
CONSTRUCTIONS D'ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES

Dominique TOURNES
Irem de la Réunion (*)¹

Depuis que nous sommes entrés dans l'ère du calcul digital et du « tout numérique », nous avons probablement perdu de vue le rôle qu'ont pu jouer les méthodes graphiques dans l'histoire des mathématiques. Pourtant, entre l'époque où Descartes a clairement exposé les fondements du calcul par le trait [Des1637, p. 297-302] et le milieu du vingtième siècle, c'est généralement le calcul graphique qui recevait la préférence des ingénieurs et des scientifiques, du moins pour les besoins courants de la pratique, car il était nettement moins coûteux en temps et en énergie que le calcul numérique à la main et aux tables de logarithmes.

Le calcul par le trait est l'héritier direct d'une longue tradition remontant aux mathématiques grecques et se caractérisant, dans une large mesure, par une pensée et un langage géométriques. De ce point de vue, résoudre

un problème, c'est donner une construction géométrique de sa solution en déterminant cette dernière par l'intersection de courbes qui dépendent des données et que l'on sait tracer soit par points, soit d'un mouvement continu. La construction peut se faire avec la règle et le compas dans les cas les plus simples, avec des instruments complémentaires lorsqu'il est nécessaire de faire intervenir d'autres courbes que la droite et le cercle. Au terme de l'opération, il suffit de mesurer sur l'épure la longueur du segment représentant la solution pour obtenir la valeur numérique cherchée.

De nos jours, les logiciels de géométrie dynamique — tels que Cabri Géomètre — permettent de simuler numériquement les techniques graphiques d'antan et de leur redonner vie de façon inattendue. C'est dans cet esprit que je propose de présenter ici quelques méthodes plus ou moins connues de construc-

(*) et laboratoire REHSEIS (CNRS, UMR 7596)

¹ Ce texte est reproduit de Lagrange J.B., Artigue M., Guin D., Laborde C., Lenne D., Trouche L. (eds) Actes en ligne du Colloque ITEM (Reims Juin 2003) avec l'autorisation des

éditeurs. Il prolonge le paragraphe 1.2 de l'article [Tou2003a], qui a été publié dans le numéro 50 de Repères-IREM, et reproduit, avec l'autorisation des éditeurs, de larges extraits de la communication [Tou2003b] contenue dans les actes en ligne du colloque ITEM (Reims, juin 2003).

tion des équations algébriques. Je suggérerai au passage leurs possibles applications pédagogiques, tant dans les classes de lycée qu'en formation des enseignants.

Pour résoudre graphiquement les équations algébriques, on s'est attaché depuis longtemps à concevoir des constructions exactes, par points ou par points et tangentes, des fonctions polynomiales. Je vais parcourir avec Cabri les plus classiques de ces procédés en me plaçant systématiquement dans le cas du troisième ou du quatrième degré, bien que toutes les méthodes puissent se généraliser de façon naturelle à un degré quelconque. Le cas du second degré, trop simple, n'aurait guère d'intérêt à être travaillé pour lui-même avec des lycéens, si ce n'est pour comparer les résultats obtenus graphiquement avec ceux qui sont fournis par les formules classiques de résolution par radicaux. Quant aux degrés supérieurs au quatrième, ils entraîneraient des constructions inutilement longues risquant de masquer les idées mathématiques sous-jacentes.

1. Les paraboles cartésiennes

Dans le troisième chapitre de sa *Géométrie* de 1637, intitulé « De la construction des problèmes qui sont solides ou plus que solides », René Descartes propose une construction générale des équations du troisième et du quatrième degrés par intersection d'une parabole et d'un cercle [Des1637, p. 389-395] qui, en substance, peut se traduire par les calculs ci-dessous.

Les solutions apparaissent ainsi comme les abscisses des points d'intersection d'une parabole fixe et du cercle de centre $\left(-\frac{q}{2}, \frac{1-p}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{q^2 + (p-1)^2 - 4r}}{2}$.

Ce cercle est constructible à la règle et au compas. En faisant $r = 0$ dans ce qui précède, on s'aperçoit que la méthode fournit également les racines de l'équation du troisième degré $x^3 + px + q = 0$, une fois écartée la solution parasite $x = 0$. Dans ce cas, le cercle est particulièrement simple à construire, car il passe par l'origine. Mais, le plus important, c'est l'utilisation d'une parabole fixe : une fois qu'on a découpé avec soin une telle parabole dans une feuille de carton ou de métal, ou qu'on l'a tracée minutieusement sur un transparent, on dispose d'un nouvel instrument de dessin qui, joint à la règle et au compas, permet de rendre constructibles tous les problèmes du troisième et du quatrième degrés.

Avec Cabri, la construction est simple et directe (cf. figure 1). Grâce à la présence de curseurs pour représenter les coefficients, une figure unique contient la solution graphique de toutes les équations réduites du troisième degré : en faisant varier p et q , les élèves observeront qu'il peut y avoir entre une et trois racines réelles. Il sera également intéressant pour eux de comparer les valeurs approchées des solutions mesurées sur la figure avec celles qui sont fournies par des algorithmes numériques mis en œuvre sur une calculatrice.

$$\begin{aligned}
 x^4 + px^2 + qx + r = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x^2 + y^2 + (p-1)y + qx + r = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ \left(x + \frac{q}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{p-1}{2}\right)^2 = \frac{q^2 + (p-1)^2}{4} - r. \end{cases}
 \end{aligned}$$

figure 1

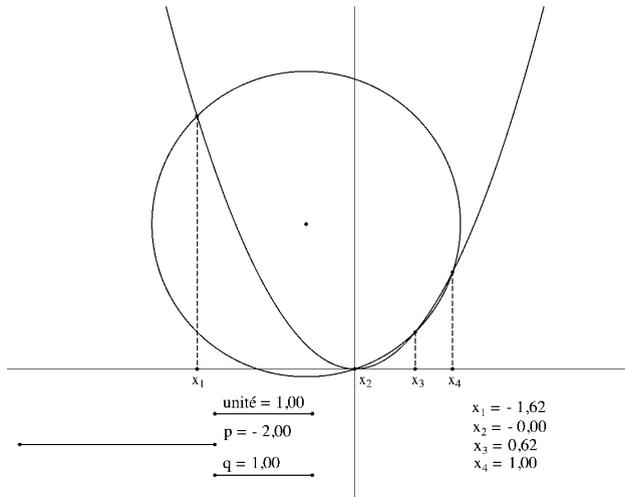


figure 2

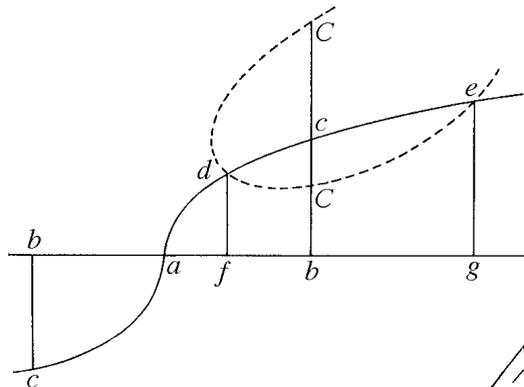
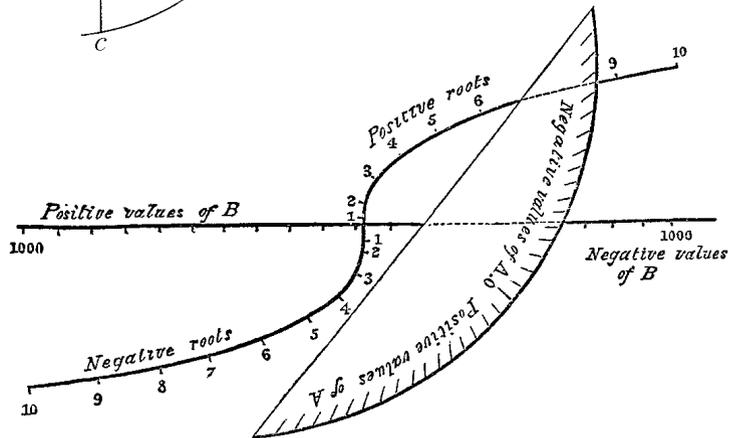


figure 3



Un travail du même type pourra être réalisé pour le quatrième degré, où l'on retrouvera le troisième degré comme cas particulier.

Descartes développe ensuite une construction analogue pour les équations du cinquième et du sixième degrés : les solutions sont obtenues par intersection d'un cercle et d'une cubique tracée à l'aide d'un appareil mécanique spécialement conçu à cet effet [Des1637, p. 402-413]. Contrairement à la parabole utilisée pour les degrés 3 et 4, la cubique auxiliaire dépend maintenant des coefficients de l'équation, ce qui limite grandement l'intérêt pratique du procédé. Descartes suggère enfin une généralisation aux équations de degré quelconque par l'emploi d'une suite de courbes auxiliaires tracées mécaniquement. Ces courbes seront ultérieurement appelées des « paraboles cartésiennes ».

2. La cubique de Newton

Dans sa jeunesse, aussitôt après avoir lu la *Géométrie* de Descartes, Isaac Newton s'est intéressé avec passion à la résolution des équations. Voici, par exemple, ce qu'il écrivait en 1670 à propos de l'équation générale du quatrième degré $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ (c'est moi qui traduis) : « Ici, x désigne la quantité cherchée et p, q, r, s les quantités à partir desquelles, une fois qu'elles sont déterminées et connues, x est également déterminée et pourra être explicitée, ainsi que nous le verrons plus loin, soit par un calcul arithmétique, soit, géométriquement, par le tracé de lignes » [New1967-1981, vol. 2, p. 397]. Par ces mots, Newton nous rappelle explicitement ce que j'ai évoqué au début, à savoir que la science du calcul se subdivisait alors en deux grandes parties complémentaires : le calcul numérique et le calcul graphique.

Laissons de côté les méthodes numériques — tout le monde connaît ce qui est appelé aujourd'hui « méthode de Newton-Raphson » — et examinons plutôt les idées de Newton dans le domaine du calcul par le trait. Après avoir analysé la méthode des paraboles cartésiennes, limpide pour les degrés 3 et 4, mais impraticable au-delà, Newton propose d'employer une seule courbe auxiliaire : la cubique $x = y^3$, tracée une fois pour toutes sur une plaque [New1967-1981, vol. 1, p. 496]. La résolution de toute équation polynomiale peut alors se ramener (cf. figure 2) à l'intersection de cette cubique et d'une autre courbe $CdCe$ constructible par points à la règle et au compas. En effet, étant donnée une équation $f(y) = 0$ de degré quelconque, chaque terme $a_{3n+k}y^{3n+k}$, avec $0 \leq k \leq 2$, est remplacé par $a_{3n+k}x^n y^k$ et on aboutit, pour la courbe $CdCe$, à une équation de la forme $p(x)y^2 + q(x)y + r(x) = 0$. Cette courbe est effectivement constructible par points à la règle et au compas puisque, pour chaque valeur fixée de l'abscisse x , l'ordonnée y correspondante est racine d'une équation qui ne dépasse pas le second degré (Newton l'a illustré sur la figure 2 en suggérant qu'à chaque abscisse b on pouvait associer entre zéro et deux points C). En outre, comme le raisonnement se fait modulo 3, on peut aussi multiplier l'équation de départ par y ou par y^3 pour obtenir au total trois courbes constructibles dont l'intersection avec la cubique fixe fournira les solutions cherchées. Il ne restera plus qu'à choisir, parmi ces trois courbes, celle dont la construction est la plus simple.

Précisons tout ceci dans le cas de l'équation du troisième degré mise sous la forme réduite $y^3 + py + q = 0$. Ayant posé $x = y^3$, l'équation s'écrit $x + py + q = 0$ (1). On peut aussi envisager l'équation de départ sous la forme

$y^4 + py^2 + qy = 0$, ce qui conduit à $xy + py^2 + qy = 0$ (2), ou encore sous la forme $y^5 + py^3 + qy^2 = 0$, ce qui conduit à $xy^2 + px + qy^2 = 0$ (3). Ici, on n'obtient fondamentalement que deux courbes distinctes puisque l'équation (2), après simplification par y , coïncide avec l'équation (1). C'est cette courbe (1) que l'on choisit pour aboutir à une construction très économique réalisable au lycée : une fois que la cubique a été découpée avec soin dans une plaque de carton ou tracée sur un transparent, la résolution de toute équation du troisième degré est ramenée au simple tracé d'une droite². Là encore, on imagine facilement les riches activités que l'on peut conduire en classe, que ce soit avec ou sans l'intervention d'un logiciel de géométrie dynamique. D'ailleurs, avec Cabri, on pourra même s'offrir le luxe de réaliser les deux constructions associées aux courbes (1) et (3) pour constater qu'elles conduisent aux mêmes solutions. Il est enfin envisageable de mener une étude analogue pour le quatrième degré.

A la fin du dix-neuvième siècle, un amateur anglais, Henry Cunynghame [Cun1886], a automatisé la construction de l'équation du troisième degré par intersection d'une cubique et d'une droite en fabriquant un rapporteur spécialement gradué (cf. figure 3) permettant de lire directement, en fonction des valeurs de p et q (qu'il note, lui, A et B), les racines de l'équation $y^3 + py + q = 0$ sur la cubique $x = y^3$, elle-même graduée de façon adéquate, sans avoir à tracer effec-

tivement la droite $x + py + q = 0$. La graduation de la cubique et la fabrication d'un tel rapporteur constitueront, sans nul doute, un défi stimulant pour des élèves de Première ou de Terminale.

3. Un équivalent graphique de la méthode de Horner

Dans la seconde moitié du dix-septième siècle et la première moitié du dix-huitième, la construction des équations suscite l'intérêt d'un grand nombre de mathématiciens. De manière générale, comme nous l'avons vu chez Descartes et Newton, on cherche à résoudre les équations $f(x) = 0$ par le tracé et l'intersection de deux courbes algébriques $g(x, y) = 0$ et $h(x, y) = 0$ choisies parmi les plus simples possibles. Dans cette affaire, la notion de simplicité varie largement d'un auteur à l'autre, les critères retenus pouvant être d'ordre théorique (degrés les plus bas possibles, courbes appartenant à certaines classes) ou pratique (facilité du tracé, contraintes liées aux instruments).

Ce qui peut aujourd'hui nous surprendre, c'est que, pendant plus d'un siècle, personne n'a pensé à construire directement par points la courbe $y = f(x)$ et à examiner son intersection avec la droite $y = 0$. Cette méthode universelle de résolution, qui est maintenant si familière à tous les lycéens, semble avoir été publiée pour la première fois en 1759 par Johann Andreas von Segner, un Hongrois très renommé en son temps, qui fut notamment le premier professeur de mathématiques à Göttingen lors de la création de la chaire en 1735. La méthode est valable pour une équation $f(x) = 0$ de degré n , mais il suffira de l'expliquer dans le cas d'une équation du troisième degré, en prenant $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

² Sur la figure de Newton, les solutions apparaissent comme les ordonnées fd , ge , ... des points d'intersection des deux courbes. Pour une utilisation avec des élèves, il serait sans doute plus commode de revenir aux conventions actuelles en désignant l'inconnue par la lettre x et en faisant apparaître les solutions de l'équation $x^3 + px + q = 0$ comme les abscisses des points d'intersection de la cubique $y = x^3$ et de la droite $y + px + q = 0$.

Après avoir choisi une unité (cf. figure 4), on place sur l'axe des ordonnées les points D, C, B, A tels que $\overline{OD} = d$, $\overline{DC} = c$, $\overline{CB} = b$, $\overline{BA} = a$, et sur l'axe des abscisses les points I, M tels que $\overline{OI} = 1$, $\overline{OM} = x$. Toutes les données étant ainsi en place, on construit successivement les points N, N', P, P', Q comme sur la figure. On a alors $\overline{MQ} = f(x)$ d'après les égalités suivantes :

- $\overline{B'N} = \overline{B''A''} \cdot x = ax$;
- $\overline{C'N} = \overline{C'B'} + \overline{B'N} = ax + b$;
- $\overline{C'P} = \overline{C'N'} \cdot x = \overline{C'N} \cdot x = (ax + b)x$;
- $\overline{D'P} = \overline{D'C'} + \overline{C'P} = (ax + b)x + c$;
- $\overline{D'Q} = \overline{D'P'} \cdot x = \overline{D'P} \cdot x = ((ax + b)x + c)x$;
- $\overline{MQ} = \overline{MD'} + \overline{D'Q} = ((ax + b)x + c)x + d$.

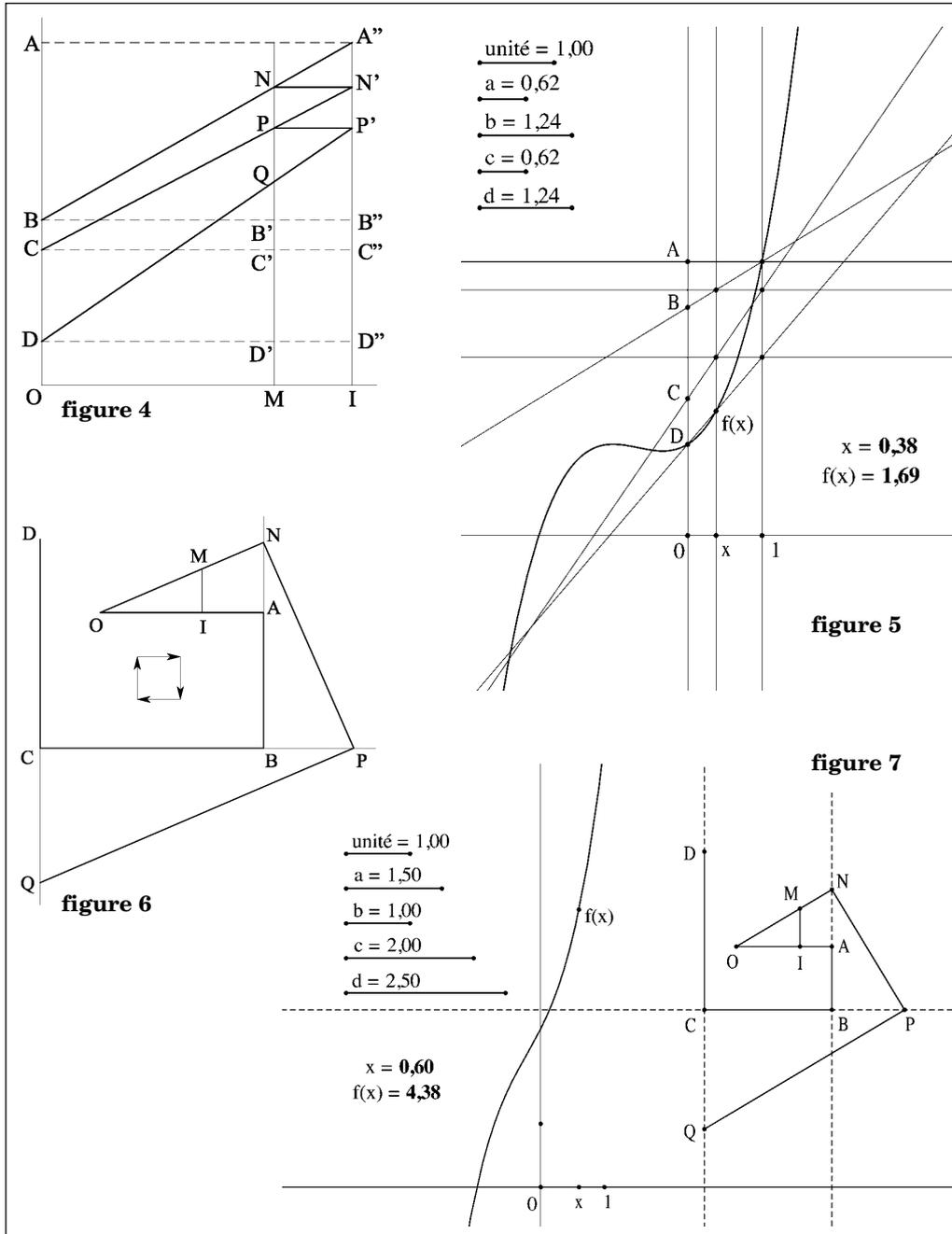
La construction de Segner apparaît ainsi comme un équivalent graphique de l'algorithme de Horner utilisé pour le calcul numérique de $f(x)$. Dans un cas, il s'agit de minimiser le nombre de multiplications à effectuer, dans l'autre, le nombre de parallèles à construire. Pour trouver les racines de l'équation $f(x) = 0$, on procédait traditionnellement par tâtonnements, en essayant plusieurs valeurs de x jusqu'à ce qu'on ait obtenu une précision convenable, tout comme on le fait, par exemple, dans l'algorithme numérique de dichotomie³. Avec Cabri (cf. figure 5), on peut aujourd'hui tracer automatiquement le lieu du point Q lorsque le point M décrit l'axe des abscisses. On obtient ainsi une construction par points

de la courbe polynomiale $y = f(x)$ permettant de découvrir graphiquement le nombre de racines et de mesurer des valeurs approchées de chacune d'elles (pour cela, on déplace simplement le point x sur l'axe des abscisses jusqu'à ce que $f(x) = 0$).

Une telle figure interactive — comme d'ailleurs toutes celles qui sont proposées dans cet article — se prête à deux types d'applications dans l'enseignement. Tout d'abord, elle peut être mise telle quelle entre les mains de lycéens, comme une boîte noire, dans un but d'expérimentation et de simulation. La construction géométrique de l'équation et la lecture graphique des solutions engendrent alors un nouveau cadre de travail fructueux à mettre en parallèle avec le cadre plus usuel des méthodes d'approximation numérique et de la calculatrice. En second lieu, en formation initiale et continue des enseignants, on peut proposer la construction proprement dite de la figure par les stagiaires eux-mêmes. Ainsi que je l'ai expérimenté à plusieurs reprises, cela entraîne des remises en question significatives. Par exemple, dans la méthode de Segner, il n'est pas évident de réaliser une figure Cabri qui marche aussi pour des valeurs négatives ou nulles de la variable et des coefficients du polynôme. Il faudra inévitablement effectuer un retour réflexif sur les fondements de la géométrie : correspondance entre nombres et grandeurs géométriques, distinction entre propriétés affines et propriétés métriques, intérêt d'une géométrie orientée.

3 En 1770, l'Anglais John Rowning a conçu un appareil mécanique pour réaliser la construction de Segner d'un mouvement continu [Row1770]. Le mécanisme est décrit dans l'Encyclopédie de Diderot et D'Alembert sous le nom de « constructeur universel d'équations ». On trouvera une photographie d'une reconstitution moderne de cet instrument en

fouillant sur l'intéressant site italien Il giardino di Archimede : <http://www2.math.unifi.it/~archimede/archimede/>. Au passage, on y découvrira bien d'autres instruments de type graphomécanique pour la construction des courbes. Un autre site extrêmement riche sur le même thème est celui du Museo dell'Università di Modena : <http://www.museo.unimo.it/>.



4. L'orthogone de Lill

Un capitaine du génie de l'armée autrichienne, Eduard Lill, a publié en 1867 une autre construction de l'équation polynomiale la plus générale, très différente de celle de Segner mais tout aussi simple à réaliser en pratique [Lil1867]. Continuons à nous placer, pour fixer les idées, dans le cas du troisième degré, en considérant encore la fonction $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

A partir d'une origine O (cf. figure 6), on construit une ligne polygonale OABCD à côtés consécutifs perpendiculaires (appelée « orthogone ») telle que $\overline{OA} = a$, $\overline{AB} = b$, $\overline{BC} = c$, $\overline{CD} = d$ pour les orientations des côtés successifs indiquées sur la figure. On place ensuite les points I et M tels que $\overline{OI} = 1$ et $\overline{MI} = x$. On construit enfin un second orthogone ONPQ comme sur la figure. Les triangles OIM, OAN, NBP et PCQ étant directement semblables, on obtient finalement $\overline{QD} = f(x)$, ainsi que le justifient les égalités suivantes :

- $\overline{NA} = \overline{OA} \cdot x = ax$;
- $\overline{NB} = \overline{NA} + \overline{AB} = ax + b$;
- $\overline{PB} = \overline{NB} \cdot x = (ax + b)x$;
- $\overline{PC} = \overline{PB} + \overline{BC} = (ax + b)x + c$;
- $\overline{QC} = \overline{PC} \cdot x = ((ax + b)x + c)x$;
- $\overline{QD} = \overline{QC} + \overline{CD} = ((ax + b)x + c)x + d$.

On reconnaît encore l'algorithme de Horner, mais, cette fois, il a été traduit graphiquement par des constructions de perpendiculaires plutôt que de parallèles. Comme pour la méthode de Segner, la résolution de l'équation $f(x) = 0$ se fait soit par tâtonnements

(on essaye diverses valeurs de x jusqu'à ce que le point Q coïncide avec le point D), soit par lecture graphique à partir d'une construction par points du graphe de f (qui s'obtient avec précision en reportant dans un repère les valeurs de $f(x)$ lues sur l'orthogone pour un grand nombre de valeurs de x). Lill, quant à lui, utilisait un transparent finement quadrillé qu'il faisait tourner autour du point O sur l'orthogone OABCD, ce qui lui permettait de suivre de l'œil les côtés successifs de l'orthogone ONPQ sans avoir à le tracer effectivement. Avec Cabri (cf. figure 7), il est facile de déplacer le point x sur l'axe des abscisses jusqu'à ce que les extrémités des deux orthogones coïncident.

Remarquons que, pour le second degré, la condition de coïncidence des points terminaux des deux orthogones (dans ce cas, P et C) conduit à une construction du point intermédiaire N comme intersection de la droite (AB) et du cercle de diamètre [OC], et, par suite, à une construction exacte à la règle et au compas des racines de l'équation. On retrouve cette solution graphique, avec diverses variantes, dans de nombreux manuels scolaires de Première.

Signalons aussi une idée assez simple, due à Benedetto Scimemi [Sci1987], qui permettra à des lycéens de réaliser la construction de Lill de manière concrète et attrayante : il suffit de disposer d'une équerre pour le second degré (cf. figure 8), de deux équerres pour le troisième degré, de trois équerres pour le quatrième degré (cf. figure 9), et ainsi de suite.

Enfin, pour les élèves de Terminale les plus avancés, on pourra étudier une extension ingénieuse de la méthode permettant aussi la détermination des racines imaginaires : l'idée, encore due à Lill [Lil1868], est de remplacer

les triangles rectangles directement semblables par des triangles quelconques. Sur la figure 10 (par rapport aux figures précédentes, pour des raisons de commodité, on a changé le sens de rotation et on a pris a pour unité de longueur), les triangles OAN, NBP et PCQ sont directement semblables. En travaillant dans le plan complexe, avec les affixes marquées sur la figure, traduisons la similitude de ces trois triangles :

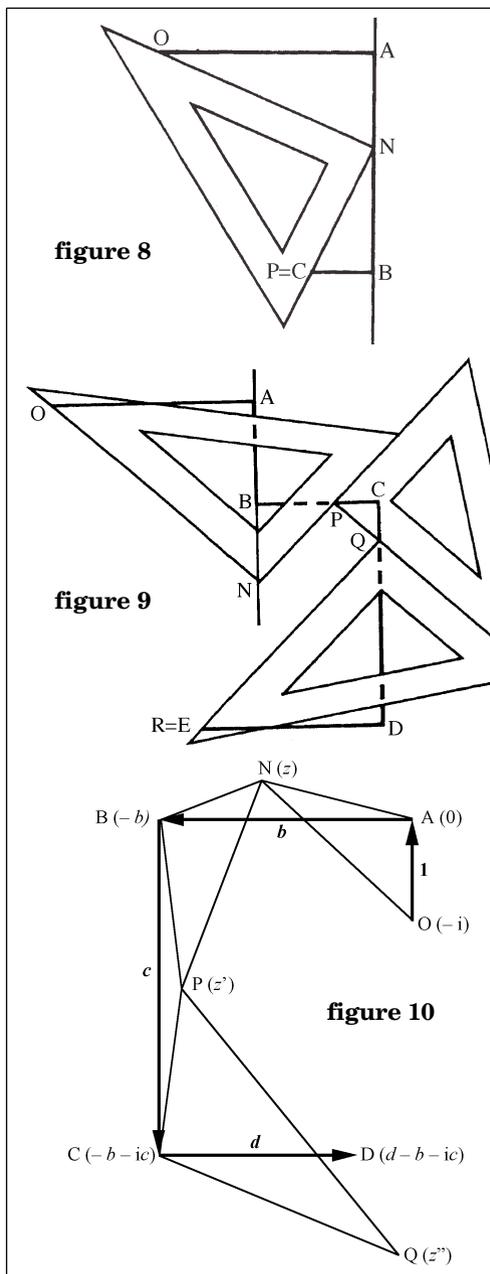
$$\frac{z'' + b + ic}{-b - ic - z'} = \frac{z' + b}{-b - z} = \frac{z - 0}{0 + i}$$

d'où $z'' = -z^3 - bz^2 - cz - b - ic$. On voit alors que l'extrémité de la ligne polygonale ONPQ coïncide avec celle de l'orthogone OABCD lorsque $z'' = d - b - ic$, c'est-à-dire lorsque z est solution de l'équation $z^3 + bz^2 + cz + d = 0$. Bien entendu, on retrouve les solutions réelles si l'on impose à N de rester sur l'axe réel, c'est-à-dire si le triangle OAN reste rectangle en A.

Il est alors loisible de conduire avec Cabri des expérimentations fructueuses, toujours dans les cas du troisième et du quatrième degrés, afin, par exemple, de découvrir que les racines non réelles d'un polynôme à coefficients réels sont conjuguées deux à deux.

5. Équations algébriques et systèmes articulés

L'Anglais Alfred Bray Kempe était avocat, spécialiste du droit ecclésiastique, ce qui ne l'empêchait pas, à ses moments perdus, de pratiquer la musique et les mathématiques. Il s'intéressa également aux systèmes articulés, c'est-à-dire à ces systèmes mécaniques sans engrenages ni fils, formés uniquement de tiges rigides attachées les unes aux autres en des points fixes de chacune et pouvant pivoter.



ter librement autour de ces points. En 1876, il publie un court texte intitulé « On a general method of describing plane curves of the n th degree by linkwork » [Kem1876]. Ce texte revêt une grande importance théorique car il réalise l'achèvement du programme cartésien sur les courbes. En effet, Kempe y démontre rigoureusement ce que Descartes avait pressenti et exposé de manière assez floue en 1637, à savoir que les courbes algébriques (celles qui admettent une équation algébrique $P(x, y) = 0$) sont exactement celles qui peuvent être tracées par un système articulé. Un peu auparavant, Kempe avait étudié en détail le cas particulier des courbes ayant une équation de la forme $f(x) = 0$ [Kem1873]. Voyons donc, en guise d'exemple, comment on peut réaliser un système articulé pour construire une telle équation lorsque $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

On constate qu'en valeur absolue, les racines éventuelles sont majorées par $R = \text{Max}(1, |a| + |b| + |c|)$.

En effet, si x est une racine, on a soit $|x| \leq 1$, soit $|x| > 1$ et alors :

$$|x|^3 = |ax^2 + bx + c| \leq |a||x|^2 + |b||x| + |c| \leq (|a| + |b| + |c|)|x|^2$$

c'est-à-dire $|x| \leq |a| + |b| + |c|$.

En posant $x = R \cos t$, la linéarisation de $f(R \cos t)$ permet de mettre l'équation sous la forme :

$$\frac{aR^2 + 2c}{2} + \frac{3R^3 + 4bR}{4} \cos t + \frac{aR^2}{2} \cos 2t + \frac{R^3}{4} \cos 3t = 0$$

autrement dit une écriture du type :

$$l_0 + l_1 \cos t + l_2 \cos 2t + l_3 \cos 3t = 0.$$

En lui-même, ce calcul constitue un bel exercice de trigonométrie pour des lycéens. Remar-

quons que, quitte à changer x en $-x$, on peut toujours se ramener au cas où a est positif, et alors, à condition de choisir R assez grand, on peut faire en sorte que les nombres l_0, l_1, l_2, l_3 soient tous positifs, ce qui va permettre de les modéliser par des longueurs de tiges rigides.

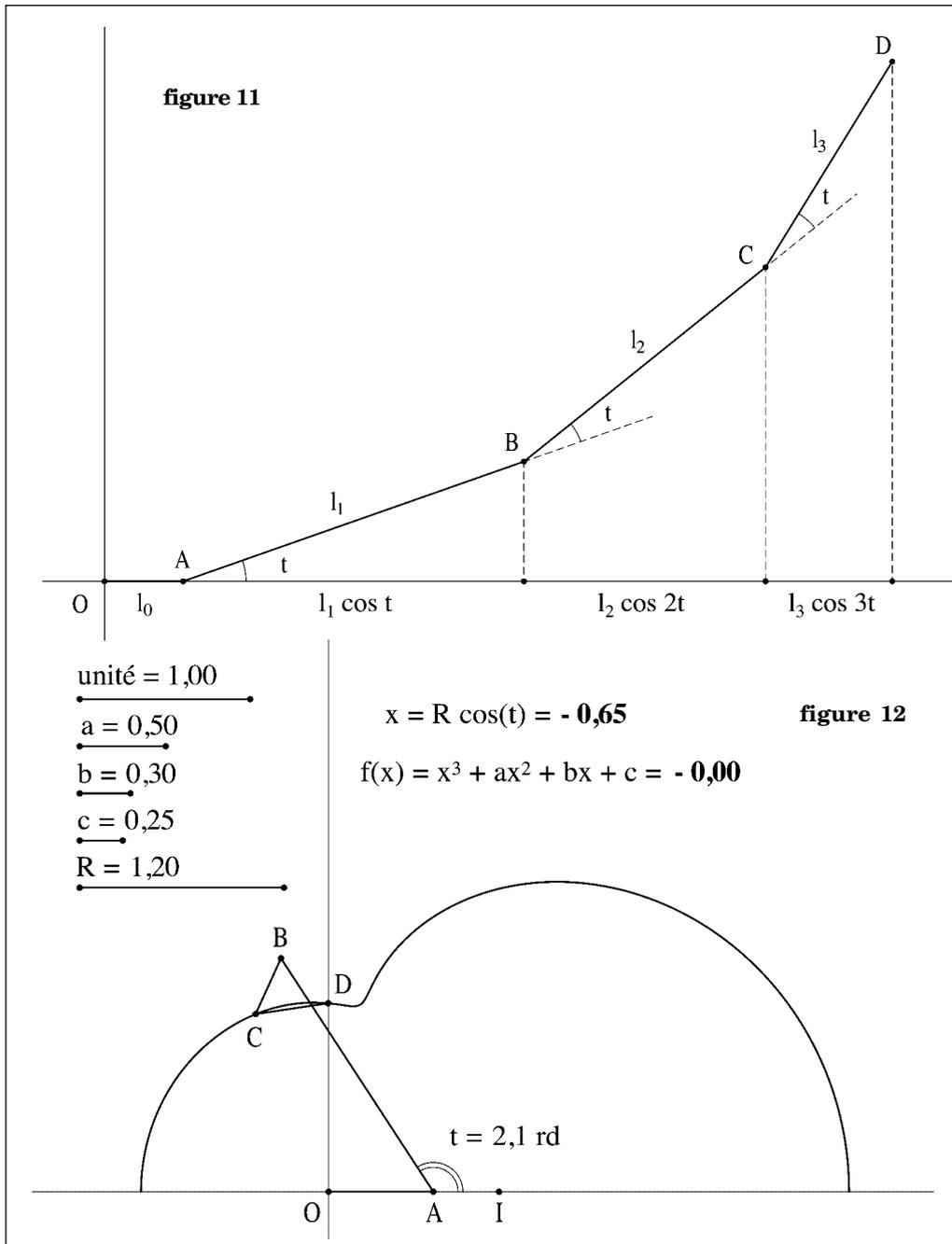
Si l'on fabrique un système articulé⁴ (cf. figure 11) avec des barres OA, AB, BC, CD ayant pour longueurs respectives l_0, l_1, l_2, l_3 et astreintes à pivoter de sorte que les angles entre deux barres consécutives soient tous égaux à un même angle t , l'abscisse de l'extrémité D est précisément égale à :

$$l_0 + l_1 \cos t + l_2 \cos 2t + l_3 \cos 3t.$$

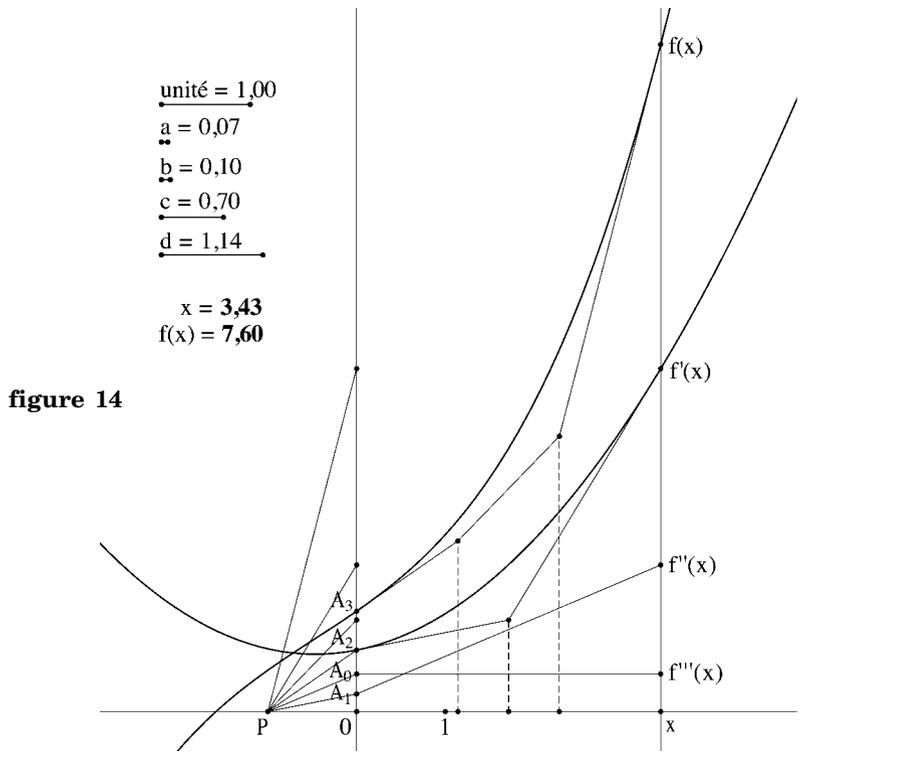
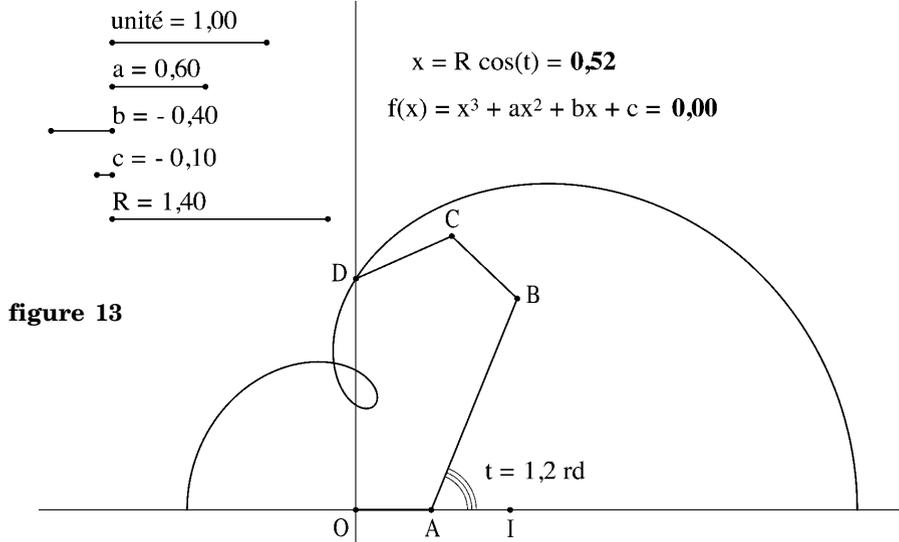
Résoudre l'équation revient donc à trouver les angles $t \in [0, \pi]$ pour lesquels le point D se trouve sur l'axe des ordonnées. En effet, lorsque l'angle t décrit l'intervalle $[0, \pi]$, la variable x décrit bijectivement l'intervalle $[-R, R]$ et, d'après les inégalités vues plus haut, on est certain que toutes les racines se trouvent dans ce dernier intervalle.

Avec Cabri, il suffit de déplacer le point B sur le demi-cercle supérieur de centre A et de rayon l_1 jusqu'à ce que D rencontre l'axe vertical. Si l'on demande le lieu de D quand B varie, les racines correspondent alors aux points d'intersection de ce lieu et de l'axe des ordonnées. On constatera de manière très visuelle — les lieux sont de belles courbes — qu'il y a entre un et trois points d'intersection (cf. figures 12 et 13).

⁴ Pour avoir une idée de la façon dont peuvent être réalisées les contraintes mécaniques décrites ici, consulter la page <http://www.cs.smith.edu/~orourke/FUCG/Kempe.html>. Grâce au multiplicateur de Kempe, on matérialise tout d'abord les angles $t, 2t$ et $3t$ autour de l'origine O. Des parallélogrammes articulés permettent ensuite de mettre bout à bout les tiges rigides de longueurs données.



CONSTRUCTIONS D'EQUATIONS ALGEBRIQUES



6. Les intégrations successives de Massau

Une dernière méthode, imaginée par l'ingénieur belge Junius Massau en 1878, repose sur l'idée toute simple que, pour construire un polynôme de degré n , il suffit d'intégrer n fois sa dérivée n -ième, qui est une constante [Mas1878, p. 205-208]. Les formules employées pour l'intégration proviennent de la formule de Taylor et sont organisées de manière que la construction de chaque dérivée exploite les points obtenus lors de la construction de la dérivée précédente. Il en résulte, en particulier, une construction par points et tangentes, ce qui permet des tracés beaucoup plus précis que dans une simple construction par points.

Pour un polynôme du troisième degré $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, après avoir porté sur l'axe des ordonnées (cf. figure 14) les points définis par :

$$\overline{OA_0} = 6a = f'''(0), \quad \overline{OA_1} = 2b = f''(0), \\ \overline{OA_2} = c = f'(0), \quad \overline{OA_3} = d = f(0),$$

il suffit de traduire par des constructions géométriques (tracés de parallèles) les égalités successives suivantes, faciles à vérifier :

- $f'''(x) = f'''(0)$;
- $f''(x) = f''(0) + f'''(0) \times x$;
- $f'(x) = f'(0) + f''(0) \times \frac{x}{2} + f'''(0) \times \frac{x^2}{2}$;
- $f(x) = f(0) + f'(0) \times \frac{x}{3} + \left[f'(0) + f''(0) \times \frac{x}{2} \right] \times \frac{x}{3} + f''(0) \times \frac{x^2}{3}$.

L'outil « lieu » de Cabri permet alors de tracer la courbe représentative de f (et donc de

résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$), mais aussi de tracer les courbes représentatives de toutes les dérivées de f . Une telle figure interactive offre la possibilité aux élèves d'étudier expérimentalement, pour diverses valeurs des coefficients, les liens qui peuvent exister entre les propriétés de f et celles de ses dérivées.

Conclusion

Tout ce qui précède montre que la résolution graphique des équations a joué un rôle important, aujourd'hui largement méconnu, dans l'histoire de l'analyse numérique. Au-delà de son intérêt proprement historique, ce thème constitue une source inépuisable d'activités intéressantes à la portée des élèves des lycées : constructions géométriques sur le papier à l'aide d'instruments variés, fabrication de nouveaux instruments de dessin, tracé de courbes à l'aide de systèmes articulés, simulation de constructions anciennes à l'aide de logiciels de géométrie dynamique, comparaison de procédés de calcul graphique et de procédés de calcul numérique, questions théoriques mêlant géométrie, algèbre et analyse. Incontestablement, cela fournira l'occasion de multiples changements de cadre propres à renforcer l'acquisition des concepts fondamentaux de nombre et de grandeur, de courbe et de fonction.

Dans cet article, j'espère notamment avoir fourni aux enseignants de lycée des idées de départ originales pour l'exploitation pédagogique des logiciels de géométrie dynamique, que ce soit pour des illustrations en classe avec un vidéoprojecteur ou pour des travaux pratiques en salle informatique. En particulier, en lien avec des problèmes issus d'autres disciplines, il y aurait peut-être là de quoi inspirer des travaux personnels encadrés substantiels. On remarquera également que

l'étude théorique complète de la plupart des résultats que j'ai présentés ne dépasse pas le niveau Terminale et pourrait constituer la trame de travaux dirigés et de problèmes sortant de l'ordinaire.

A un autre niveau, en formation initiale ou continue des enseignants, le thème du cal-

cul par le trait, qui s'appuie sur des contenus mathématiques à la fois simples et motivants pour les stagiaires, permet un travail simultané sur l'histoire de l'analyse numérique, sur l'intégration en classe des outils de géométrie dynamique, sur l'élaboration d'activités pour les élèves et sur des questions didactiques.

Bibliographie

- [Cun1886] CUNYNGHAME, Henry, On a mechanical method of solving quadratic and cubic equations, whether the roots be real or impossible, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* (5), 21 (1886), p. 260-263.
- [Des1637] DESCARTES, René, *La Géométrie*, appendice au *Discours de la Méthode*, Leyde, 1637 ; rééd., New York : Dover, 1954.
- [Kem1873] KEMPE, Alfred Bray, On the solution of equations by mechanical means, *The Messenger of Mathematics* (2), 2 (1873), p. 51-52.
- [Kem1876] KEMPE, Alfred Bray, On a general method of describing plane curves of the n th degree by linkwork, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 7 (1876), p. 213-216.
- [Lill1867] LILL, Eduard, Résolution graphique des équations numériques de tous les degrés à une seule inconnue, et description d'un instrument inventé dans ce but, *Nouvelles Annales de mathématiques* (2), 6 (1867), p. 359-362.
- [Lill1868] LILL, Eduard, Résolution graphique des équations algébriques qui ont des racines imaginaires, *Nouvelles Annales de mathématiques* (2), 7 (1868), p. 363-367.
- [Mas1878] MASSAU, Junius, Mémoire sur l'intégration graphique et ses applications, *Annales de l'Association des ingénieurs sortis des écoles spéciales de Gand*, 2 (1878), p. 13-55, 203-281.
- [New1967-1981] NEWTON, Isaac, *Mathematical Papers*, ed. by D.T. Whiteside, Cambridge : University Press, 8 vol., 1967-1981.
- [Row1770] ROWNING, John, Directions for making a machine for finding the roots of equations universally, with the manner of using it, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 60 (1770), p. 240-256.
- [Sci1987] SCIMEMI, Benedetto, Un metodo grafico per la ricerca degli zeri reali dei polinomi, *Archimede*, 39 (1987), n° 4, p. 163-178.
- [Seg1759] SEGNER, Johann Andreas von, Methodus simplex et universalis, omnes omnium aequationum radices detegendi, *Novi commentarii Academiae scientiarum imperialis Petropolitanae*, 7 (1758-1759), p. 211-226.
- [Tou2003a] TOURNES, Dominique, Du compas aux intégraphes : les instruments du calcul graphique, *Repères-IREM*, 50 (2003), p. 63-84.
- [Tou2003b] TOURNES, Dominique, Construction d'équations algébriques et différentielles, dans Lagrange, Jean-Baptiste *et al.* (éds), *Actes du colloque européen « Intégration des technologies dans l'enseignement des mathématiques » (Reims, 20-22 juin 2003)*, <http://www.reims.iufm.fr/Recherche/ereca/itemcom/>.