes :

— *quels sont les points communs et quelles sont les différences entre le débat en mathématiques et le débat démocratique : pour ce qui est de leurs modalités d'organisation, de leurs enjeux, de leur fonction.*

— *quels problèmes mathématiques faut-il choisir pour obtenir un débat riche ? comment organiser le débat ?*

— *argumenter à l'école primaire, est ce déjà possible ?*

1. Vivre ensemble une recherche de problème

Rechercher ensemble un problème est pour les stagiaires le moyen de se constituer une expérience vécue commune, une référence. Mais quel problème choisir ?

J'ai choisi le problème dit des transvasements, ou des mélanges², dans sa version mélange d'eau et de vin :

On dispose d'une jarre de vin et d'une jarre d'eau. On prend un verre de vin dans la jarre de vin et on le verse dans la jarre d'eau. Puis on prend un verre du mélange obtenu et on le verse dans la jarre de vin (le verre est le même pour les deux opérations).

Parmi ces trois affirmations laquelle vous paraît juste :

- *il y a plus de vin dans la jarre d'eau que d'eau dans la jarre de vin*
- *il y a plus d'eau dans la jarre de vin que de vin dans la jarre d'eau*
- *y a autant de vin dans la jarre d'eau que d'eau dans la jarre de vin.*

La recherche est organisée par groupes de quatre stagiaires : trois chercheurs et un observateur qui est chargé de noter les opinions de départ de ses camarades, leurs changements d'opinion, quels sont les arguments échangés, et en particulier quels sont ceux qui emportent l'adhésion du groupe. Chaque groupe rédige un transparent présentant ses conclusions et ses arguments. Le débat en grand groupe qui suit est lui aussi observé par quelques stagiaires désignés à cette fin.

² Dans [Julo] ce problème est évoqué à propos de la représentation que le lecteur se fait d'un problème, en fonction de son énoncé. [Briand] l'évoque pour d'autres raisons.

Ce problème permet un débat animé, surtout à l'intérieur des groupes (au moment de la mise en commun, le consensus est souvent déjà acquis), parce qu'habituellement une partie des stagiaires est vite convaincue de la vérité de la deuxième affirmation (fausse), parce que les changements de conviction au cours de la recherche sont fréquents, parce que celui qui cherche le problème peut facilement prendre possession de la situation et s'engager dans des essais, des conjectures (voir en annexe A quatre exemples de productions de groupes).

La version de l'énoncé choisie — eau et vin : deux liquides miscibles, plutôt qu'eau et huile — est celle qui, favorisant une interprétation en termes de concentration, donne le plus de variété de prises de position.

Si le débat n'a pas la richesse souhaitée parce que l'accord se fait trop vite sur la bonne réponse, la recherche peut être relancée : que se passe-t-il si les deux récipients n'ont pas même contenance au départ, si on ne mélange pas ? Le résultat général : même si les deux récipients n'ont pas même contenance au départ, même si on ne mélange pas, il y a autant de vin dans la jarre d'eau que d'eau dans la jarre de vin reste intrigant, dérangeant pour beaucoup : il n'est pas rare que des stagiaires viennent me voir à l'issue du débat pour me dire que certes ils sont convaincus par les arguments échangés, mais qu'ils ont du mal à y croire.

D'autres problèmes pourraient convenir pour une telle recherche, citons, parmi d'autres :

La vache et le paysan « Un paysan se rend au marché. Il achète une vache 5 000 F. Il la revend 6 000 F. Se ravisant, il la rachète 7 000 F. Il la revend de nouveau 8 000

F. A-t-il gagné de l'argent, en a-t-il perdu, ou n'a-t-il rien gagné ni perdu ? » ([Péault], [Kuzniak]).

2. Débat mathématique, débat démocratique

Une fois close la recherche de problème, je pose la question : « quelles sont, selon vous, les différences, les ressemblances entre le débat mathématique (tel que par exemple, celui que vous venez de vivre) et le débat démocratique ? ».

Dans la formulation de la question, pour préciser le sens de débat « mathématique », je fais référence à la recherche vécue en commun, mais jusqu'ici je ne précisais pas le sens de « débat démocratique », je supposais, assez naïvement, que les stagiaires et moi-même avions une référence implicite commune de ce terme. Ce que j'ai constaté, c'est que la démocratie, dans les représentations des stagiaires, est vue essentiellement à travers deux moments : les élections nationales et les débats télévisés. Rares sont les allusions à d'autres types d'élections (locales par exemple), à d'autres moments de débat (réunion électorale publique) ou à d'autres lieux où peut fonctionner la démocratie (associations, mutuelles, syndicats...) ³.

J'envisage donc de rajouter au dispositif un temps, permettant un échange sur le débat démocratique aujourd'hui, en posant aux stagiaires la question : « selon vous dans quels moments, dans quels lieux, s'incarne le mieux aujourd'hui le débat démocratique ? », question qui devrait, je crois, permettre d'ouvrir la représentation que les stagiaires se font du débat démocratique.

3 Le mot démocratie évoque aujourd'hui pour presque tous la démocratie représentative de nos systèmes politiques et non la démocratie directe de la cité grecque ou d'une petite association, le débat mathématique peut-il lui être autre que direct ?

La réponse à ma question est d'abord préparée en petits groupes, et les réponses des groupes sont mises en commun, chaque groupe venant inscrire au tableau, dans la colonne adéquate ses différences et ses ressemblances. On trouvera en annexe un échantillon des réponses recueillies.

On peut noter que chez certains stagiaires, l'image des mathématiques qui transparaît à travers leurs réponses est quelquefois très négative, très éloignée de ce que le professeur de mathématiques souhaiterait entendre : la classe de mathématiques est pour ces stagiaires le lieu où une vérité de fer cloue le bec des malheureux élèves ou étudiants en s'imposant à eux sans laisser place à aucun débat.

La mise en commun que j'organise après le recueil des réponses est le moment le plus riche et le plus difficile : obtenir un consensus peut s'avérer difficile, mais le plus souvent l'accord peut se faire.

Voici la synthèse que je propose. L'enjeu du débat mathématique au sein de la communauté des mathématiciens est d'arriver à un consensus à un moment historique donné sur la vérité d'une proposition mathématique, la solution d'un problème. La fonction de la libre discussion des solutions est de se protéger de l'erreur. En démocratie, le débat est le moyen pour les citoyens de se créer une opinion informée ⁴, (des faits et aussi de l'opinion des autres) de façon à ce qu'ensuite une décision puisse être prise. Mais les modalités d'organisation de ces deux types de débat ne sont pas si différentes et c'est ce que nous examinerons dans la suite.

4 Selon C. Castoriadis, « il n'y a en politique pas de savoir certain et assuré, il n'y a que de l'opinion également et équitablement partagée entre tous » [Castoriadis] et c'est bien sûr un point de différence avec les mathématiques.

3. A l'école

a) Le débat mathématique peut donc être une introduction au travail sur les règles du débat à l'école⁵. Dans une situation épurée (en particulier des composantes affectives) donc plus facile à travailler, moins impliquante on peut découvrir, faire fonctionner, institutionnaliser les règles du débat rationnel⁶.

D'autres questions se posent, dont j'esquisserai seulement les réponses renvoyant à quelques ouvrages bien connus.

b) Argumenter à l'école primaire, est ce déjà possible ?

A l'école l'élève découvre la nécessité de prendre en compte l'argumentation d'autrui⁷, de justifier ce qu'il dit. Il doit devenir capable d'abandonner sa proposition. Plus spécifiquement, en mathématiques, il apprend à se dégager d'arguments extra-mathématiques, à exiger une formulation claire pour se prononcer [Vrai].

c) Comment organiser le débat ?

C'est là que les observations effectuées par les stagiaires, et en particulier les observateurs, dans la recherche de problème initiale peuvent être utiles. On peut aussi utilement se référer à [Arsac] ou [Douaire].

5 « Des débats moins formalisés [que la demi-heure par semaine inscrite à l'emploi du temps] peuvent avoir lieu dans les séquences d'apprentissage » [B.O.] page 42.

6 Je me demande si la comparaison – débat mathématique, débat démocratique – ne donne pas de la démocratie une image idéale, trop rationnelle, c'est-à-dire en exclut les éléments d'irrationalité nécessairement présents dans les décisions humaines, voir par exemple [Benasayag].

7 « Au cycle 2, les écrits de recherche servent également souvent de support aux échanges collectifs au cours desquels les élèves trouvent une occasion de s'initier à l'argumentation et à ses exigences (écoute des autres, contrôle par autrui de ce qui est avancé ...) » [B.O.] page 51.

La recherche, d'abord individuelle pour que chacun se construise sa propre représentation du problème, puis en groupe — le groupe doit se mettre d'accord sur une solution, les propositions de chacun sont discutées — débouche sur la rédaction d'affiches qui sont ensuite le support d'un débat sur la validité des solutions proposées. Si le maître a veillé à ce que la recherche soit bien de la responsabilité des élèves, il est garant de la validité des résultats lors de la synthèse.

C'est à ce moment que je demande aux stagiaires quelles *règles du débat* ils souhaiteraient « institutionnaliser » dans leur classe. Cette activité plaît beaucoup aux stagiaires qui arrivent souvent à se dégager du sacro-saint « on doit lever la main pour demander la parole ». On trouvera en annexe un exemple de règles proposées par les stagiaires.

d) Quels problèmes mathématiques choisir ?

Il importe de bien noter que tous les problèmes mathématiques ne donnent pas lieu à débat. Dans un certain nombre de cas, l'intérêt du problème réside dans la mise en oeuvre des moyens de la recherche — on parle de problèmes pour apprendre à chercher — mais une fois cette recherche effectuée, il n'y a pas place pour un débat.

Donnons un exemple : le problème des « trois nombres qui se suivent » [Ermel].

Je pense à trois nombres (entiers) qui se suivent. En les ajoutant, on obtient 96. Quels étaient ces trois nombres ?

Proposé en CM1, ce problème donne lieu à une recherche riche, mais à aucun débat : une fois les trois nombres trouvés, la vérifi-

cation que leur somme vaut 96 suffit pour être convaincu de la validité de la réponse. Il faut généraliser le problème pour que le débat ait lieu :

Si je cherche trois entiers consécutifs de somme 96, je trouve 31, 32 et 33. Si je cherche trois entiers consécutifs de somme 25, je trouve ... Est il toujours possible de trouver ces trois entiers ?

Le débat peut maintenant porter sur la caractérisation des valeurs pour lesquelles il est possible de trouver les trois entiers.

Le problème que je fais analyser aux stagiaires est celui de la recherche des critères de divisibilité par quatre :

A quoi on reconnaît, sans faire la division, qu'un nombre est multiple de quatre ?.

Il s'agit là aussi de dégager une règle générale. L'étude des arguments que développent les élèves de CM1 ([Vrai]) pour invalider la proposition *un nombre est multiple de quatre s'il se termine par zéro ou deux ou quatre ou six ou huit* et l'examen de l'échan-

ge argumentatif qui les amène ensuite à corriger leur proposition initiale et à remarquer que si le nombre se termine par quatre alors il faut aussi, pour qu'il soit multiple de quatre, que son chiffre des dizaines soit pair, s'il se termine par deux que son chiffre des dizaines soit impair... passionne les stagiaires.

Je conclurai en reprenant deux citations : une de Bernard Rey [Rey] « Il importe au plus haut point que l'élève apprenne à juger par lui-même du vrai et du faux. D'abord, parce que c'est là une pièce essentielle de l'équipement de l'individu... mais aussi parce que c'est un instrument pour conduire sa vie personnelle... Et, bien entendu, savoir juger du vrai et du faux, est essentiel dans une organisation politique où le peuple est souverain » et une autre de Marc Legrand⁸ [Legrand] : « L'intérêt d'un tel enseignement [scientifique] pour fonder une démocratie, c'est donc de proposer au futur citoyen des modes de mise en accord qui font appel à sa responsabilité d'être pensant ; recherche d'accords qui ne reposent ni sur l'autorité absolue d'un supérieur infaillible, ni sur l'abandon à l'irrationnel, à la chance ou la malchance, à la volonté divine ».

⁸Marc Legrand ne faisait sans doute pas référence à l'enseignement à l'école primaire mais ce qu'il dit me semble pouvoir s'y appliquer.

Bibliographie

[Arsac1] G. Arsac, G. Germain, M. Mante, Problème ouvert et situation problème Irem de Lyon.

[Arsac2] G. Arsac, Un cadre d'étude du raisonnement mathématique, in : Grenier D. (ed) Séminaire Didactique et Technologies Cognitives en Mathématiques. Grenoble : IMAG.

[Benasayag] Miguel Benasayag in Après les grands soirs revue Mutations Ed Autrement.

[B.O.] Horaires et programmes d'enseignement de l'école primaire B.O. 14 février 2002.

[Briand] Joël Briand Les transvasements in Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques COPIRELEM Cahors 1991.

[Castoriadis] Cornelius Castoriadis La démocratie athénienne : vraies et fausses questions in Nouveaux regards sur Athènes Esprit, no 12, déc. 1993.

[Douaire] J. Douaire, C. Hubert, Mise en commun et argumentation en mathématiques, Grand N 68, 2001.

[Ermel] Ermel CM1 Apprentissages numériques et résolution de problèmes Hatier.

[Kuzniak] Alian Kuzniak Le conflit socio-cognitif en formation des maîtres in Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques COPIRELEM Pau 1992.

[Mill] J.S. Mill Considérations sur le gouvernement représentatif, cité dans M.I. Finley, Démocratie antique et démocratie moderne, Payot 1976.

[Legrand] Marc Legrand Sciences, enseignement, démocratie et humanisme in Copirelem Actes du vingt septième colloque Inter Irem Chamonix mai 2000.

[Péault] Hervé Péault La vache et le paysan in Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques COPIRELEM Cahors 1991.

[Rey] Bernard Rey Faire la classe à l'école élémentaire ESF.

[S. H.] Y a-t-il eu un miracle grec ? Sciences Humaines HS 31.

[Vernand] Jean Pierre Vernant Religions, histoire, raisons Maspero.

[vrai] Vrai ou faux, on en débat INRP

ANNEXE A**Quatre productions de groupes dans la
recherche du problème des mélanges***En faveur d'une réponse fausse*

• Intuition

Quelle que soit la quantité du verre : il y a plus de vin dans la jarre d'eau que d'eau dans la jarre de vin. On a essayé de le démontrer avec des exemples numériques, plus schéma, on a cherché des contre-exemples, raisonnement avec des inconnus. Pas de preuve mathématique mais intuition.

• Calculs

1 litre de vin et 1 litre d'eau. On verse 20 cl de vin dans l'eau.

120 \rightarrow 20 de vin. 20 \rightarrow ?. $400/120 = 3,3$ de vin par verre de 20 cl.

Donc dans jarre de vin, on a : $80 + 3,3 = 83,3$ de vin et $100 - 83,3 = 16,7$ d'eau.

Dans jarre d'eau, on a : 5 verres donc $5 \times 3,3 = 15,15$ de vin et $100 - 15,15 = 84,85$ d'eau.

Donc il y a plus d'eau dans la jarre de vin que de vin dans la jarre d'eau.

En faveur d'une réponse exacte

• En choisissant la contenance du verre

100 cl d'eau	100 cl de vin
--------------	---------------

transvasement du verre de vin (10 cl)

110 cl de mélange	90 cl de vin
-------------------	--------------

transvasement d'un verre de mélange : 9 cl de vin, 1 cl d'eau

91 cl d'eau. 9 cl de vin	91 cl de vin, 9 cl d'eau
--------------------------	--------------------------

• Avec des fractions

Jarre de vin	Jarre d'eau
--------------	-------------

100 V	100 E
-------	-------

90 V	100E + 10V
------	------------

donc 100/11 d'eau et 10/11 de vin

$(90 + 10/11)V + 100/11 E$	$(100 - 100/11) E + (10 - 10/11) V$
----------------------------	-------------------------------------

$= 1000/11 V + 100/11 E$	$= 1000/11 E + 100/11 V$
--------------------------	--------------------------

ANNEXE B**Mathématiques et démocratie en Grèce antique.**

L'intérêt que je porte depuis longtemps à la fondation de la démocratie en Grèce antique, et les lectures que j'ai pu faire sur ce thème sont sans doute à l'origine de cette idée d'une comparaison du débat mathématique et du débat démocratique.

L'idée que la science est fille de la démocratie est défendue par nombre d'historiens, et le texte suivant de Jean Pierre Vernant [Vernant] illustre bien ce point de vue :

« Ce n'est certainement pas le fait du hasard si la raison surgit en Grèce comme une conséquence de cette forme si originale d'institutions politiques qu'on appelle la Cité. Avec la Cité, et pour la première fois dans l'histoire de l'homme, le groupe humain considère que ses affaires communes ne peuvent être réglées, les décisions d'intérêt général prises, qu'au terme d'un débat public et contradictoire, ouvert à tous et où les discours argumentés s'opposent les uns aux autres. Si la pensée rationnelle est apparue dans des cités grecques d'Asie Mineure comme Milet, c'est parce que les règles du jeu politique dans le cadre de la cité – débat public, argumenté, librement contradictoire – étaient devenues aussi la règle du jeu intellectuel ».

Pour d'autres historiens le facteur déclenchant l'émergence de la science grecque est l'alphabet ou l'économie monétaire... Avec les stagiaires, je ne suis pas entré dans ce débat de spécialistes⁹..., je me suis contenté de pointer que le libre débat des solutions nécessaire aux mathématiques — à un certain type de mathématiques — s'accommode mal de l'infailibilité postulée d'éventuels participants au débat.

Sur l'importance du débat dans la formation du citoyen, je citerai John Stuart Mill [Mill] : *« Malgré les défauts du système social et des idées morales de l'antiquité, la pratique des Jurys et de l'Assemblée élevait le niveau intellectuel du simple citoyen d'Athènes bien au-dessus de ce qu'on n'a jamais atteint dans aucune agglomération d'hommes, antique ou moderne. »*

ANNEXE C**Comparer débat mathématique
et débat démocratique**

Voici une sélection des affirmations des stagiaires, elles reflètent l'image courante qu'ils se font des mathématiques : image souvent sans nuance, mais qui fait bien apparaître quelques-unes des différences les plus importantes entre les deux types de débat.

Différences

- en maths, il y a une seule réponse (une vérité), pas en démocratie¹⁰
- en maths ce n'est pas nécessairement la majorité qui a raison, contrairement à ce qui

⁹ La revue Sciences Humaines [S. H.] propose une synthèse très accessible sur le « miracle grec ».

¹⁰ Quelques stagiaires nuancent cette affirmation en parlant soit des paradoxes, soit d'axiomatique.

se passe en démocratie : il existe en mathématiques une solution validée par les experts qui reste vraie quelles que soient les représentations de la majorité sur le sujet

- les enjeux ne sont pas les mêmes, une « erreur » comme, par exemple, l'élection d'Hitler comme chancelier du Reich peut avoir des conséquences plus graves en démocratie
- en démocratie il s'agit de convaincre, en mathématiques de prouver
- en démocratie, il y a des échéances, le débat doit donc être limité dans le temps, même s'il pourra être repris
- en démocratie on cherche une réponse à un problème dans un contexte précis, à un moment historique donné¹¹
- en démocratie on peut toujours discuter une décision, en mathématiques cela n'a plus de sens lorsque cela a été démontré¹²
- en démocratie les points de débat portent sur des valeurs — par exemple le débat sur le droit ou non à l'avortement — pas en mathématiques¹³

Ressemblances

- chacun peut défendre son point de vue, chaque point de vue est pris en compte
- les règles d'écoute et de prise de parole sont les mêmes
- le débat permet de se confronter à l'altérité
- le débat permet d'avancer vers une solution
- il est dans les deux cas nécessaire d'argumenter

ANNEXE D

Quelques règles du débat en classe

- celui qui parle le plus fort n'a pas nécessairement raison
- celui qui a raison n'est pas nécessairement le meilleur de la classe¹⁴
- chacun peut contribuer à enrichir le débat (à faire progresser vers la solution)

11 Ce qu'ils opposent au caractère intemporel des mathématiques. Il faudrait pouvoir leur faire distinguer : le théorème de Pythagore est encore aujourd'hui, longtemps après sa découverte, un théorème, mais les préoccupations des mathématiciens, leurs sujets de recherche sont très liés à leur époque.

12 Cavailles parle du « caractère de nécessité » des vérités mathématiques.

13 Même s'il peut y avoir débat sur l'usage que la société peut faire des mathématiques, mais il ne s'agit pas alors d'un débat mathématique.

14 « L'enfant doit apprendre que la vérité d'une affirmation ne dépend ni du statut ni du pouvoir de celui qui la profère » [Rey] .

- on a le droit de changer d'avis (on a même du mérite à le faire)
- écouter les autres peut aider à trouver la solution
- se moquer de celui qui se trompe ne fait pas progresser le débat
- en maths, il faut formuler les propositions de façon précise, si on veut pouvoir se comprendre (se prononcer), sinon on ne sait pas de quoi on parle
- en maths (et ailleurs ?) une proposition et son contraire ne peuvent être toutes les deux vraies.