EXPERIMENTER POUR APPRENDRE EN MATHEMATIQUES

Thierry DIAS
IUFM de Lyon & LIRDHIST Université Lyon
Viviane DURAND-GUERRIER
IUFM de Lyon,
LIRDHIST Université Lyon 1 & Irem de Lyon

Résumé : Dans cet article, nous soutenons l'intérêt et la possibilité de concevoir des situations d'apprentissage mettant en œuvre le recours à l'expérience dans la perspective de favoriser l'accès aux connaissances mathématiques pour le plus grand nombre d'apprenants. Une brève étude historique et épistémologique des polyèdres réguliers convexes nourrit notre analyse a priori et nous permet de fonder notre proposition d'une situation d'apprentissage en géométrie des solides faisant une large place à la démarche expérimentale. L'analyse d'un débat provenant d'extraits d'un corpus prélevé dans le cadre d'une session de formation d'enseignants spécialisés permet d'attester de ce va-et-vient entre les objets sensibles et les objets théoriques qui caractérise la démarche expérimentale.

Mots clés : analyse a priori – apprentissage - enseignement spécialisé – épistémologie – expérience – expérimentation – géométrie – milieu - polyèdres réguliers - science expérimentale - solides

Introduction

Dans la perspective d'un enseignement des mathématiques pour tous, il convient de s'interroger sur les moyens dont nous disposons pour favoriser l'accès du plus grand nombre d'élèves non seulement aux outils et méthodes spécifiques des mathématiques, mais également à la signification des objets mathématiques et de leurs propriétés et à leurs liens avec les autres domaines de la connaissance et de l'activité humaine.

Comme nous le constatons régulièrement lors de nos interventions dans la formation initiale ou continue des professeurs d'école, l'enseignement des mathématiques semble contribuer de façon assez irrémédiable à de nombreux «divorces» entre les individus et les objets mathématiques, ceci pouvant même conduire, dans certains cas, à un rejet de cette discipline par certains de ceux qui auront à l'enseigner [2]. Nous faisons l'hypothèse que pour une large part, ceci est dû au fait que, même à l'école élémentaire, l'enseignement des mathématiques s'appuie sur des méthodes favorisant l'intervention parfois trop rapide d'un formalisme au détriment de la recherche

1 Laboratoire Interdisciplinaire de Recherches en Didactique et en Histoire des Sciences et des Techniques.

2 D'une certaine manière, la formation initiale et continue en mathématiques des professeurs d'école permet d'observer le rapport aux mathématiques de personnes diplômées, aux parcours universitaires et/ou professionnels variés qui, pour la majorité d'entre elles, n'ont plus fait de mathématiques depuis le lycée.

de sens, et ceci bien que depuis quelques années, de nombreuses préconisations institutionnelles prônent la nécessaire évolution des démarches d'enseignement des disciplines scientifiques, y compris en ce qui concerne les mathématiques. Les instructions officielles insistent notamment sur un aspect incontournable dans la construction des connaissances en sciences : le recours à l'expérience. Ceci étant alors surtout destiné à provoquer des changements dans l'enseignement des disciplines scientifiques traitant du domaine de l'empirie et, dans une moindre mesure, les mathématiques.

La question de savoir si les mathématiques comportent ou non une dimension expérimentale n'est pas nouvelle chez les concepteurs de programmes comme Assude (2002) nous le rappelle fort à propos en mettant en lumière un épisode *oublié* de l'enseignement des mathématiques. L'année 1957 a vu en effet l'introduction généralisée de Travaux Pratiques dans les classes de Sixième et de Cinquième. Comme le montrent les extraits des Instructions officielles citées par l'auteur, la question de savoir si les mathématiques sont une science expérimentale est explicitement posée et reçoit une réponse positive.

> « Observation et expérimentation : s'agit-il vraiment d'aligner les mathématiques sur les autres disciplines ?
>
> Il n'est pas douteux qu'au départ, dans l'élaboration de toutes les sciences, les démarches intellectuelles sont de même ordre ; une discrimination intervient après, lorsque le mathématicien ayant créé des êtres de raison, va s'efforcer d'en étudier les propriétés. Mais son travail n'a de valeur profonde que si sa construction, toute abstraite qu'elle soit, prend solidement appui sur le réel, si elle est capable de le rejoindre et de s'y adapter dans une large mesure.» (I.O. de Janvier 1957)[3].

L'introduction des Travaux Pratiques en Mathématiques a été soutenue à l'époque par l'Association des Professeurs de Mathématiques et en particulier par son président Gilbert Walusinski, ainsi que par des mathématiciens de renom comme Maurice Fréchet ou Jean Leray qui écrit :

> « Chacun doit, pour les comprendre, redécouvrir les Mathématiques et ne peut le faire qu'en étudiant les problèmes qui furent leur origine. Qu'importe s'il le fait en postulant tout ce qui lui semble évident, sans se soucier dès le premier pas, d'utiliser un système minimum de postulats.» (Leray, in APMEP n°179, p.75).

Il est tout à fait clair cependant qu'une telle position sur ce que sont les mathématiques ne fait pas consensus au sein de la communauté des enseignants de mathématiques, et au-delà, des mathématiciens professionnels. Dieudonné (1978) soutient par exemple que :

> « Il semble qu'on a une vue assez juste du développement des mathématiques en considérant que son principal moteur est d'origine interne, la réflexion profonde sur la nature des problèmes à résoudre sans que l'origine de ces derniers exerce beaucoup d'influence. » (p.11)

Peut-être faut-il voir un lien entre les positions du type de celles de Dieudonné et la disparition des Travaux Pratiques de Mathématiques en 1977 lors de la *Réforme des*

3 Les extraits des Instructions Officielles, ainsi que la citation de Jean Leray, sont repris de Assude, 2002, pp.51-52.

Mathématiques Modernes. En accord avec Belhoste (1998), Assude fait l'hypothèse qu'il s'agit en fait plutôt d'une « quasi-disparition » au sens où « les T.P. se sont naturalisés en tant que forme d'étude par le biais de la notion d'activité » mais que « la réflexion épistémologique sur la nature de ces activités est beaucoup plus diluée.» (op. cité, p.62). En particulier, on peut se demander ce qu'il reste dans les activités proposées à l'école élémentaire et au collège de l'interrogation profonde sur les rapports entre les mathématiques et la réalité, entre les objets sensibles et les objets mathématiques, dont la finalité pour les concepteurs des programmes de 1957 était de permettre un meilleur accès à la signification des mathématiques :

> « N'est-il pas indispensable de faire bien saisir à l'enfant, puis à l'adolescent, les liens étroits qui unissent les mathématiques au monde sensible. N'est-ce pas là un moyen — l'un des meilleurs sans doute — pour mettre en confiance le débutant, pour éviter qu'il ne se sente très vite rebuté par une étude où il pourrait ne voir, si elle restait privée de toute vraie lumière, qu' une sorte de jonglerie, souvent purement verbale et sans signification apparente. » (I.O. de Janvier 1957).

Cette question est selon nous toujours d'actualité et nourrit depuis près de trente ans de nombreux travaux de recherches en didactique des mathématiques [4]. Comme nous l'avons écrit dans un texte paru dans la Gazette du Mathématicien à la suite d'un débat organisé par la Société Mathématique de France sur les nouveaux programmes de l'école primaire :

> « Une caractéristique essentielle du travail des didacticiens des mathématiques est une interrogation forte sur la dimension épistémologique des savoirs de l'école. Nécessaire à tous les niveaux de l'enseignement, ce questionnement de nature épistémologique est particulièrement crucial à l'école. En effet, au cœur de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire se trouve posée la question de la signification des objets mathématiques, question difficile s'il en est, mais incontournable si l'on veut bien considérer que l'apprentissage des mathématiques ne se résume pas à l'appropriation d'un formalisme opératoire. » (Durand-Guerrier, 2004a)

Dans notre travail de formateurs et de chercheurs, nous faisons donc l'hypothèse que la prise en compte de la dimension expérimentale des mathématiques est tout à fait essentielle, à l'école élémentaire, et au-delà [5], ainsi que dans la formation initiale et continue des enseignants. En outre, en accord avec Conne (1999), nous considérons que l'enseignement spécialisé est un terrain favorable pour mettre à l'épreuve des situations didactiques travaillant cette dimension, dans la mesure où les phénomènes didactiques qui nous intéressent y sont exacerbés. Cependant, trouver des situations permettant un questionnement épistémologique authentique à l'école élémentaire n'est pas toujours facile. La géométrie des solides nous est vite apparue comme un lieu possible de confrontation entre les contraintes s'imposant aux *objets sensibles* du monde réel et les résultats théoriques concernant les *objets mathématiques* de la géométrie euclidienne. Dans ce qui suit, la question sur laquelle nous allons nous arrê-

4 Cette problématique est très présente selon nous dans de nombreux travaux conduits par Guy Brousseau ; la situation d'agrandissement du puzzle (Brousseau, 1998) en étant un exemple paradigmatique.

5 C'est la position revendiquée par des chercheurs concepteurs de situations de recherche en mathématiques discrètes notamment. Voir par exemple le site de l'ERTé maths à modeler : mathamodeler.net.

ter concerne le nombre de polyèdres réguliers convexes que l'on peut construire. Les polyèdres réguliers convexes nous intéressent car ils peuvent être considérés de deux points de vue : comme objets mathématiques construits dans une théorie : la Géométrie Euclidienne ; mais aussi comme objets sensibles, connus sous le nom de Solides de Platon, que l'on peut construire effectivement avec différents matériaux et qui ont une forte valeur symbolique et culturelle.

Nous nous proposons, dans un premier temps, de questionner la signification de l'expérience dans le cas particulier des polyèdres réguliers convexes en prenant appui sur l'épistémologie et l'histoire des sciences. Ce questionnement épistémologique portant sur la connaissance des objets, de leur mode d'existence et d'appréhension, mais aussi sur leur dimension symbolique et matérielle, est présenté dans la première partie de cet article [6]. La deuxième partie sera consacrée à la présentation d'une situation didactique, en géométrie des solides, utilisée depuis plusieurs années en formation initiale et continue des professeurs d'école.

Dans la troisième partie, nous présenterons et analyserons des extraits d'un protocole, recueilli lors de la mise en oeuvre de cette situation dans un stage de formation continue s'adressant à des enseignants spécialisés, dans le cadre d'une recherche conduite au sein du laboratoire LIRDHIST en mars 2004 et donnant à voir l'articulation entre *propriétés des objets mathématiques* et *expérimentation avec des objets sensibles*. Nous proposerons pour conclure quelques pistes pour l'enseignement et la formation.

6 Thierry Dias (2004) présente une mise en perspective entre la dimension expérimentale en Mathématiques et dans les Sciences de l'Empirie, s'appuyant sur une étude épistémologique et didactique, que nous ne reprenons pas ici.

1. Eléments historiques et épistémologiques

1.1. *Géométrie des solides : passer du plan à l'espace*

Pour définir les polyèdres réguliers, nous avons besoin des polygones réguliers. Depuis l'Antiquité, on sait qu'il est théoriquement possible de construire exactement un polygone régulier convexe à n côtés pour n'importe quel entier n supérieur à 3, et que l'on peut de la sorte *approcher* le cercle.

Les seules questions soulevées par les polygones réguliers sont d'ordre pratique : est-il possible de construire tel polygone régulier uniquement avec la règle et le compas ? De telles constructions sont simples pour le triangle, le carré ou l'hexagone, un peu moins pour le pentagone entre autres. Cela est impossible pour l'heptagone. Gauss a définitivement clos le débat par un théorème : il faut et il suffit que n soit de la forme $2^r.p_1.p_2...p_s$ avec $r,s \in \mathbf{N}$ et où les p_i sont des nombres premiers de Fermat (nombre F_n de la forme « 2 *exposant* $2^n + 1$ ») distincts.

Un raisonnement par analogie pourrait conduire à penser qu'il en est de même pour les solides réguliers, mais tel n'est pas le cas.

En effet, cette propriété d'infinité des polygones réguliers n'est pas transposable dans l'espace à trois dimensions habituel : il n'est pas vrai qu'il existe des polyèdres réguliers convexes à *n* faces pour tout *n*. Force est de constater que le nombre de possibilités est même très réduit, puisqu'il n'existe que cinq polyèdres réguliers convexes appelés couramment *Solides de Platon*.

1.2. *Brefs aperçus historiques*

1.2.1. De Pythagore à Euclide

La contribution de Platon à la découverte des polyèdres réguliers qui portent son nom est en fait très limitée. On connaissait en effet leur existence, le dodécaèdre exclu, bien avant le IVe siècle avant J.C. C'est à *Pythagore* que l'on reconnaît la primauté de la découverte des quatre premiers [7]. Un siècle plus tard, (V° av. J.C.), *Empédocle*, philosophe pré-socratique, conçoit le monde comme l'association des éléments fondamentaux. Désireux de construire un modèle du monde physique tel qu'il était alors compris, il associe ces quatre solides aux quatre premiers éléments, en tenant compte de leurs propriétés respectives : au tétraèdre, on associa le feu pour la forme aigu de ce polyèdre ; l'association du cube et de la terre fut décidée en regard de leur stabilité commune; à l'octaèdre on associa l'eau ; à l'icosaèdre on choisit d'associer l'air.

La découverte du dodécaèdre est plus tardive. *Théétète*, (360 av. JC) mathématicien néo-pythagoricien, étudie lui aussi les polyèdres réguliers et montre que le dodécaèdre est le dernier solide de ce type. Cette découverte embarrasse beaucoup les anciens : elle perturbe le modèle construit dans la cohérence et l'esthétique par l'association des quatre solides réguliers et des quatre éléments fondamentaux. Dans son dialogue *Epinomis,* Platon y associe alors un 5ème élément physique : l'éther qui forme l'âme des êtres animés, puis, lors d'un dialogue plus célèbre *Timée* [8], il se propose de mettre sur pied un nouveau système « cohérent » d'explication du monde. Pour lui, l'Univers a été créé à partir de quatre corps de base : la Terre, le feu, l'air et l'eau. Il associe alors ces éléments aux polyèdres réguliers qu'il reconstruit à partir d'agencement de triangles rectangles (sauf pour le dodécaèdre). La nouvelle distribution devient ainsi la suivante :

Tétraèdre	*feu*
Octaèdre	*air*
Hexaèdre (cube)	*terre*
Icosaèdre	*eau*
Dodécaèdre	*univers*

Après quelques transformations, dont la permutation de l'éther et du feu, son disciple Aristote en fait les cinq substances simples de sa Physique.

La question qui se pose alors est celle de savoir si on peut être certain de pouvoir dénombrer les polyèdres réguliers ? C'est *Euclide* qui s'attache à la démonstration de la preuve dans le Livre XIII, propositions 13 à 18 des Eléments, après avoir ouvert au livre XI la partie stéréométrique en débutant par une liste de vingt-neuf définitions dont les cinq dernières [9] concernent les cinq solides de Platon:

définition 25 : Un cube est un solide compris sous six carrés égaux.

définition 26 : Un tétraèdre est une figure solide comprise sous quatre triangles égaux et équilatéraux.

définition 27 : Un octaèdre est une figure solide comprise sous huit triangles égaux et équilatéraux.

7 D'autres sources attribuent leur découverte à Pythagore et ses disciples Hiéroclès, Archytas, Philolaüs pour le cube, le tétraèdre et le dodécaèdre, et à Théétète pour l'octaèdre et l'icosaèdre. Rappelons en effet qu'aucun document écrit n'a été laissé par Pythagore.

8 PLATON, Oeuvres complètes, tome X, Timée-Critias.

9 IREM Clermont-Ferrand, Les Eléments d'Euclide : Livre XIII; Textes d'après la traduction de Peyrard et commentaires, juin 2001

définition 28 : Un dodécaèdre est une figure solide comprise sous douze pentagones égaux, équilatéraux, et équiangles.

définition 29 : Un icosaèdre est une figure solide comprise sous vingt triangles égaux et équilatéraux.

Les cinq solides sont désormais définis, il reste à prouver qu'on peut les construire. C'est ce qu'Euclide s'emploie à faire dans le livre XIII. Les propositions 13 à 17 exposent une construction [10] des cinq solides de Platon. Chacune de ces propositions respecte une syntaxe particulière générale. Euclide énonce premièrement un théorème (la proposition) ; la deuxième partie est consacrée à la construction de la figure (modélisation codée) puis par la traduction de la conclusion sur la figure codée (*je dis que…).* La quatrième partie est destinée au développement de la démonstration par enrichissement de la figure construite et se termine par la conclusion. On voit donc apparaître ici deux modes d'existence des solides de Platon : Ils existent d'abord parce qu'on peut les construire comme objets sensibles ; ils existent ensuite comme objets mathématiques dans la théorie élaborée par Euclide. Ce qu'apporte en outre la théorie, c'est la preuve qu'il n'y a pas d'autres polyèdres réguliers convexes.

1.2.2. Kepler et Euler

A l'aube du XVII° siècle, *Kepler* (1571-1630), tout comme Pythagore, pense que le nombre des planètes et leur disposition n'est pas arbitraire, mais une manifestation de la volonté de Dieu.

Dans le Secret du monde, ouvrage rédigé à l'âge de vingt-cinq ans, Kepler expose une vue générale de l'Univers fondée sur les solides parfaits. Il inscrit un octaèdre entre les orbites de Mercure et de Vénus, un icosaèdre entre Vénus et la Terre, un dodécaèdre entre la Terre et Mars, un tétraèdre entre Mars et Jupiter, et un cube entre Jupiter et Saturne.

Après de nombreux calculs, Kepler voit « les solides symétriques s'insérer les uns après les autres avec tant de précision entre les orbites appropriées que si un paysan demandait à quels crochets les cieux sont fixés pour ne pas tomber, il serait facile de lui répondre «. (...)

Mercure
Octaèdre
Vénus
Icosaèdre
Terre
Dodécaèdre
Mars
Tétraèdre
Jupiter
Cube
Saturne

Kepler étend alors sa recherche sur les polyèdres en imaginant d'autres solides réguliers dont les faces ne sont pas forcément convexes.

Leonhard Euler (1707-1783) s'intéresse également aux polyèdres, réguliers ou non. On lui doit notamment la formule connue sous le nom de théorème de Descartes-Euler vraie pour tout polyèdre convexe : $S + F = A + 2$ dans laquelle S, F et A représentent respectivement les nombres de sommets, de faces et d'arêtes [11].

10 Il faut noter qu'Euclide ne précise pas la signification de ce terme ni les opérations autorisées sous ce terme.

11 Rappelons que la discussion de ce résultat est au coeur de l'ouvrage de Imre Lakatos traduit en français sous le titre «Preuves et réfutations» (Hermann, 1984, 2004).

On peut établir à partir de ce théorème une preuve de type combinatoire [12] du fait qu'il existe au plus cinq polyèdres réguliers convexes, preuve déjà fournit par Descartes dans le *De Solidorum Elementis* [13].

1.3 - *La nécessaire dimension expérimentale des mathématiques*

Que nous apprend Euclide dans le XIIIème livre des Eléments ? Qu'il existe un rapport de contiguïté entre théorie et expérience. La démonstration de la propriété physique de l'espace ne tolérant que cinq polyèdres réguliers convexes est liée à l'exercice de leur construction. Ce lien étroit entre l'expérimental et le théorique est porté par le passage d'une dimension à une autre mais aussi par l'articulation entre les registres numérique et géométrique. La géométrie n'étudie pas d'objets purement ou radicalement idéaux. Les preuves et démonstrations qu'elle met en œuvre se «frottent» irrémédiablement au réel lors des phases d'élaboration de ces objets.

La géométrie renvoie aux corps solides de notre expérience, la question est d'expliciter comment des objets de notre expérience commune comme les corps solides peuvent être représentés par des objets idéaux et comment de telles représentations peuvent en retour nous apporter de nouvelles connaissances sur ces objets empiriques.

L'évolution progressive des connaissances sur les polyèdres illustre cette interdépendance de l'expérience *du monde* et de l'expérience *sur le monde*, ainsi que la symbiose entre le théorique et l'expérimental. On y voit notamment comment s'enrichissent le discours démonstratif et le travail expérimental. Les obstacles, les impossibilités se révèlent dans certains cas lors de la mise en oeuvre d'un raisonnement déductif et dans d'autres cas par l'action expérimentale ; la connaissance des objets se développe dans ces allers-retours entre théorie et expérience.

2. Une situation didactique mettant en lumière le recours à l'expérience

2.1. *Pourquoi cinq polyèdres réguliers*

Le rapide parcours historique que nous avons proposé confirme que le cadre de l'enseignement de la géométrie à l'école pourrait être un lieu pertinent pour travailler la nécessité d'une articulation entre l'expérimental et le théorique, et que les Solides de Platon fournissent un bon candidat pour élaborer une situation didactique dans cette perspective. Cependant, il va de soi que les démonstrations d'Euclide ne sont accessibles ni pour les élèves de l'école élémentaire, ni même pour leurs enseignants. Si l'on veut donc proposer ce problème à ce niveau-là, cela suppose, comme nous y invite Jean Leray [14], que l'on puisse travailler avec un appareil théorique plus léger, rendant compte des évidences qui s'imposent lorsque l'on essaye de construire effectivement, avec des matériaux divers, les Solides de Platon. C'est ce que nous proposons ci-dessous.

On dit d'un polyèdre convexe [15] qu'il est régulier si ses faces sont des polygones convexes

12 La preuve s'appuie sur l'étude de la relation « km/r + k = km/2 + 2 », obtenue en substituant dans la formule d'Euler le nombre de sommets et le nombre d'arêtes exprimés en fonction du nombre total de faces (k) et du nombre de côtés du polygone régulier associé (m). Notons que ce raisonnement combinatoire ne permet évidemment pas d'affirmer l'existence des cinq polyèdres réguliers convexes. Il faut pour cela soit les construire comme objets sensibles, soit prouver leur existence dans la géométrie euclidienne.

13 Note du traducteur dans la note 2 de Lakatos, 2004 (p.8).

14 Voir la citation donnée dans l'Introduction.

15 Un polyèdre est convexe, si pour chacune de ses faces, il est entièrement contenu dans l'un des demi-espaces définis par le plan de cette face.

réguliers identiques et si **à chaque** sommet correspond le même nombre de faces. Les deux axiomes suivants rendent compte des contraintes auxquelles sont soumis les solides en tant qu'objets sensibles et servent à leur modélisation :

A1. Un sommet appartient à trois faces au minimum.

A2. La somme des angles des polygones au sommet du polyèdre est inférieure strictement à quatre fois la mesure de l'angle droit.

Ces deux axiomes nous permettent de déterminer combien il peut exister au plus de tels polyèdres [16]. La construction avec des triangles équilatéraux identiques en est la première étape. Les deux axiomes précités nous conduisent très vite à envisager trois possibilités de construction. Ainsi peut-on assembler trois, quatre ou cinq triangles équilatéraux (angle 60°) pour former le sommet d'un polyèdre. En achevant la construction de ces polyèdres à partir de ces sommets, on obtient respectivement le tétraèdre (quatre faces), l'octaèdre (huit faces) et l'icosaèdre (vingt faces). L'assemblage de six triangles équilatéraux conduit au pavage du plan et à partir de sept triangles, il n'est pas possible de conserver la convexité, ce qui correspond à l'axiome A2. L'étude des constructions à partir de carrés identiques est plus rapide. En effet, en assemblant trois carrés pour former un sommet on achève la construction et l'on obtient l'hexaèdre régulier, autrement dit le cube. En essayant l'assemblage de quatre carrés on retrouve la limite atteinte avec six triangles équilatéraux : le plan. Comme dans le cas du carré, la construction avec des pentagones conduit à la conclusion qu'un seul polyèdre régulier convexe est possible ; il s'agit du dodécaèdre (douze faces). Pour terminer, trois hexagones réguliers ayant un sommet commun et ne se chevauchant pas sont coplanaires. Ce qui interdit l'existence d'un polyèdre régulier à faces hexagonales, puisque, à nouveau, à partir de quatre faces et plus, il n'est pas possible de conserver la convexité.

Par conséquent, l'utilisation de ces deux axiomes conduit à la conclusion qu'il y a au plus cinq polyèdres réguliers convexes. Comme on sait tous les construire (dans le monde réel), on peut en déduire qu'il y en a exactement cinq. Cette approche du problème nous semble relever du développement d'une *culture des modèles* que Mercier & Sensevy (1999) appellent de leurs voeux :

> « Assimiler une culture des « modèles » c'est donc se rendre capable de considérer le modèle, non dans un rapport mimétique à la réalité (…) ; mais comme un système de significations susceptible de nous apprendre des choses sur la réalité, et par là même, de nous rendre susceptible d'agir sur elle. » [17]

2.2 - *Sur la possibilité de proposer une situation didactique mettant en lumière la dimension expérimentale des mathématiques*

Les éléments historiques, épistémologiques et scientifiques présentés dans le paragraphe précédent permettent d'envisager la conception d'une situation d'apprentissage autour des Solides de Platon visant à mettre en lumière la dimension expérimentale des mathématiques. Il semble en effet possible de mettre en évidence les liens qui unissent rai-

16 Nous nous situons ainsi dans une axiomatique locale minimale, ou encore une mini-théorie déductive au sens de Tarski (1960).

17 Mercier, A. & Sensevy, G. Pourquoi faire encore des mathématiques à l'école Le Télémaque n°15, Enseigner les sciences- mai 1999 pp.69-78

sonnement et expérience autour de la propriété qui énonce que la somme des angles des faces d'un angle polyèdre convexe est inférieure à quatre droits.

Les potentialités a priori d'une situation de recherche visant à trouver tous les solides de Platon, proposée aux professeurs d'école en formation, avaient été repérées à de multiples reprises (Durand-Guerrier, 2004b). Nous avons donc choisi dans le cadre de notre recherche (Dias, 2004) d'étudier cette situation didactique selon deux directions. En référence à Bloch (2001), nous avons conduit une première étude des conditions et des caractéristiques du milieu [18] pouvant être considéré comme celui d'une situation expérimentale, que nous ne reprendrons pas ici. Ceci nous a permis d'affiner notre analyse a priori de la situation de recherche en prélude à sa mise en œuvre dans le cadre de la formation continue des enseignants intervenant dans le champ de l'enseignement spécialisé.

L'un des enjeux est de montrer la valeur ajoutée, en termes d'apprentissage, par la prise en compte de cette dimension expérimentale dans des situations d'apprentissage. Nous présentons ci-dessous le dispositif de formation et les éléments significatifs, vis-à-vis de notre questionnement, d'un débat entre enseignants dans le cadre d'un travail de groupe.

2.3. *Présentation de la situation et éléments d'analyse a priori*

Le problème qui est proposé régulièrement en formation depuis plusieurs années se présente sous la forme suivante [19] :

Résolution de problème en géométrie

Un polyèdre est un solide délimité par des faces planes.
Un polyèdre régulier est un polyèdre convexe dont les faces sont des polygones réguliers deux à deux superposables tels que à tous les sommets corresponde un même nombre de faces.

Déterminer tous les polyèdres réguliers

I. Résoudre le problème
II. Faire une affiche présentant vos résultats, leur justification, la démarche de résolution et les difficultés éventuelles.
III. Prévoir un rapporteur et le contenu de ce rapport si possible par écrit.

Figure 1. le texte du problème ouvert de géométrie

Dans l'organisation de la situation, nous mettons à la disposition des participants du matériel permettant de faire et défaire facilement des solides : polygones en plastique avec procédés d'articulation type *Polydron* ou *Clixi* que l'on trouve assez souvent dans les écoles maternelles. Les figures proposées comprennent des triangles isocèles, rectangles ou équilatéraux, des rectangles, des losanges et des carrés, ainsi que des pentagones, des hexagones, des heptagones et des octogones réguliers. Nous proposons également règles, compas, ciseaux, équerre etc. La mise à disposition de l'ensemble du matériel vise à faciliter le va et vient entre les objets sensibles et les objets mathématiques lors de l'activité de résolution.

18 Au sens de Brousseau, 1998.
19 On trouvera dans Durand-Guerrier, 2004b la description d'un atelier dans lequel ce problème avait été proposé, lors du colloque de la COPIRELEM en mai 2003 à Avignon.

Le point nodal de la situation réside dans l'impossibilité matérielle de réaliser un polyèdre régulier avec des faces hexagonales, ce fait étant concordant avec la propriété que ces mêmes hexagones isométriques permettent de paver le plan. Ce problème pose donc de manière « naturelle » la question des relations entre le plan et l'espace et la confrontation avec la réalité s'avère alors « cruciale ». L'hypothèse forte que nous faisons est que cette situation de résolution de problème va permettre, au moins dans certains groupes, la rencontre effective avec la question « Peut-on réaliser un polyèdre convexe avec des hexagones réguliers isométriques ? ».

Trois grandes catégories de démarches peuvent être attendues, et sont régulièrement observées, dans la résolution du problème : une exploration directe avec le matériel (dont la présence dans le milieu de la situation n'est pas sans incidence) ; un aller-retour entre exploration du matériel et recherche dans l'environnement papier/crayon ; une tentative de recherche dans l'environnement papier /crayon avant la confrontation des hypothèses avec le matériel, voire un refus de confrontation avec le matériel. La nature même de la question, et le niveau auquel on la pose, suscite un certain nombre de questions.

En particulier, on peut se demander ce que signifie ici « Déterminer tous les polyèdres réguliers convexes ». Selon que l'on pense qu'il y en a une infinité, voire même exactement un pour chaque type de face (par analogie avec les polygones réguliers), ou bien qu'il y en a un nombre fini, on peut se demander : s'il faut les construire tous avec le matériel ou fournir une méthode permettant de les trouver tous ; si on doit prouver leur existence, voire leur unicité, dans la théorie géométrique ou si on peut prouver leur existence sans les construire, etc. Indépendamment ou non du recours au matériel, il y a plusieurs façons d'aborder le problème : commencer par faire l'inventaire de ce que l'on connaît ; essayer systématiquement tout ce qui est possible pour un type de face donné avant de passer à un autre type de face ; choisir un type de face et essayer de réaliser un polyèdre ; essayer de dessiner des patrons ; essayer de dégager des lois mathématiques permettant de répondre à la question sans construire etc. Plusieurs de ces procédures aboutissent à la rencontre avec le problème du pavage du plan, qui conformément à nos hypothèses ne manque pas d'arriver, soit avec les hexagones réguliers, soit ce qui est équivalent, avec six triangles équilatéraux.

On peut noter qu'il y a une certaine analogie avec la situation *du triangle aplati* étudiée en particulier par Arsac et al. (1992) [20]. De fait, la matière relativement souple du matériel mis à la disposition des participants ne permet pas toujours de trancher définitivement entre ceux qui pensent que ce n'est pas possible et ceux qui sont convaincus que ce sera possible, à condition d'avoir *suffisamment* d'hexagones à disposition. Le fait qu'avec ce matériel les rétroactions du réel ne sont pas toujours suffisamment fortes pour trancher peut conduire, et conduit de fait dans la plupart des cas observés, à investir le champ des mathématiques et notamment la question des angles qui, comme on l'a vu, est déterminante dans cette situation. Ce détour attendu devant alors permettre de trancher quant à l'impossibilité de construire un polyèdre régulier avec des hexagones tout en ouvrant de nouvelles voies à la construction de polyèdres avec des triangles équilatéraux. L'avan-

20 Il s'agit de répondre à la question « peut-on construire un triangle dont les côtés mesurent exactement en cm : 5, 9, 4.

cée de la situation vers la résolution du problème nécessite en effet que, au moins au sein de certains groupes, le lien avec la propriété des angles soit fait et que les deux axiomes mentionnés en 2.1. soient explicités. Ce que l'on observe fréquemment, c'est que *la rencontre* avec cette contrainte sur la somme des angles au sommet se fait plutôt avec les hexagones et qu'elle invite alors à reconsidérer ce qui a été fait pour les triangles. Dans les cas où l'icosaèdre n'a pas été construit, ceci permet en particulier d'envisager la possibilité de construire un polyèdre régulier ayant cinq faces à chaque sommet puisque que la somme des angles est inférieure à 360°. Deux conjectures tombent ainsi « à l'eau » : il existe une infinité de polyèdres réguliers et à chaque polygone régulier correspond un polyèdre régulier. Toutefois si, moyennant les deux axiomes mentionnés en 2.1., on peut prouver qu'il y a au plus cinq polyèdres réguliers convexes, on ne peut évidemment pas prouver à partir de ces deux axiomes seulement que ces polyèdres réguliers existent. C'est par la construction, autrement dit par une vérification expérimentale, qu'on peut dans ce cas affirmer l'existence des cinq polyèdres. Il n'est d'ailleurs pas rare que certains participants n'arrivant pas à construire un polyèdre régulier convexe ayant cinq faces triangulaires à chaque sommet en déduisent qu'un tel polyèdre n'existe pas [21].

3. Expérimentation et apprentissage : un exemple en formation continue

Le protocole dont nous analysons quelques éléments dans ce paragraphe a été recueilli lors d'une session de formation continue pour douze enseignants spécialisés d'options diverses. L'intitulé de la séance proposée est : *la résolution de problème en géométrie des solides, une EXPERIENCE mathématique manipulatoire et réflexive*. Deux objectifs sont identifiés : revisiter ses propres connaissances et ouvrir des pistes de travail avec ses élèves.

3.1. *Eléments de contexte*

La situation observée a eu lieu en mars 2004 et a duré trois heures. Elle a été conduite, observée, filmée et enregistrée par les auteurs de cet article.

Nous avons commencé par présenter collectivement l'énoncé du problème sous sa forme minimale: *Déterminer tous les polyèdres réguliers*, puis nous avons laissé un temps d'appropriation individuelle de dix minutes. Chacun a été ensuite invité à répondre individuellement par écrit au questionnement suivant, préalable à la recherche en groupes :

> *« Que connaissez-vous des polyèdres réguliers dits «Solides de Platon». Les avez-vous déjà rencontrés, si oui dans quel contexte ? Que pouvez-vous en dire en quelques mots ? »*

Les participants se sont ensuite répartis en trois groupes de quatre pour la recherche du problème proprement dite qui a duré une heure et quart. La consigne était la suivante : *résoudre le problème dans un premier temps; puis faire une affiche présentant les résultats obtenus ; la ou les démarches de résolution et les procédures mises en œuvre ; les éléments de validation et les difficultés éventuellement rencontrées.* A l'issue du travail de recherche, une mise en commun d'une quinzaine de minutes a donné lieu à un commentaire par chaque groupe de l'affiche réalisée à l'issue de la phase de recherche. Cette mise en com-

21 Contrairement à ce qui se passe avec un trièdre qui est nécessairement rigide, lorsque l'on fabrique un assemblage avec cinq faces à un sommet l'absence de rigidité rend plus difficile la manipulation.

mun a été suivie d'un débat d'une durée de trois quarts d'heures environ ; les principaux éléments en jeu dans la situation ont été repérés et explicités ce qui a conduit les participants à s'interroger sur les modalités de l'enseignement de la géométrie à l'école et plus particulièrement sur les possibilités ouvertes par la prise en compte de la dimension expérimentale en mathématiques pour penser les rapports entre l'espace et le plan.

Les travaux des trois groupes d'enseignants ont été enregistrés, mais seul l'enregistrement d'un groupe a donné lieu à une transcription complète des échanges d'une durée de quatre-vingt-dix minutes environ. Ce choix a été fait en raison de la richesse des échanges langagiers à l'intérieur de ce groupe tout au long de la recherche ; de la nature et du contenu des échanges en lien étroit avec ce qui nous intéresse ici et de son hétérogénéité tant sur le plan des positions institutionnelles des personnes, que sur celui de leurs connaissances scientifiques et didactiques. Ce groupe était composé de Simon, jeune enseignant de SEGPA sorti de l'IUFM de Lyon deux années auparavant ; Julie, jeune enseignante en Institut Médico-Éducatif ; Charles, enseignant expérimenté de SEGPA (principalement chargé des mathématiques) et Georges, conseiller pédagogique en circonscription AIS.

3.2. *Faits d'expérience et résultats mathématiques au cours de la résolution du problème*

L'analyse [22] porte ici principalement sur la place de la *théorie* [23] dans l'interprétation des faits et dans la formulation d'hypothèses ; sur le mode de construction des connaissances et sur la construction des modèles interprétatifs par la manipulation. Il s'agit ainsi de mettre en évidence la dimension expérimentale des mathématiques dans une situation d'apprentissage en précisant ses apports et son rôle et de dégager les contraintes en termes d'éléments nécessairement présents dans le milieu.

L'hétérogénéité des connaissances et des expériences des quatre personnes en recherche au sein du groupe observé s'affiche de façon récurrente durant toute la phase de recherche. Ce sont quatre rapports très différents aux objets dont il s'agit ici de rendre compte afin d'étudier la place de la *théorie* pour chacun dans un processus de construction cognitif de type expérimental. Plusieurs *théories* construites sur des représentations et expériences personnelles sont en concurrence pour la résolution du problème posé. Elles concernent la possibilité ou non de construire un solide convexe régulier avec des polygones hexagonaux. Le cas limite de l'hexagone étant le point central du débat. Trois «points de vue» qui semblent provenir de trois inscriptions différentes alimentent le débat.

3.2.1. *Le point de vue de Simon, jeune enseignant de SEGPA*

Une première rencontre avec les objets, peu ou assez lointaine, s'inscrit comme un élément culturel chez l'individu. Cette référence au curriculum est présente chez Simon qui l'utilise dans l'élaboration de ses raisonnements : en référence à son parcours universitaire récent, il s'appuie sur des bribes de connaissances en cristallographie ainsi que sur quelques souvenirs relativement «flous» de chimie qu'il énonce dans son groupe dès le début

22 Une analyse complète se trouve dans Dias (2004)

23 Dans toute cette partie, nous utilisons le terme de théorie dans un sens faible, au sens d'énoncés tenus pour vrais sur le réel par le sujet.

de la séance, reprenant ce qu'il avait noté lors de la courte phase écrite précédente. La notion de symétrie apparaît alors, ce qui permet au groupe de trouver l'octaèdre. Au début des échanges, Simon exprime ses doutes sur la possibilité de réaliser un polyèdre avec les hexagones réguliers ; il s'engage quant à lui dans la recherche avec les pentagones réguliers mis à disposition. Le discours qui accompagne son action est caractérisé par une très grande utilisation du mot *donc* (trente occurrences) ; il tente systématiquement d'associer ses hypothèses formulées oralement ou graphiquement à des propositions plus formelles et donc plus générales, essayant d'établir une règle ou d'expliciter des critères.

Cette posture de Simon (recherche de critères) est cependant fragile ; en effet l'apparition, au cours de la manipulation, d'un phénomène inattendu provoque, dès les premières minutes du travail, un changement de point de vue :

Simon (136) — *ben moi j'étais... je pensais pas que celui-là allait marcher mais maintenant je vois que celui là il marche (le dodécaèdre)... alors, je suis sûr que celui là il peut se faire (il parle de la construction avec les hexagones).*

3.2.2. *Le point de vue de Charles, enseignant expérimenté de SEGPA*

Pour Charles, le problème a une solution : il existe une infinité de polyèdres convexes. Le raisonnement sous-jacent semble être le suivant : *il existe une infinité de polygones réguliers donc il existe une infinité de polyèdres réguliers*. Ce raisonnement est très résistant ; en effet malgré les fortes rétroactions du réel, Charles reste très longtemps convaincu que la construction d'un solide est possible avec des hexagones, à condition d'utiliser un nombre suffisamment grand de pièces. Il obtient pour cela le renfort de Simon qui évoque les diamants avec de très nombreuses facettes qui se rapprochent de la sphère. Dans cette situation, la souplesse du matériel favorise la conjecture selon laquelle si on avait assez de pièces, on pourrait courber la structure pour obtenir un solide :

Charles (189) — *si, moi je pense .. on va lui en mettre beaucoup, on va mettre tout ce qu'on a puis on va voir si on peut donner lui du volume quoi* [24].

3.2.3 *Le point de vue de Georges, conseiller pédagogique*

Pour Georges, la référence qui semble sous-tendre la conception et par suite la formulation d'une *théorie* est technique ou professionnelle. Il fait appel à une connaissance en acte de maçonnerie. La *théorie* sur laquelle s'appuient la majorité des interventions de Georges est la suivante : *les hexagones réguliers peuvent paver le plan.*

Georges (161) — *Non mais moi je crois que tu peux pas avec celui-là, ça correspond tu sais aux pavages au sol quand on pose des carreaux, euh … ça reste plat, jamais tu peux en faire un truc.*

Ce fait est bien connu des carreleurs (même amateurs) comme des enseignants de l'école élémentaire, voire de maternelle lorsqu'ils proposent des activités de pavage du plan à leurs élèves. Notons que ce dernier point ren-

24 Notons que cette impossibilité de courber l'assemblage d'hexagones réguliers est un résultat de la géométrie euclidienne (mais pas de la géométrie hyperbolique, par exemple) d'une part, et rend compte de notre expérience commune dans l'espace proche d'autre part. Ceci illustre une fois de plus, s'il en était besoin, le fait que la géométrie euclidienne est une modélisation de l'espace sensible.

voie à un savoir professionnel de type *conseil pédagogique*. Georges note également que lorsque l'on réalise des patrons, il est parfois nécessaire de « *rajouter des petits carrés pour faire des compléments* ».

Cette double référence produit une *théorie* résistante aux faits et évènements mis en œuvre par les autres protagonistes du groupe. Les différentes constructions produites pour invalider cette proposition sont sans effets sur la *théorie* de Georges qui, à plusieurs reprises, insiste sur la nécessité de considérer des polygones rigides :

Georges (174) — *prend un truc rigide et ça marchera pas hein*

L'étude de ces extraits du débat à l'intérieur du groupe met en évidence la place respective de la *théorie* et de *l'expérimentation sur les objets sensibles* dans la progression de la situation de résolution. Les allers-retours entre *théorie* et *expérience* que l'on peut observer ici sont possibles grâce à la présence de la *théorie*, mais leur pertinence dans l'avancée de la recherche tient à la confrontation de points de vue contradictoires sur les objets en jeu et à la possibilité de les mettre à l'épreuve de manière relativement économique d'une part, à la solidité des *théories* personnelles construites respectivement par Charles et Georges d'autre part. On voit cependant que dans ce cas, la confrontation à l'expérience ne suffit pas à elle seule à trancher entre les deux points de vue. En effet, Charles et Georges, pour tenter de convaincre les autres font chacun appel à une expérience virtuelle qu'ils ne peuvent pas réaliser dans le contexte de la situation. Nous allons voir que finalement, c'est la mise en relation avec un résultat mathématique qui permettra de dépasser la contradiction.

3.2.4. *Un exemple de l'articulation entre fait d'expérience et résultat mathématique*

Comme on l'a vu plus haut, Simon en changeant de point de vue a conforté la position de Charles. Les échanges se poursuivent et Simon reprend l'assemblage de Charles avec les hexagones réguliers. Il pose alors la question de la possibilité d'obtenir un angle :

Simon (212) — *ouais, mais moi, pour moi, si … est-ce que… ouais mais là est-ce qu'il est possible que ça forme un… ça forme un angle …*

Cette question le ramène vers le dodécaèdre dont la preuve matérielle de l'existence l'avait fait changer de point de vue. Le travail du groupe s'organise à partir de ce moment-là sur la question des angles au sommet en lien avec la possibilité de plier le patron pour obtenir un solide. Georges propose alors un nouvel argument à l'appui de sa thèse :

Georges (271) — *Regarde, là, on a 120 degrés…120, 120, 120, le tout fait 360 : on est sur du plat !*

Parallèlement, Charles et Simon s'engagent dans le calcul de l'angle au sommet du pentagone ; les calculs aboutissent à la valeur correcte, soit 108° (réplique 293). La discussion se poursuit encore dans le groupe avant que le résultat ne soit finalement explicité :

Simon (431) — *tant que c'est inférieur à 360 donc il faut que les... il faut que les 3 angles (dessin)*
Charles (432) — *oui, 3 fois 108 ça fait moins que 360, ça fait 324*
Simon (433) — *dans le cas du pentagone, ça marche, maintenant est-ce qu'il est possible d'avoir d'autres figures régulières*

qui ont des angles inférieurs à... 120
Charles (434) — *mais bien sûr ! mais qu'on est bête ! c'est ça le truc ! c'est ça le truc... il faut que... voilà... j'ai ça... donc je peux plier, c'est bon (il emboîte des pentagones)*
Georges (435) — *voilà*

Ce passage est une illustration qui nous semble très explicite de l'articulation fait d'expérience/résultat mathématique telle que nous souhaitions la mettre en évidence dans cette situation. Il apparaît en effet clairement ici que la mise en relation entre le fait d'expérience défendu par Georges depuis le début de la recherche, mais non reconnu par les autres membres du groupe, avec le résultat mathématique sur les angles est un élément clé de l'avancée vers la solution du problème. Le fait que cette mise en relation emporte la conviction est un phénomène que nous avons observé à maintes reprises. Nous faisons l'hypothèse que ceci tient à la relative simplicité de la relation entre le résultat mathématique (la somme des angles au sommet est inférieure à quatre droits) et la possibilité de réaliser le geste matériel (plier) pour lequel cette relation est nécessaire. De ce point de vue, la preuve combinatoire s'appuyant sur la relation d'Euler se révèle beaucoup plus pauvre du point de vue des apprentissages géométriques ; ceci précisément parce qu'elle met à distance cette relation entre fait d'expérience et fait mathématique.

3.3. *Quelques caractéristiques essentielles de ce type de situation*

Nous avons vu au paragraphe précédent une illustration de la manière dont les multiples confrontations au réel peuvent permettre sous certaines conditions l'élaboration d'une connaissance mathématique grâce à une démarche de type expérimental, les relations multiples entre connaissances et expériences permettant in fine l'accès au savoir en jeu dans la situation. Il est tout à fait clair qu'il ne suffit pas de manipuler des objets sensibles pour entrer dans une démarche de type expérimental et construire des connaissances géométriques sur ces objets. Nous allons donc essayer de préciser quelques-unes des caractéristiques qui nous semblent essentielles.

Tout d'abord, il n'aura pas échappé au lecteur averti que la situation didactique mise en place s'apparente au dispositif du problème ouvert développé par Arsac et Mante (1989), comporte des phases d'action, de formulation, et d'institutionnalisation au sens de Brousseau (1998) et que la question centrale qui nous intéresse ici concerne la validation. C'est évidemment une condition sine qua non pour la réussite de ce type de problème. Nous nous intéressons donc ici à ce qui nous apparaît comme spécifique d'une situation visant à favoriser le recours à une démarche de type expérimental en mathématiques ; nous avons retenu trois caractéristiques essentielles.

La première caractéristique est la connaissance a priori d'éléments de l'histoire et de l'épistémologie des savoirs qui sont les enjeux de la situation. Cette connaissance permet à l'enseignant d'une part de s'assurer de la consistance des questions qu'il souhaite traiter, d'autre part d'opérer les choix pertinents dans l'analyse a priori de la situation et dans l'étude de sa conception. Lors de la mise en oeuvre devant des élèves ou des adultes en formation, cela permet aussi d'adapter ses interventions éventuelles pendant les phases de recherche autonome.

La deuxième caractéristique est la nécessité de mettre à la disposition des « acteurs » des outils de modélisation dans la situation. Ces outils pouvant être symboliques ou matériels selon le problème à résoudre. Les différentes modélisations sont alors autant de confrontations à une réalité construite dans la création de phénomènes et comme essais de réponse aux problématiques et autres conjectures émises.

La troisième caractéristique est la possibilité pour le sujet d'élaborer *des conjectures* lui permettant, au cours de la phase de recherche, de faire des prédictions sur le réel qu'il pourra confronter aux rétroactions du milieu organisé pour la situation.

Il est tout à fait clair que ces trois caractéristiques ne sont pas indépendantes et se nourrissent mutuellement. Elles déterminent ce que nous appelons, en référence à Bloch (2001) le *milieu spécifique d'une situation mettant en œuvre une démarche de type expérimental en mathématiques*.

4. Pistes pour la classe

La situation d'apprentissage que nous vous avons présentée a été élaborée, puis étudiée, dans un contexte de formation d'enseignants. Une question essentielle est alors de savoir dans quelle mesure ce type de situation est viable en classe. C'est un deuxième temps que nous proposons en formation en invitant les participants à élaborer des situations pour la classe en s'appuyant sur les caractéristiques repérées et explicitées de cette situation. Nous indiquons ici quelques pistes pour la mise en oeuvre de telles situations au cycle 3 de l'école primaire. Tout d'abord, il est clair que dans cette situation, la mise à disposition de matériel permettant de faire et défaire facilement les solides est essentiel. Comme il n'est pas habituel d'utiliser ce type de matériel au cycle 3, il faut prévoir une séance d'appropriation du matériel par les élèves en proposant une consigne suffisamment ouverte pour que les élèves puissent rentrer dans l'activité, mais permettant quand même de stabiliser un peu le vocabulaire mathématique ainsi qu'un certain nombre de propriétés.

Ensuite, on peut soit proposer directement le problème des Solides de Platon, soit proposer d'abord de construire plusieurs polyèdres réguliers dans chaque groupe, puis dans un deuxième temps de trouver tous les polyèdres réguliers. On peut également commencer par s'intéresser aux polyèdres réguliers que l'on peut construire avec des triangles équilatéraux. Cette situation permet aussi la rencontre avec le problème du pavage du plan. Un problème de réinvestissement peut être de chercher ensuite comment choisir deux polygones réguliers convexes pour construire un solide ayant le même nombre de faces à chaque sommet et s'approchant au plus près de la sphère. On retrouvera ainsi la forme classique du ballon de football qui associe un pentagone et deux hexagones réguliers à chaque sommet pour un angle total de 348°. Une autre famille de problème liées à cette situation concerne naturellement les pavages du plan : quels polygones réguliers convexes isométriques permettent de paver le plan en utilisant un seul type de tels polygones ? Quelles paires de polygones réguliers convexes isométriques peut-on utiliser pour paver le plan ?

En complément du travail mathématique lui-même, on peut naturellement mettre en place des projets s'appuyant sur la dimension culturelle et symbolique des Solides de Platon, ainsi que sur leur usage dans différents champs de l'activité humaine.

Conclusion

L'un des enjeux de l'enseignement des mathématiques aujourd'hui est sans aucun doute de permettre à d'avantage d'élèves d'accéder à la connaissance des objets de cette discipline dans la perspective de leur développement tant personnel que professionnel. La prise en compte de la dimension expérimentale des mathématiques, telle que nous l'avons présentée dans ce texte, permet selon nous de battre en brèche l'opinion, largement répandue, tant chez les élèves que chez leurs parents et certains de leurs enseignants, selon laquelle « *pour entrer dans le paradis des mathématiques, il faut s'approprier les règles, plus ou moins arbitraires, d'un jeu gratuit non soumis aux contraintes ordinaires du monde réel* ». Cette vision des mathématiques, si elle peut éventuellement convenir pour les théories mathématiques les plus avancées [25], nous semble contribuer au rejet de cette discipline par de nombreux élèves en freinant le développement d'un enseignement des mathématiques adapté à *la diversité des aspirations et des destinées individuelles*.

La situation que nous avons présentée illustre la possibilité d'un autre choix, conforme aux préconisations des programmes et aux objectifs d'une formation mathématique pour tous [26]. En permettant aux élèves de travailler sur l'articulation entre *les objets sensibles* et *les objets mathématiques*, elle met l'élève en position de « chercheur », l'invite à formuler des conjectures et à les mettre lui-même à l'épreuve. Ceci entraîne le développement de projets d'explications et de communications utilisant des procédés argumentatifs variés.

D'une manière plus générale, l'utilisation de la dimension expérimentale des mathématiques comme levier pour favoriser l'accès de cette discipline au plus grand nombre nous invite à chercher *au sein des mathématiques elles-mêmes*, *de leur histoire et de leur épistémologie, et de leur dimension sociale et culturelle*, les ressources pour nourrir le travail didactique d'élaboration de situations d'enseignement et d'apprentissage cohérentes et ambitieuses.

25 Ce qui peut évidemment être discuté.
26 Pour des points de vue complémentaires concernant ces questions, on pourra se reporter à Berthelot & Salin (2001) et Houdement & Kuzniak (1999).

Bibliographie

- ASSUDE T. (2002), Travaux pratiques au collège ? Conditions et contraintes d'émergence et de vie d'un dispositif, in M. BRIDENNE (eds) *Nouveaux dispositifs d'enseignement en mathématiques dans les collèges et les lycées*, IREM de Dijon.
- BERTHELOT R. & SALIN M.H. (2001), L'enseignement de la géométrie au début du collège. Comment peut-on concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive ? ; *Petit X*, 56, 5-34
- BLOCH I. (2001), Différents niveaux de modèles de milieu dans la théorie des situations, *Actes de la 11ème école d'été de Didactique des Mathématiques,* La Pensée Sauvage
- BROUSSEAU G. (1988), Le contrat didactique : le milieu*, Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 9.3
- BROUSSEAU G. (1998) *La théorie des situations didactiques*, La Pensée sauvage
- CONNE F. (1999), Faire des maths, faire faire des maths, regarder ce que ça donne, in *Le cognitif en didactique des mathématiques*, Les Presses de l'Université de Montréal
- DIAS T. (2004) *Le recours à l'expérience dans la construction des connaissances mathématiques*. Mémoire de DEA de l'Université Lyon 1.
- DIEUDONNE J. (eds.) (1978) *Abrégé d'histoire des mathématiques* 1700-1990, Hermann.
- DURAND-GUERRIER (2004a) Enseigner les mathématiques en primaire, un défi à relever, *La Gazette du mathématicien*, 99.
- DURAND-GUERRIER (2004b) Deux problèmes pour penser les rapports entre mathématiques et réalité, in *Actes du XXX° Colloque national des professeurs et formateurs de Mathématiques chargés de la formation des maîtres, Avignon 19-21 mai 2003*, IREM de Marseille.
- EUCLIDE, (2002) *Les éléments*, Tome III, Vol XI à XIII, PUF
- HOUDEMENT C., KUZNIAK A., (1999) Réflexions sur l'enseignement de la géométrie pour la formation des maîtres., *Grand N*, 64, 65-78.
- LAKATOS I. (1974) *Proofs and refutations*, Cambridge University Press ; traduction française de Nicolas Balacheff et Jean-Marie Laborde, *Preuves et réfutations*, Paris, Hermann 1984, 2004.
- LICCOPE C. (1996) *La formation de la pratique scientifique - le discours de l'expérience en France et en Angleterre (1630-1820)*, La découverte.
- MERCIER A., SENSEVY G. (1999), Pourquoi faire encore des mathématiques à l'école ?, in *Le Télémaque*, n°15 - Enseigner les sciences –
- TARSKI, A. (1960) Introduction à la logique. Paris-Louvain, Gauthier-Villars