LA PROPORTIONNALITÉ DANS L'ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE EN FRANCE, D'HIER À AUJOURD'HUI

Magali HERSANT
IUFM des Pays de Loire
et CREN (Université de Nantes)

L'étude des rapports et proportions a autrefois fait l'objet de recherches mathématiques qui ont eu une importance considérable dans le développement de certains concepts (Dahan – Dalmedico, Peiffer, 1995). Puis, l'algèbre a rendu caduque la théorie des proportions alors remplacée par l'application linéaire.

Dans l'enseignement obligatoire français, on observe la même évolution historique : l'étude de la proportionnalité et de l'application linéaire qui est aujourd'hui le modèle mathématique institutionnel a remplacé celle des problèmes de règle de trois et de la théorie des proportions. Comment cette évolution s'est-elle effectuée ? Pour quelles raisons ? Nous apportons ici des éléments de réponse à ces questions en effectuant, à partir des textes officiels et de manuels, une analyse de l'évolution de la transposition didactique d'une tâche classique et emblématique, le calcul de quatrième proportionnelle. Cette étude permet de caractériser l'évolution de la transposition didactique de la proportionnalité selon cinq périodes alors que classiquement trois sont distinguées : celle de la « règle de trois » des « mathématiques traditionnelles », celles des fonctions linéaires des « mathématiques modernes », celle de tableaux de proportionnalité des « mathématiques concrètes » (Pluvinage, Dupuis, 1981).

La présentation de ces périodes, après des précisions d'ordres méthodologique et théorique, permettra de questionner la transposition didactique actuelle de la proportionnalité.

1. Cadrage théorique et précisions méthodologiques

L'étude est menée dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999). Nous utilisons notamment les notions de savoir et de savoir-faire rappelées brièvement ci-après. L'objet de ce paragraphe est de préciser les contours de la recherche et le vocabulaire utilisé.

1.1 Enseignement obligatoire

Depuis 1887, la durée de la scolarité obligatoire s'est accrue progressivement et l'organisation en « niveaux » a été modifiée. Jusqu'en 1959[1] l'enseignement obligatoire était morcelé, et le « collège unique » n'existe que depuis la réforme Haby (1975)[2]. Pour cette étude nous avons considéré les niveaux suivants qui correspondent à la scolarité de la majorité de la population :

— de 1887 à 1941 : classes du primaire (de 6 à 11 ans, jusqu'au CM[3]) et CS[3] (11-13 ans) ou classe de Fin d'études Primaires (11-14 ans)[4] ;

— de 1941 à 1960 : classes du premier cycle du primaire (6-11 ans, jusqu'au CM) et du primaire supérieur ou second cycle (11-14 ans)[5];

— de 1960 à 1977 (application de la réforme Haby) : classes de primaire (6-11 ans) et des collèges d'enseignement général (CEG);

— depuis 1977 : classes de primaire et de collège.

1 Plan Berthouin, réforme des collèges et des lycées, obligation scolaire prolongée jusqu'à 16 ans.
2 Cette réforme institue un tronc commun de formation de l'école primaire à la sortie du collège.
3 CM : Cours moyen ; CS : Cours Supérieur
4 La réforme de 1931 étend la scolarité obligatoire jusqu'à 14 ans, elle est mise en place à partir de 1938. Jusqu'en 1938, les élèves préparent le Certificat d'études primaires en CM. A partir de 1938, la scolarité est obligatoire jusqu'à 14 ans, le Certificat d'études primaires est alors préparé en classe de fin d'études ou au CS. Les CS n'existent que dans les écoles de plus de cinq classes.
5 Les élèves préparent le diplôme d'études préparatoires au CM. A l'issue du CM, il est possible d'accéder, sur concours, au collège dont les programmes sont unifiés avec ceux de l'enseignement primaire supérieur (E.P.S.)

1.2 Proportionnalité

La proportionnalité qualifie une relation particulière entre des grandeurs que l'on peut traduire par une relation entre les valeurs de ces grandeurs, puis une relation entre des suites numériques *via* les mesures de ces grandeurs.

Le terme « proportionnalité » n'apparaît dans les programmes de l'école obligatoire qu'en 1970. Auparavant, il était question de « problème de règle de trois » et de « rapports et proportions ». Ce mot renvoie implicitement aux cas de proportionnalité simple, directe ou inverse et de proportionnalité multiple mais nous nous intéresserons particulièrement à la proportionnalité directe simple. La tâche que nous considérons est le calcul de quatrième proportionnelle, quel que soit le cadre (Douady, 1986) et le registre de représentation du problème (Duval, 1995). Ainsi les problèmes suivants relèvent du calcul de quatrième proportionnelle :

Etoffe[6] : 18 mètres d'étoffe ont coûté 189 fr. Combien 13 mètres coûteront-ils ?

Carburant : Une voiture consomme en moyenne 8 l de carburant aux 100 km. Compléter le tableau suivant.

Distance (km)	25	1	c	d
Carburant (l)	a	b	10	1

6 extrait de F.F., CM, 1904, p. 196

1.3 Savoirs et savoir-faire relatifs au calcul de quatrième proportionnelle

La théorie anthropologique (Chevallard, 1999) distingue les savoirs et savoirs-faire relatifs à une tâche donnée. Les techniques de résolution de la tâche sont de l'ordre des savoir-faire. Les propriétés et définitions qui permettent de justifier les techniques sont les technologies ; elles sont organisées en théorie. Les technologies et théories sont de l'ordre des savoirs.

a) *Les savoirs relatifs au calcul de quatrième proportionnelle*

Ces savoirs correspondent aux deux théories qui permettent de modéliser la notion de proportionnalité : la théorie des rapports et proportions et l'application linéaire. Bien qu'ayant des objets de base différents (rapport, proportion, extrêmes et moyens pour la théorie des proportions et application linéaire, fonction linéaire, image et antécédent pour l'application linéaire), ces théories ont évidemment des points communs :

— le coefficient de proportionnalité permet de passer de l'une à l'autre avec la propriété suivante (exprimée dans le cadre des suites numériques pour des raisons de commodité) : *si les suites* $(x_i)_{i\in\mathbf{N}}$ *et* $(y_i)_{i\in\mathbf{N}}$ *sont proportionnelles, il existe une constante k telle que pour tout i entier* $y_i = kx_i$;

— la propriété de linéarité, bien qu'exprimée avec des objets différents (rapport, proportion / combinaison linéaire).

Toutefois, le point de vue sur la proportionnalité est radicalement différent dans les deux modèles. Dans la théorie des proportions, l'accent est mis sur le rapport scalaire entre grandeurs de même nature i.e. sur l'aspect analogique (Sokona, 1989). En effet, initialement Euclide dans sa théorie ne conçoit que des rapports de ce type ; le coefficient de proportionnalité qui est un rapport de mesures de grandeurs de nature différente n'est associé qu'ensuite à cette théorie. En revanche, dans la théorie de l'application linéaire l'accent est mis sur le coefficient de proportionnalité i.e. l'aspect analytique.

Le choix d'un modèle institutionnel qui servira de théorie n'est pas neutre quant aux techniques de résolution de problèmes qui seront disponibles et favorisées. En particulier, pour un problème de proportionnalité donné, un modèle peut être plus performant que l'autre. Ainsi, dans les cas de pourcentage d'augmentation / réduction l'utilisation de la fonction linéaire permet de calculer rapidement un prix final après une succession d'augmentations ou de réductions sans avoir à calculer les prix résultants de chaque variation. En revanche, le modèle des proportions paraît plus adéquat pour résoudre des problèmes de partages proportionnels.

Dans la pratique, si l'on dispose des deux modèles, l'adaptation au modèle le plus performant se fait de façon naturelle. Mais dans l'enseignement, le choix d'une théorie de référence limite beaucoup le recours à certaines propriétés justifiées par l'autre théorie.

Différentes propriétés permettent de justifier les techniques de calcul de quatrième proportionnelle, nous les avons répertoriées dans le tableau donné en annexe 1. Certaines d'entre elles sont caractéristiques de la proportionnalité et nous verrons que, selon les époques, elles ont eu le statut de définition ou de propriété.

b) *Les savoir-faire relatifs au calcul de quatrième proportionnelle*

Dans la théorie anthropologique, la distinction entre deux techniques se fait en fonction des objets mathématiques utilisés — donc implicitement en fonction de la théorie de référence — mais aussi, et de façon essentielle, en fonction du raisonnement mathématique.

Les techniques de résolution de problèmes de quatrième proportionnelle sont assez nombreuses et nous ne présenterons ci-dessous que celles utiles à l'étude. Comme nous nous intéressons à l'enseignement obligatoire où le cadre arithmétique et le registre du langage naturel sont principalement utilisés, nous les présenterons avec ces restrictions et à propos du problème *Etoffe*. Pour chacune d'elles nous mettons en évidence : les étapes du raisonnement et les objets mathématiques sollicités ; les savoirs qui permettent de justifier la technique, en référence à ceux listés dans le tableau de l'annexe 1.

Technique de réduction à l'unité

La résolution du problème *Etoffe* proposée dans le manuel dont il est extrait est la suivante (F.F., CM, 1904, pp. 196-197) :

Si 18 *mètres coûtent* 189 fr.

1 *mètre coûtera* 18 *fois moins, ou* $\frac{189}{18}$

et 13 *mètres coûteront* 13 *fois plus qu'un mètre*

ou $\frac{189}{18} \times 13$

d'où $x = \frac{189 \times 13}{18} = 136$ fr 50 .

Cette technique organisée comme un petit discours en trois lignes est classiquement nommée « règle de trois ». Mais, la signification du terme s'est modifiée au cours du temps ; aussi, pour éviter toute confusion, nous la nommons *technique de réduction à l'unité.*

Elle met en jeu la notion de rapport (rapport interne) avec l'utilisation successive d'une division par un scalaire qui permet de trouver la valeur correspondant à l'unité et d'une multiplication par un autre scalaire pour trouver la valeur chercher. Dans le contexte de la théorie des proportions elle sera justifiée par la propriété caractéristique de la proportionnalité (2a) ici exprimée dans le cadre des grandeurs :

Deux grandeurs U *et* V *sont proportionnelles si quand* U *est multipliée par* 2, 3, 4... λ *(λ réel),* V *est multipliée par* 2, 3, 4… λ.

Dans le contexte de l'application linéaire, elle sera justifiée par la propriété de linéarité (8) :

Comme les grandeurs U *et* V *sont proportionnelles, il existe une fonction linéaire f qui à toute mesure* u_j *de U associe la mesure* v_j *correspondante de V. Si* $u_i = \lambda u_j$ alors $v_i = f(u_i) = \lambda v_j$.

Technique de multiplication par un rapport

Considérons maintenant la solution suivante :

Si 18 *m coûtent* 189 *fr, alors* 13 *m coûtent* $\frac{13}{18}$ *de* 189 *fr soit* $189 \times \frac{13}{18}$.

Ici, on effectue directement des rapports de mesures d'une même grandeur, sans utiliser ni proportion, ni division par des scalaires. L'idée essentielle est que les grandeurs « prix » et « longueur » varient dans le même rapport (propriété 1).

Technique des proportions

Si maintenant on résout le problème de la façon suivante :

Soit x le prix de 13 *mètres de tissu. Le prix et la longueur de tissu étant proportionnels, on a :*

$\frac{189}{18} = \frac{x}{13}$ *donc* $189 \times 13 = 18 \times x$ *et*

$x = \frac{189 \times 13}{18}$.

On écrit explicitement la proportion (propriété 4) et on l'exploite avec la propriété d'égalité du produit des extrêmes et des moyens (propriété 3). Cette technique conduit à effectuer des rapports et des produits de mesures de grandeurs différentes (longueur et prix), contrairement à ce qui est fait dans les deux techniques précédentes.

Technique du produit en croix

Considérons maintenant la résolution suivante :

Soit x le prix de 13 *mètres de tissu.*

(1) $\frac{189}{18} = \frac{x}{13}$ *donc* (2) $189 \times 13 = 18 \times x$ *et*

$x = \frac{189 \times 13}{18}$.

que l'on peut décliner comme suit dans le registre tableau :

189	x
18	13

donc $189 \times 13 = 18 \times x$ *et* $x = \frac{189 \times 13}{18}$.

Dans l'esprit de cette technique, l'égalité (1), si elle est écrite, ne correspond pas à une proportion, mais plutôt à une propriété du tableau de proportionnalité et du coefficient de proportionnalité. Dans ce cas, la propriété 4 n'est donc plus explicitement utilisée. Par ailleurs, l'égalité (2) n'est plus justifiée par la propriété 3 d'égalité du produit des extrêmes et des moyens mais plutôt par une propriété des rapports de nombres. Ainsi cette technique, nommée conformément à l'usage *produit en croix,* tend à se détacher de la théorie des proportions.

Technique du coefficient

On peut aussi raisonner de la façon suivante :

Le tissu coûte $\frac{189}{18}$ *fr / m, donc* 13 *mètres de tissu coûteront* $13 \times \frac{189}{18}$ *fr.*

La valeur unitaire intervient alors, comme dans la technique de réduction à l'unité, mais elle est posée d'emblée comme coefficient de proportionnalité (propriétés 6 et 7) et mesure d'une grandeur-quotient, alors qu'avec la réduction à l'unité on utilise seulement des multiplications et divisions par des scalaires.

D'autres techniques possibles

Selon les valeurs numériques du problème (calcul du prix pour 9m ou pour 27m par exemple) on peut bien sûr penser à des techniques linéaires utilisant les propriétés 2a, 2b ou 8a, 8b. La technique de résolution graphique est aussi toujours possible, bien qu'elle apparaisse peu économique pour le calcul d'une seule valeur.

1.4 Sources de l'étude

Cette étude s'appuie à la fois sur l'analyse des textes officiels et sur celle de nombreux manuels de différentes époques et de différents niveaux de façon à rendre au mieux compte de l'évolution de la transposition didactique. Parmi les textes officiels, nous avons utilisé les programmes, ainsi que leurs accompagnements et les répartitions officielles lorsqu'ils existent. En effet, les programmes de la fin du 19ème siècle et du début du 20ème siècle sont assez peu détaillés. De plus, si les changements de programmes sont rapidement répercutés dans les manuels aujourd'hui, ces modifications étaient plus lentes autrefois, surtout en périodes de guerre, d'où des écarts entre programmes et organisations mathématiques dans les manuels et l'intérêt d'avoir recours aux répartitions officielles. Ces textes officiels nous ont essentiellement permis de délimiter les périodes par les changements institutionnels qu'ils impulsaient. Des extraits sont donnés en annexe 2.

Concernant les manuels, nous n'avons pas effectué d'étude pour savoir dans quelle mesure l'usage de ces livres était répandu. La liste des manuels utilisés pour l'étude ainsi que leur analyse sont proposées en annexe 3. Outre cette analyse qui permet de repérer ce qui est enseigné à propos de la proportionnalité, l'étude des manuels permet de pointer, à travers des « petites phrases » en particulier, les désaccords des certains auteurs avec la façon officielle de présenter la proportionnalité. Ces désaccords témoignent probablement de débats au sein de la communauté des inspecteurs et des auteurs de manuels. Ils sont significatifs de la recherche d'une organisation mathématique à la fois cohérente et compatible avec un enseignement populaire. En effet, les remarques des auteurs sont le plus souvent précurseurs de modifications dans la transposition didactique de la proportionnalité soumise à différents types de contraintes.

2. Cinq périodes dans l'enseignement de la proportionnalité

Le cadre de travail décrit précédemment permet d'étudier la façon dont les « organisations scolaires » (Bosch, 1994) relatives au calcul de quatrième proportionnelle se sont succédées depuis 1887 sous l'effet de différentes contraintes. Il conduit à la caractérisation de cinq périodes dans la transposition didactique de la proportionnalité.

2.1 1887 - 1923 : *grandeurs qui varient dans le même rapport, problèmes de règle de trois et technique de réduction à l'unité*

L'arrêté du 18 janvier 1887 définit l'organisation pédagogique et le plan d'études dans les écoles primaires. L'enseignement doit permettre aux élèves d'acquérir des connaissances utiles à leur vie professionnelle future :

> L'enseignement est essentiellement intuitif et pratique (...), c'est-à-dire qu'il ne perd jamais de vue que les élèves de l'école primaire n'ont pas de temps à perdre en discussions oiseuses, en théories savantes, en curiosités scolastiques, et ce n'est pas trop de cinq à six années de séjour à l'école pour les munir du petit trésor d'idées dont ils ont strictement besoin et surtout pour le mettre en état de le conserver et de le grossir par la suite. [...] *Instructions de 1887*

A cette époque, l'enseignement de la proportionnalité se fait dès le CM à partir de l'étude des grandeurs proportionnelles et des problèmes de règle de trois qui sont travaillés régulièrement chaque semaine. La théorie des proportions sert de référence, mais les programmes ne prévoient pas de l'enseigner explicitement. En effet, les termes « rapports de grandeurs », « grandeurs proportionnelles » et « proportions » ne figurent pas dans l'annexe F qui précise les programmes (cf. annexe 2). Les programmes officiels orientent prioritairement l'enseignement primaire vers l'étude de techniques et celle de réduction à l'unité pour ce qui concerne la proportionnalité. L'extrait suivant des instructions de 1887 résume l'esprit des programmes :

> Ne rejetons pas trop loin la règle de trois : il y a avantage à rompre les enfants à cet exercice de raisonnement qui permet de résoudre au moyen des quatre opérations seulement une foule de questions pratiques. Inutile d'attendre pour cela l'étude des rapports et des proportions. A partir de la deuxième année du cours moyen, une leçon par semaine peut être réservée à la solution de ces problèmes. *Instructions de 1887*

Cependant, dans les interprétations officielles du programme et répartitions de l'enseignement par semaine, une volonté d'apporter des éléments de l'ordre des savoirs apparaît. En effet, l'étude des propriétés justifiant les techniques de calcul de quatrième proportionnelle, non mentionnée dans l'annexe F, est proposées au CS avec, selon les ouvrages, soit l'étude de « ce qu'on appelle rapport de deux nombres ; proportions et les notions générales sur les grandeurs qui varient dans le même rapport ou dans un rapport inverse », soit celle des « grandeurs proportionnelles et des rapports ».

Les problèmes dits de « règle de trois », qui correspondent au calcul de quatrième proportionnelle, sont au programme du CM. Pour les résoudre, les élèves disposent de connaissances sur la multiplication et la division de nombres entiers et décimaux, ainsi que de notions sur grandeurs, nombres et fractions (cf. annexe 2). La réduction à l'unité apparaît comme la technique institutionnelle dans les répartitions de programmes ; elle est particulièrement conseillée pour résoudre les problèmes d'intérêt, d'escompte, de partage, de moyenne au CS. Cependant, les techniques des rapports et des proportions ne sont pas écartées.

Dans les manuels de CM – CEP [7], les grandeurs proportionnelles sont en général définies à partir de la propriété de linéarité 2a exprimée dans le cadre des grandeurs : « deux grandeurs sont proportionnelles si quand l'une est multipliée ou divisée par 2, 3, 4… l'autre est aussi multipliée ou divisée par 2, 3, 4… ». Cette définition permet de justifier la technique de réduction à l'unité et celle des rapports car seuls des rapports scalaires entiers sont employés. L'étude des rapports et proportions est rarement effectuée. La technique de réduction est toujours proposée, sous la forme algorithmique d'un petit discours en trois lignes. Elle est quelquefois accompagnée de celle des rapports.

Dans les manuels du CS, on retrouve globalement les mêmes définitions de grandeurs proportionnelles et les mêmes techniques qu'au CM. Cependant les choix semblent plus marqués par les problématiques de la théo-

7 Certificat d'études primaires

rie des proportions. Cela se traduit de différentes façons. Tout d'abord, la théorie de référence est explicitement celle des rapports et proportions, elle est souvent exposée dans le chapitre précédent celui sur les problèmes de règle de trois. Ensuite, la technique des proportions est employée et la technique des rapports est plus répandue. Ainsi, dans le Leyssenne (CS, 1903), après avoir présenté la théorie des rapports et proportions dans le chapitre précédent, les auteurs remarquent que la technique de réduction à l'unité est la seule dont il faudrait parler pour se conformer aux programmes. Cependant, ils explicitent le lien initial entre « problèmes de règle de trois » et théorie des proportions et, après avoir présenté sur un exemple la technique de réduction à l'unité pour les problèmes de règle de trois simple sous la forme d'un discours en trois temps, ils proposent de retenir comme « règle » la technique des rapports.

On appelle **règles de trois** des questions qui peuvent se résoudre au moyen de proportions dans chacune desquelles trois termes sont connus. De là ce nom de règle de trois qui est resté à ces questions, quoiqu'on puisse les résoudre aussi et plus facilement par la méthode de réduction à l'unité, la seule dont il soit parlée dans les programmes. […]

Règle – L'inconnue est égale au nombre qui lui correspond multiplié par le rapport *direct* des deux valeurs de la seconde quantité.

Leysenne CS, 1903, p 241-242

Enfin, les remarques de certains auteurs au sujet de la technique de réduction à l'unité révèlent une activité mathématique contrariée par le caractère artificiel et éloigné de l'esprit de la théorie des proportions que revêt pour eux la réduction à l'unité (technique qui ne requiert pas l'écriture de proportions). Dans le Behr-Vareil (1909) (CS et des Ecoles Normales), par exemple, l'ancrage dans la théorie classique des proportions se traduit par un refus d'utiliser des rapports de grandeurs de nature différente (seuls des rapports de grandeurs de même nature sont considérés). Les transformations sur les proportions de grandeurs ne sont pas possibles dans ce cas, il faut passer par la mesure. Dans l'extrait suivant, c'est nous qui soulignons, sinon la présentation respecte la typographie.

497. – Les *raisonnements* précédents ne conviennent évidemment que pour des *proportions de nombres*. Voici un raisonnement qui s'applique aux proportions de <u>*quatre grandeurs de même espèce*</u>.

*__Théorème.__ – *Étant donnée une proportion de* **quatre grandeurs de même espèce**, *on en obtient une autre : soit en permutant les extrêmes, soit en permutant les moyens, soit en mettant les extrêmes à la place des moyens et réciproquement.*
[…]

* 501. Propriété. – **Théorème.** – *Quand deux grandeurs* de même espèce *sont directement proportionnelles le rapport d'une valeur* quelconque *de la* 1ère *à la valeur correspondante de la* 2ème *est un* nombre invariable.
[…]

502. – Si les grandeurs directement proportionnelles ne sont pas de même espèce, le raisonnement du numéro 501 est en défaut, puisqu'il est impossible de permuter les moyens de la proportion ; l'écriture nouvelle n'aurait aucun sens.

Beil, Vareil CS, 1909, p 288-299

Cette insatisfaction de certains auteurs à proposer la technique de réduction à l'unité facilement assimilable pour les élèves mais trop peu ancrée dans la théorie des proportions est pour nous probablement à l'origine d'un changement d'orientation dans l'enseignement de la proportionnalité.

2.2 1923-1945 : *évolution du champ des problèmes de proportionnalité et contestation de la méthode de réduction à l'unité, vers le coefficient de proportionnalité ?*

Cette période voit de nombreux changements de programme à tous les niveaux. Pour la proportionnalité, c'est une période de transition qui marque le début de changements importants.

Dans les textes officiels de 1923 pour le CM et le CS[8], la proportionnalité est toujours enseignée à partir des grandeurs proportionnelles, cependant elle n'est plus seulement envisagée comme une convention sociale (problèmes de commerce) mais aussi comme une modélisation de phénomènes physiques dans lesquels des grandeurs-quotient interviennent (cf. annexe 2). Des problèmes de mouvement uniforme, de densité, d'échelle… sont introduits dans le champ des problèmes de proportionnalité et un nombre plus important de grandeurs particulières sont étudiées (durée, longueur, surface, volume). Les calculs de mesures de grandeurs avec des formules sont au programme du CS, ils sont associés à l'introduction de l'algèbre.

Par ailleurs, la notion de valeur unitaire apparaît subrepticement dans les programmes de 1931 pour le CS (mis en place en 1938) à travers les notions de poids spécifique, volume spécifique, prix d'une marchandise, quantités de marchandise correspondant à une unité de monnaie (cf. annexe 2). Parallèlement, l'accent est mis sur la correspondance entre les mesures de grandeurs, notamment dans les expressions de grandeurs-quotient (vitesse, poids spécifique...) et le double sens de cette correspondance. Conjointement, un déclin progressif de la méthode de réduction à l'unité est perceptible dans les programmes de CM et du CS : ce n'est plus la seule technique préconisée et l'étude de « solutions raisonnées des problèmes » apparaît au CS.

La relation externe entre les grandeurs proportionnelles est donc mise en avant et la proportionnalité n'est plus envisagée uniquement du point de vue analogique (grandeurs qui varient dans le même rapport), mais aussi du point de vue analytique (relation entre les mesures des grandeurs). Ce changement coïncide avec la perte de monopole de la technique de réduction à l'unité pour le calcul de quatrième proportionnelle dans les programmes de 1923 pour le CM, il laisse supposer l'utilisation de nouvelles techniques comme celle du coefficient préconisée dans les programmes de 1938 pour les classes de l'enseignement primaire supérieur (EPS) et les classes préparatoires à la classe de 6ème. Dans ces textes, les notions de valeurs unitaires et valeurs spécifiques sont explicitement assimilées au coefficient de proportionnalité et l'étude, en 6ème ou année préparatoire, de la relation $y = ax$, où x et y sont des mesures de grandeurs proportionnelles et a le coefficient de proportionnalité, doit préparer à celle des fonctions linéaires en 2ème et 3ème année des EPS. Il y a alors à ce niveau un changement de cadre : la proportionnalité trouve sa place

8 Programmes de 1923 pour le CM et 1931 pour le CS et répartitions des programmes de GAY et MORTREUX (1924).

dans le cadre algébrique, puis fonctionnel. Par ailleurs, ces instructions montrent deux choses : 1/ le coefficient de proportionnalité « vit » déjà dans l'institution collège à l'époque, 2/ les modifications qui vont avoir lieu par la suite pour la scolarité obligatoire viennent probablement des niveaux supérieurs.

Enfin, en 1941 lorsque les études dans l'enseignement primaire élémentaire sont réorganisées [9], l'orientation des programmes du CS de 1931 concernant la proportionnalité se répercute au CM. Les notions de grandeurs-quotient et de valeur unitaire sont étudiées au CM (exemples du mouvement uniforme et de l'échelle).

L'évolution en cours est ainsi caractérisée par un double mouvement : moindre intérêt pour l'approche scalaire des relations entre les grandeurs et intérêt plus important pour l'approche fonction. Elle peut être liée à une volonté louable d'éradiquer une technique trop souvent appliquée machinalement en stipulant la signification de chacun des « quotients » (prix par mètre, densité, poids spécifique...), mais reste à voir comment la transition est gérée dans les manuels.

Dans les manuels, les grandeurs proportionnelles sont toujours définies d'un point de vue analogique, il y a globalement peu d'évolution (cf. annexe 3). Cependant, au CS les savoirs relatifs aux rapports et proportions semblent moins explicités que dans la période précédente. En effet, sur quatre ouvrages un seul aborde ces notions contre 3 sur 3 pour la période précédente.

La technique de réduction à l'unité continue d'être employée au CM, tandis que celle du coefficient apparaît comme une technique nouvelle utilisée à partir du CS, sans toutefois être systématiquement accompagnée d'une modification conséquente des propriétés des grandeurs proportionnelles exposées. En effet, les manuels qui emploient la technique du coefficient énoncent rarement une propriété qui concerne le rapport externe de grandeurs (propriété 4 ou 6).

Le rejet de la méthode de réduction à l'unité et l'évolution vers l'utilisation du coefficient de proportionnalité est légitimé par l'absurdité potentielle de la méthode de réduction à l'unité. Certains auteurs le montrent de façon assez radicale (cf. encadré ci-contre, Gay-Mortreux, CS, 1933, p. 233).

Le rapport 13/273, obtenu avec la méthode de réduction à l'unité, correspond à une quantité d'ouvriers, il n'a de sens que s'il est entier. En revanche, le coefficient 273/13 obtenu avec la technique du coefficient de proportionnalité correspond à une réalité : la longueur d'ouvrage réalisée par un ouvrier. Cette technique permet de choisir le sens de la division effectuée, et donc de préserver une signification aux résultats obtenus ce qui n'est pas possible avec les conventions de présentation imposées dans la règle de trois (l'inconnue est toujours à droite).

Cependant, même si la technique du coefficient présente certains avantages par rapport à la réduction à l'unité nous notons deux éléments qui peuvent constituer un frein à son emploi massif dans la scolarité obligatoire. Premièrement, elle ne possède pas le caractère algorithmique de la réduction à l'unité. En effet selon le coefficient choisi il faudra faire une division ou une multiplication. Deuxièmement son domaine de validité, contrairement à la réduction à l'unité, n'englobe pas les grandeurs inversement proportionnelles qui

9 Les programmes de 1931 n'ont pratiquement pas été appliqués à cause de la guerre.

140. — La **méthode de réduction à l'unité** est d'un *emploi facile;* mais, si on **l'applique machinalement**, elle peut conduire à *des raisonnements trop longs* ou même *absurdes.*

Exemple II. — *13 ouvriers ont fait 273 m. d'ouvrage; combien faudra-t-il d'ouvriers pour faire 420 m. du même ouvrage dans le même temps?*

Réduction à l'unité.

273 m. sont faits par 13 ouvriers.

1 m. — $\frac{13}{273}$ d'ouvrier.

420 m. — $\frac{13 \times 420}{273} = 20.$

Nous trouvons la réponse demandée, mais nous faisons un *raisonnement absurde.*

Méthode préférable.

Le nombre des ouvriers nécessaires est égal à la *longueur totale* (420 m.), divisée par la *longueur que fait 1 ouvrier.*

Longueur faite par 1 ouv. : $\frac{273^{m}}{13}$;

Nombre d'ouvriers :

$420 : \frac{273}{13} = \frac{420 \times 13}{273} = \mathbf{20\ ouv.}$

sont jusque-là étudiées en même temps que les grandeurs proportionnelles. Son emploi est donc susceptible d'entraîner un travail supplémentaire lors du traitement de la proportionnalité inverse. Ces avantages et contraintes sont gérés dans la période suivante.

2.3 1945 - 1969 : *l'utilisation de la valeur unitaire, l'algébrisation des techniques*

Entre 1945 et 1969, deux principaux remaniements de l'enseignement obligatoire sont à l'origine de nouveaux programmes. L'un concerne l'enseignement primaire, l'autre l'enseignement secondaire.

a) L'enseignement primaire

Dans les programmes de 1947 pour le CM, comme en 1938 pour le CS, le « coefficient de proportionnalité » apparaît à travers le calcul de la valeur de l'unité qui est institutionnalisée. Les rapports du coefficient de proportionnalité avec la règle de trois, les pourcentages et les fractions sont précisés (nous ne donnons ici — cf. encadré de la page suivante — que ce qui concerne la règle de trois, le reste figure en annexe 2).

Ainsi la notion de grandeurs proportionnelles n'est plus seulement envisagée comme une relation scalaire entre les grandeurs, mais comme une relation entre les mesures des grandeurs. De plus, la « valeur unitaire » et le « nombre d'unités » pourront être utilisés pour calculer une quatrième proportionnelle. Ces modifications entraînent une algébrisation des techniques de calcul de quatrième proportionnelle (utilisation d'une formule) et préservent la référence aux grandeurs proportionnelles.

Dans le prolongement, les programmes du CS mettent l'accent sur la correspondance

Le programme comprend explicitement l'étude du prix et du poids à l'unité et des exemples analogues de quotients qui peuvent être compris dans la dénomination générale de " valeur de l'unité ". [...] Leur calcul et leur emploi sont résumés dans la formule :

Valeur totale = valeur de l'unité × nombre d'unités.

Cette formule donne la règle de calcul, soit du premier nombre par une multiplication, soit de l'un des termes du deuxième membre par une division.

[...] Les problèmes usuels de règle de trois conduisent à la recherche d'un quotient intermédiaire qui peut être, soit la valeur d'une unité, soit un nombre d'unités. Les formules suivantes en donnent deux exemples typiques :

$$\frac{\text{valeur de la première parcelle}}{\text{surface de 1ère parcelle}} \times \text{surface de la 2ème parcelle}$$

$$\text{prix de l'hectolitre} \times \frac{\text{poids d'une récolte}}{\text{poids de l'hectolitre}}$$

Des exemples simples de quotient permettent, de même, de justifier sommairement les divers modes de calcul des problèmes de règles de trois :

$$\frac{a \times b}{c}\,;\; a \times \frac{b}{c}\,;\; \frac{a}{c} \times b$$

ainsi que des procédés de vérification (division par un même nombre d'un des facteurs et du diviseur).

Programmes de 1947 pour le CM

entre les mesures de grandeurs proportionnelles et la réciprocité de cette correspondance (calcul des deux valeurs de l'unité, par exemple : poids à l'unité de longueur et longueur correspondant à une unité de poids). Ainsi, les problèmes vont probablement plus porter sur le calcul de la valeur unitaire que sur le calcul de quatrième proportionnelle.

Dans les manuels, les instructions ont peu de répercussion sur les technologies et les techniques proposées, surtout au début de la période. La définition issue de la propriété de linéarité exprimée dans le langage naturel (propriété 2a) est toujours la plus fréquemment employée (4 manuels sur 7). Les trois autres manuels proposent l'étude des quotients unitaires, puis celle de la règle de trois ou des grandeurs proportionnelles. La technique de réduction à l'unité continue à être utilisée, mais sa présentation évolue. Au début de la période, le petit discours technologique (fois moins, fois plus) est moins utilisé. De cette façon, la nature de la division effectuée (division par un scalaire ou une mesure de grandeur) est masquée et la présentation est intermédiaire entre la technique de réduction à l'unité et celle du coefficient. Cette présentation permettait sans doute à l'époque d'éviter les problèmes de sens évoqués pour la période précédente. Par ailleurs, vers la fin de la période le petit discours technologique est quelquefois remplacé par des ostensifs qui illustrent la correspondance entre les mesures des grandeurs proportionnelles (flèches verticales pour signifier la proportionnalité directe ou indirecte ou flèches horizontales pour signifier la correspondance entre les mesures des grandeurs).

Dans un manuel de niveau CM-CS, le Piète-Sciulara-Berthoul (1962), les auteurs écartent l'enseignement des grandeurs inversement proportionnelles et proposent d'utiliser le produit en croix (qu'ils nomment règle de trois) dans un tableau à quatre cases pour calculer une quatrième proportionnelle (cf. annexe 4). L'initiative des auteurs est saluée dans la préface du manuel par un inspecteur d'académie, R. Entz :

> S'appuyant sur les connaissances acquises au CE, les auteurs font appel, dès l'étude de la multiplication, à la notion de grandeurs proportionnelles en donnant ensuite toute leur importance à des questions " escamotées " d'habitude comme le quotient exact et les valeurs unitaires. Par contre, ils évitent les difficultés que représentent parfois la réduction à l'unité par la règle de trois, grâce à un procédé qui sera plus tard systématiquement utilisé lorsque les élèves connaîtront les propriétés des proportions.

La disposition des mesures des grandeurs dans un tableau à quatre cases rappelle celle des proportions. Nous pensons que cette nouvelle façon d'écrire la règle de trois permettait aux auteurs de retrouver une méthode familière, celle des proportions, sans pour autant nécessiter la propriété 4 qui permet de la justifier, à moins qu'il s'agisse plutôt d'une idée de tableau de valeurs pour la fonction linéaire en jeu.

b) L'enseignement secondaire

En 1959-1960, les problèmes de règle de trois et l'étude des grandeurs proportionnelles disparaissent des programmes de CEG (collège d'enseignement général). De plus, il y a une nette diminution des calculs de valeurs unitaires en 6ème et les notions concernant la proportionnalité étudiées jusque-là en 4ème (fonction $y = ax + b$ et mouvement uniforme) sont repoussées en 3ème. Par contre, la notion d'échelle est introduite dans les programmes de 6ème et en 5ème. Il y a une accentuation du changement d'approche de la proportionnalité initié dans la période précédente : les relations externes entre les grandeurs proportionnelles et l'approche fonction de la proportionnalité sont favorisées. Le changement de théorie institutionnelle associé aux remaniements de 1969 semble se profiler.

Dans les manuels, les changements à venir sont perceptibles à travers la grande diversité des présentations de la proportionnalité, notamment à la fin de la période. En effet, après la réforme de 1960, même si le coefficient de proportionnalité est toujours employé, il est plus ou moins relié à une réalité physique et des points de vue rétrogrades ou avant-gardistes sont quelquefois adoptés. Précisons en comparant des manuels de la classe de 3ème où la proportionnalité est bien visible.

Les manuels Chilloux-Mallet (1963, 3ème) et Cluzel-Court (1963, 5ème – 3ème), par exemple, traitent de grandeurs proportionnelles. Après l'étude des rapports, proportions et nombres proportionnels, les auteurs proposent d'utiliser la technique des proportions pour calculer une quatrième proportionnelle. Dans ces ouvrages, le retour aux proportions apparaît comme une régression par rapport à l'évolution des techniques constatées jusque-là. Les organisations mathématiques choisies donnent à penser que pour les auteurs les rapports et proportions sont nécessairement associés aux grandeurs proportionnelles alors que les programmes proposent seulement l'étude des « rapports et proportions ». Cette conception révèle peut-être une difficulté à s'affranchir de la notion de grandeur, pour ne conserver que celle de nombre, dans la résolution de problème traitant de grandeurs. Elle est peut-être aussi le signe d'un militantisme visant à préserver une place aux grandeurs dans l'enseignement des mathématiques. A l'opposé, les collections Queysanne-Revuz et Monge-Guinchan se préservent de la difficulté d'algébrisation de la notion de grandeur (Boléa, Bosch et Gascon, 1998) et n'abordent pas les grandeurs proportionnelles. Les rapports et proportions sont respectivement associés à la fonction linéaire et aux suites numériques proportionnelles. De plus, ces ouvrages ne mentionnent pas le calcul de quatrième proportionnelle et seuls les partages proportionnels font l'objet d'exercices. Pour exemplifier la diversité de ce qui est proposé, nous donnons en annexe 4 un extrait du Queysanne-Revuz de 6ème de 1965 où le coefficient de proportionnalité introduit à propos de listes de nombres représentées dans un tableau a une place prépondérante. Ces manuels sont précurseurs, comme nous allons le voir.

2.4 1969-1977 : *la proportionnalité, relation multiplicative entre des suites numériques*

Dans les instructions de 1970 pour le CM, le terme « proportionnalité », employé pour la première fois dans les programmes du primaire, est défini comme suit :

> Lorsque l'opérateur est « multiplier par... » ou « diviser par... » la correspondance qui permet de passer d'une liste à l'autre est la proportionnalité.
>
> *Instructions de 1970 pour le CM*

Les auteurs précisent que tous les problèmes traités au moyen d'une « règle de trois » relèvent du modèle mathématique de la proportionnalité et insistent sur la nécessité de les résoudre de la même façon, en utilisant un tableau de nombres en correspondance et un opérateur. Cette approche écarte d'emblée l'étude de la proportionnalité inverse.

Dans ces mêmes programmes, le registre tableau prend de l'importance et on observe même un glissement méta-didactique puisque certaines définitions et propriétés de la proportionnalité sont énoncées en restriction au registre tableau (c'est nous qui soulignons).

> *Propriété 1* :
>
> D'une façon générale, *à la somme de deux nombres de la première colonne correspond la somme des deux nombres associés de la deuxième colonne*.
>
> Ceci peut être représenté par le tableau :

x	$(x\times a)$
y	$(y\times a)$
$x + y$	$(x\times a) + (y\times a)$

> *Propriété 2* :

m	$(m\times a)$
$m\times b$	$m\times b\times a$

> Au produit par b d'un nombre quelconque m de la 1ère colonne correspond le produit par b du nombre de la 2ème colonne associé à m.
>
> *Programmes de 1970 pour le CM*

Ces tableaux sont des tableaux de nombres ou de mesures de grandeurs, mais l'opérateur est toujours un nombre « abstrait » et jamais une valeur unitaire. Ainsi, tableau et opérateur multiplicatif permettent un fonctionnement implicite des propriétés de l'application linéaire et facilitent beaucoup l'introduction de la technique de multiplication par le coefficient. En effet, le tableau permet l'étude de suites proportionnelles de nombres et élimine l'obstacle de la grandeur-quotient. Cette présentation induit, de notre point de vue, un risque de confusion entre situation de proportionnalité et situation multiplicative d'autant plus grand que la notion de grandeur est mise à l'écart. En effet, si tous les problèmes de règle de trois peuvent se représenter sous la forme d'un tableau muni d'un opérateur « multiplier », la réciproque n'est pas forcément vraie. Ainsi, la situation multiplicative des *Colliers* (cf. annexe 2) qui correspond à une situation de division euclidienne est donnée comme illustration de la notion de proportionnalité. Ici, l'utilisation de « liste » de nombres dans le sens de « suite » de nombres semble jouer un rôle dans la confusion.

Enfin, dans le secondaire, la proportionnalité n'est pas un objet d'enseignement à part entière entre 1969 et 1977. Cette disparition provisoire s'explique selon Sokona (Sokona, 1992) par un manque de créativité didactique qui « aurait permis l'émergence d'un nouveau domaine répondant aux principes qui régissent l'enseignement des maths ». (ibidem, p. 106). Pour Comin (Comin, 2002) elle s'explique aussi par une évolution des relations entre les institutions.

Dans les manuels du primaire, l'étude de la proportionnalité se fait à partir de nombres ou de suites numériques. Peu de définitions sont données car les leçons sont présentées comme des suites d'exercices qui servent à mettre en évidence les propriétés de la proportionnalité. Le modèle de l'application linéaire est implicite. De plus, conformément aux programmes, la proportionnalité est presque systématiquement présentée dans le registre tableau et les technologies souvent énoncées en restriction au tableau. Dans certaines collections, comme *La Mathématique Contemporaine* (Thirioux et al, 1970) dont nous donnons un extrait en annexe 4, l'étude du tableau de proportionnalité supplante celle de la proportionnalité ; un glissement métadidactique induit par les programmes est à l'œuvre.

Enfin à cette époque les techniques du coefficient et du produit en croix sont abondamment utilisées dans les manuels. Elles sont quelquefois accompagnées de techniques basées sur la linéarité. Cependant, leur domaine d'application est souvent restreint au tableau.

Dans certains manuels de 6ème comme le Queysanne-Revuz (Queysanne-Revuz, 1969, 1975), certains thèmes d'étude sont liés à la proportionnalité (vitesse moyenne et débit, par exemple) mais la proportionnalité n'est pas abordée.

2.5 1977-2004 : *un retour aux situations, les suites numériques finies pour le traitement de relations entre grandeurs*

Pour le début de cette période (1977-1985), nous insisterons surtout sur les ruptures avec la période précédente. Nous développerons plus la fin de la période, depuis 1985.

a) Le début de la période (1977-1985)

Les programmes de 1977 pour l'enseignement secondaire marquent le retour de la proportionnalité à ce niveau. Ces nouveaux programmes qui se situent dans la mouvance de la contre-réforme des maths modernes marquent un retour à l'étude de situations concrètes, en particulier pour la proportionnalité qui est introduite à partir des suites finies de mesures de grandeurs proportionnelles, sans que le recours au registre tableau soit systématique.

Dans les instructions de 1980 pour le CM la relation de proportionnalité est présentée comme une relation entre deux ensembles de mesures de grandeurs issues de situations concrètes (cf. annexe 2). Les propriétés de linéarité sont mises en évidence (elles remplacent les technologies restreintes au tableau utilisées dans les programmes précédents) et la proportionnalité apparaît dans les instructions sous la rubrique « Représenter et utiliser des fonctions numériques ». Par ailleurs, au-delà de la connaissance du modèle de la fonction linéaire, les auteurs insistent sur la différenciation des situations de proportionnalité et de non-proportionnalité dans différents registres (cf. annexe 2), ce qui correspond à un nouveau type de tâches à traiter. Ces modifications marquent un retour au travail à partir de grandeurs mesurées mais ces grandeurs restent le plus souvent implicites et des nouveaux abus de langage apparaissent. En effet, les auteurs précisent que la proportionnalité peut être reconnue par le contexte avec la donnée d'un seul couple de nombres (cf. annexe 2) sans qu'il soit dit clairement que ce couple correspond à un couple de mesures de grandeurs que l'on sait proportionnelles.

Dans les manuels, les programmes de 1977 (primaire et collège) infléchissent l'importance donnée au registre tableau. En particulier, il y a moins de tableaux de nombres à quatre cases et les propriétés des suites numériques finies proportionnelles ne sont pas toujours restreintes au tableau.

b) Depuis 1985

Les programmes de l'école élémentaire et du collège sont modifiés en 1985. Au niveau de l'élémentaire de légères nuances sont apportées : la proportionnalité est associée aux fonctions et l'exemple de la règle de trois est suggéré. Au collège, la proportionnalité est un objet d'enseignement à tous les niveaux. Elle figure sous la rubrique « Organisation et gestion de données – Fonctions ». Cependant, la notion de fonction est employée comme outil implicite pour calculer une quatrième proportionnelle en 6ème et 5ème. Il n'y pas vraiment de technique institutionnelle mais les techniques du coefficient, graphique et de linéarité semblent privilégiées. En 4ème, la fonction linéaire devient un outil explicite pour la proportionnalité, le coefficient de l'application est présenté comme une « machine à multiplier ». Les mêmes techniques semblent alors privilégiées. Le programme de 3ème s'inscrit dans la continuité de celui de 4ème puisque les élèves ont à travailler sur les grandeurs-quotient et produit.

Avec ces programmes, les élèves fréquentent la notion de proportionnalité du CM à la 3ème. Ils sont progressivement familiarisés avec les ostensifs tableau et graphique. Puis, petit à petit, le graphique devient un outil de résolution. Il y a donc une approche progressive de la proportionnalité. Cependant, peu de nouveaux éléments sont introduits au fil de la scolarité, seule leur formulation évolue, ce qui peut entraîner une certaine obsolescence de la notion pour les élèves.

Dans les manuels du primaire la présentation de la proportionnalité, l'étude du calcul de quatrième proportionnelle et de ses techniques de résolution s'appuient fortement sur les propriétés de la fonction linéaire déduites de la comparaison de différentes situations. Les propriétés énoncées concernent l'existence d'un coefficient de proportionnalité, la linéarité de la fonction et les propriétés de la représentation graphique. Elles sont utilisées pour le calcul de quatrième proportionnelle. Ainsi, des éléments de l'ordre des savoirs sont explicités par les élèves à partir de l'étude de situations, puis exploités. Nous remarquons que depuis le début du siècle et pour l'enseignement primaire, c'est la première fois que les éléments mathématiques sont présentés dans cet ordre.

Au collège, l'emploi de l'expression « règle de trois » dans les programmes justifie peut-être pour certains auteurs la présentation de la proportionnalité avec des propriétés proches de la théorie de proportions (égalités de rapports dans le Julien et al., 1987) et l'emploi de techniques plutôt issues de la théorie des proportions. Enfin, le recours au tableau est moins systématique et certains auteurs suggèrent même de l'utiliser avec parcimonie (Bareil-Zehren, 1987, p. 124) :

> Tu dois savoir particulièrement : […]
>
> Recourir le cas échéant à une mise de la situation sous forme de tableau. Mais n'en use pas dans les cas simples !

Il y a un retour aux raisonnements de proportionnalité dans le langage naturel.

En 1991, l'organisation en cycles de l'enseignement primaire n'entraîne pas de modification notable pour ce qui concerne la proportionnalité. Cependant la suppression de la division par un décimal réduit probablement le champ des problèmes de proportionnalité. Dans les programmes de collège qui correspondent à cette nouvelle organisation de l'école (1996 pour la 6ème) la proportionnalité est présentée comme un « concept capital » dont l'apprentissage est fondamental et doit s'effectuer progressivement. Ce dernier point constitue une différence avec les programmes de 1985 qui n'explicitaient pas cette nécessité d'apprentissage progressif. Ainsi, en 6ème, la proportionnalité n'est pas explicitement un objet d'enseignement, mais relève plutôt d'une approche informelle et les techniques de recherche de quatrième proportionnelle préconisées sont la technique de la linéarité et celle du coefficient de proportionnalité. Les savoirs associées ne sont pas objet d'enseignement. Puis, au cycle central du collège (5ème, 4ème), la proportionnalité se retrouve dans les différentes rubriques des programmes, c'est le « fil conducteur commun à la plupart des rubriques du programme, en géométrie, en organisation de données, en calcul numérique ». Il s'agit surtout d'apprendre aux élèves à reconnaître à partir d'un tableau de nombres si une situation relève ou non du modèle proportionnel et à utiliser ce tableau pour construire le graphique associé. Remarquons tout de même que l'utilisation d'un tableau de nombres ne permet pas de conclure rigoureusement à la proportionnalité des suites de nombres puisque seules quelques valeurs sont données. D'après les programmes, l'élève devra aussi apprendre progressivement à utiliser le coefficient. Le tableau constitue un des moyens de mettre en évidence ce coefficient. Enfin, en 3ème, les situations de proportionnalité sont explicitement considérées comme relevant de la fonction linéaire ; elles servent à son introduction. La détermination d'une expression algébrique d'une fonction linéaire, sa représentation graphique et la lecture sur cette représentation de l'image d'un nombre ou d'un antécédent sont des compétences exigibles. Une nouvelle technique de résolution du calcul de quatrième proportionnelle devient exigible : la technique graphique. Ces choix contribuent à la progressivité de l'apprentissage de la notion puisque les fonctions linéaires seront introduites en 3ème pour modéliser les situations de proportionnalité.

Dans les programmes de 1995 pour l'école primaire la référence théorique implicite est toujours la fonction linéaire. La proportionnalité est envisagée sous l'angle de la fonction numérique, en particulier, elle sert de support à une familiarisation avec les fonctions (l'élève « approche la fonction numérique, en particulier dans le cadre de situations de proportionnalité »).

La proportionnalité est abordée au cycle des approfondissements à partir de l'étude de situations. Le champ des problèmes est fortement réduit car la multiplication de deux décimaux ne fait plus partie des programmes. Comme pour le début de la période, aucune méthode de résolution n'est institutionnalisée dans les programmes et les techniques graphiques, de linéarité et du coefficient peuvent être utilisées pour calculer une quatrième proportionnelle. Dans les manuels du primaire et de collège, il n'y a pas de changement significatif concernant les propriétés et techniques proposées par rapport aux programmes précédents. Cependant, les tableaux de nombres sont utilisés assez souvent dans les manuels de collège et l'étude de suites numériques proportionnelles a une place plus importante que celle des suites de mesures de grandeurs proportionnelles. Cette modification est sans doute consécutive à une étude moins importante des grandeurs au primaire.

Dans les programmes de 2002 pour l'école primaire, la proportionnalité apparaît sous la rubrique « Exploitation des données numériques », elle est essentiellement traitée à partir du cycle 3 et dans le « cadre des grandeurs » i.e. à partir de situations mettant en jeu des mesures de grandeurs. Dans la continuité des programmes précédents, l'objectif n'est pas d'étudier la proportionnalité pour elle-même mais « d'étendre la reconnaissance des problèmes qui relèvent du domaine multiplicatif » (accompagnement des programmes) en travaillant en particulier sur la reconnaissance de situation de proportionnalité de trois façons : en utilisant une connaissance sociale, à partir de la donnée de deux couples de valeurs et en ayant recours à une expérience effective (cas de la proportionnalité dans le domaine de la physique essentiellement). Ainsi, elle fonctionne comme outil implicite. Conformément à l'esprit général de ces programmes, aucun procédé expert n'est exigé, au contraire la résolution des problèmes de proportionnalité avec des procédures personnelles et adaptées aux données numériques est préconisée.

En particulier, les exemples donnés dans les accompagnements des programmes suggèrent de favoriser « le plus souvent » (document d'accompagnement des programmes : liaison cycle 3 – 6ème) les raisonnements en langage naturel (utilisation des mots « fois plus », « fois moins ») et « également le coefficient de proportionnalité, en particulier dans le cas des grandeurs de même nature » (ib.). Ces raisonnements personnels seront en particulier à mettre en œuvre dans des problèmes de pourcentage, échelle, vitesse moyenne et conversion. Concernant les problèmes de vitesse moyenne, pour quelles grandeurs considère-t-on qu'il y a proportionnalité ? Pour nous, ces problèmes ne relèvent pas vraiment du champ de la proportionnalité car dans ce cas il n'y pas de proportionnalité réelle entre la distance parcourue et la durée du trajet. Quoi dire alors à un élève qui apprend qu'une relation de proportionnalité se représente par une droite passant par l'origine ? Par ailleurs, le choix de travailler avec le coefficient de proportionnalité « en particulier » dans le cas où les grandeurs proportionnelles sont de même nature, même s'il permet d'éviter l'utilisation visible de grandeur-quotient ne facilite probablement pas la différenciation entre coefficient de proportionnalité et rapport scalaire.

Dans la continuité de ces programmes, les projets actuels pour le collège proposent d'effectuer progressivement l'étude de la proportionnalité pour elle-même, jusqu'à un travail sur l'application linéaire en 3ème. Il y a peu de différence avec les programmes précédents, cependant nous notons les points suivants. Tout d'abord, en 6ème trois raisonnements sont proposés pour la résolution de problème : « le passage par l'image de l'unité » qui correspond pour nous à la technique de réduction à l'unité, « l'utilisation d'un rapport de linéarité, exprimé si nécessaire sous la forme de quotient » (technique des rapports pour nous) et « utilisation du coefficient de proportionnalité exprimé si nécessaire sous la forme de quotient » (technique du coefficient). Cette expression éventuelle du rapport ou du coefficient sous la forme d'un quotient qui peut constituer dans certains cas une nécessité (cas de rapport rationnel non décimal par exemple) prépare aussi le terrain à un travail ultérieur en 5ème sur les « proportions » qui sont considérées dans le sens de rapport partie / tout et en 4ème sur le produit en croix. En effet, après avoir travaillé avec des mesures de grandeurs en CM et 6ème, les élèves abordent en 5ème les relations de proportionnalité entre suites numériques, notamment dans les registres tableau et graphique. Ce travail permet ensuite de manipuler des rapports de nombres et des proportions en référence au travail effectué sur les fractions. En classe de 4ème, le produit en croix est une technique institutionnelle justifiée en liaison avec l'égalité de quotients. Mais, notons qu'il est souvent utilisé comme un « truc » bien avant la 4ème car il apparaît pratique aussi bien en mathématiques, qu'en histoire géographie ou en EPS. Par ailleurs, comme dans les programmes précédents, le champ des problèmes de proportionnalité est progressivement élargi et le traitement de ces problèmes devient de plus en plus expert, jusqu'à un traitement avec l'application linéaire en 3ème qui devra permettre de « synthétiser le travail conduit sur la proportionnalité dans les classes antérieures », notamment en reliant certaines procédures aux propriétés d'homogénéité et de linéarité. Cet aspect unificateur que prend l'application linéaire en 3ème ne doit pas à notre avis pour autant être dominant car s'il nous semble important d'avoir en tête un modèle explicite, au moins, de la proportionnalité, il ne nous semble pas toujours utile et pertinent d'utiliser explicitement ce modèle, en particulier pour résoudre des problèmes de quatrième proportionnelle.

c) Conclusion pour la période 1977-2004

Depuis 1978, le retour à l'étude de situations « concrètes » induit implicitement un retour à la notion de grandeurs proportionnelles. Pour autant, on ne travaille plus vraiment sur les grandeurs proportionnelles mais plutôt sur les suites de mesures de grandeurs proportionnelles, comme on le voit en particulier avec l'usage des tableaux qui n'est possible que si l'on distingue les grandeurs en jeu mais qui conduit plus à l'utilisation de l'expression « tableau de proportionnalité » qu'à celle de

« grandeur proportionnelle ». De plus, la proportionnalité est envisagée différemment puisque la tâche de reconnaissance de situations de proportionnalité à partir de différentes registres de représentation s'est développée durant la période, avec les imprécisions possibles que nous avons soulignées pour ce qui concerne le tableau. Cette organisation permet de donner un rôle moins important au tableau de proportionnalité par rapport à la période précédente, d'accorder plus de place à la représentation graphique de la proportionnalité et aussi de ne pas institutionnaliser dans les programmes une technique particulière. Avec cette organisation, les élèves utilisent entre le CM et la 4ème/3ème (selon les programmes) des techniques relatives au calcul de quatrième proportionnelle justifiées par des propriétés de l'application linéaire, outil implicite jusqu'en 4ème/3ème (selon les programmes). Le retour aux situations et l'utilisation implicite de la théorie de l'application linéaire entraînent quelquefois la cohabitation des deux théories de référence, notamment au niveau de la génération de techniques, et ce que Comin (Comin, 2002) nomme une hétérogénéité épistémologique. Ainsi, le produit en croix qui était justifié facilement autrefois au niveau du primaire dans le cadre de la théorie des proportions est toujours utilisé à ce même niveau actuellement sans pouvoir être réellement justifié.

De plus, certains mots ou expressions ont perdu une partie de leur substance et leur utilisation dans un sens commun ne facilite peut être pas la clarification des idées des élèves. Prenons le mot « proportion ». Il est employé dans les projets actuels de programmes pour le collège avec le sens commun de rapport. Que diriez-vous à un élève qui demande le lien entre les mots « proportion » (dans le sens commun) et « proportionnalité » qui ont la même racine ? De même, le mot « rapport » a disparu progressivement des programmes, il est aujourd'hui le plus souvent remplacé par le mot « quotient ». Est-ce réellement la même chose ? Est-ce que le mot « quotient » induit l'idée de proportionnalité ? Pas vraiment. Alors faut-il s'étonner qu'on observe des confusions entre idée de proportionnalité et idée de multiple (Comin, 2000) ? Pas vraiment non plus. Quel lien faire entre « rapport de linéarité » (projet pour la 6ème), « coefficient de proportionnalité » (projet 6ème) et « proportion » (projet 5ème) ? Pourquoi ce mot « rapport » continue t-il d'être utilisé dans le cadre de la géométrie ? Parce qu'il y est question de longueurs, bien sûr. « Si on n'utilise pas les mêmes mots c'est peut être parce que Thalès et la proportionnalité ça n'a rien à voir ? », cela pourrait être une réflexion d'élève.

3. Conclusion

Au-delà de la caractérisation de cinq périodes dans l'enseignement de la proportionnalité, nous avons cherché à montrer comment la transposition didactique de cette notion a évolué progressivement d'une conception analogique vers une conception analytique, sans véritable rupture avant 1970, et le plus souvent avec des mouvements avant-gardistes et rétrogrades à chacune des époques.

L'évolution s'est réalisée sous la pression de contraintes de nature différente. Avant la période 1945-1969, la discussion nous apparaît essentiellement liée à la difficulté de faire cohabiter une utilisation rigoureuse de la théorie des proportions et un enseignement court à visée principalement professionnelle. Puis dans la période qui précède les mathématiques modernes, l'allongement de la scolarité, la modification des besoins en termes de formation et probablement l'influence naissante de Bourbaki et de Piaget entraînent une algébrisation de la proportionnalité et une avancée assez nette vers un changement de modèle. La réorganisation des mathématiques modernes conduit à l'abandon des grandeurs dans le traitement de la proportionnalité et au tout tableau, avec les dérives que nous avons mises en évidence. Puis, la prise en compte de résultats de recherche dans des champs tels que la didactique (avec notamment la notion de champs conceptuel de Vergnaud et les travaux de la COPREM) ont vraisemblablement contribué à la transposition didactique actuelle qui pourtant n'est pas encore satisfaisante.

L'étude montre une ouverture progressive du champ des techniques utilisables pour le calcul de quatrième proportionnelle en association avec une apparition plus tardive des savoirs relatifs à cette tâche. Aujourd'hui, il n'y a plus vraiment de technique institutionnelle — même si les projets de programmes pour le collège semblent renouer avec cet esprit — et on privilégie les raisonnements personnels. Cela apparaît comme une évolution positive de l'enseignement. En effet, si l'on veut que les élèves progressent dans la résolution de problèmes de proportionnalité, on peut penser à institutionnaliser des techniques. Mais, l'efficacité et la pertinence d'une technique dans le champ des problèmes de proportionnalité dépend de nombreuses variables. L'institutionnalisation précoce de techniques n'apparaît donc pas raisonnable dans la mesure où l'on veut que les élèves emploient des raisonnements de proportionnalité et développent des procédures appropriées. La seule technique qui pourrait apparaître « efficace » est la produit en croix, mais c'est un « truc » et il tue tout raisonnement de proportionnalité, ce qu'il est souhaitable de développer par ailleurs si l'on veut que la notion prenne sens. La contre-partie des choix effectués dans les programmes récents est probablement le risque d'obsolescence et de perpétuel recommencement. Par ailleurs, l'utilisation actuelle de l'application linéaire comme outil implicite puis outil explicite apparaît *a priori* favorable à l'apprentissage. Cependant, il n'est pas si facile ensuite pour les élèves de faire le lien entre proportionnalité et application linéaire. C'est aussi un des points d'achoppement de l'enseignement de la proportionnalité pour les enseignants.

L'absence d'algèbre des grandeurs (Bosch, 1994 ; Boléa, Bosch, Gascon, 1998) joue un rôle capital dans l'évolution observée depuis 1887 : elle freine une utilisation rigoureuse de la théorie des proportions, génère des discordes au sein de la communauté des inspecteurs et des auteurs et initie ainsi les premières modifications. Cela aboutit, au fil des changements de programmes, et surtout avec la réforme des mathématiques modernes, à la disparition d'un véritable travail sur les grandeurs (hors travail sur les mesures) dans l'enseignement obligatoire.

Pour conclure, nous n'apporterons pas de réponse immédiate aux difficultés d'enseignement de la proportionnalité, mais nous espérons avoir nourrit la réflexion des enseignants sur les origines de ces difficultés en montrant comment l'absence actuelle de travail sur les grandeurs contribue à ces difficultés. D'abord, par les glissements subreptices que cela permet, comme nous l'avons vu à plusieurs reprises. Ensuite car, associée à la perte de repères concernant les théories mathématiques et le vocabulaire de la proportionnalité, l'absence d'idées claires sur les grandeurs va favoriser une hétérogénéité épistémologique (Comin, 2002) qui risque d'entraîner des conceptions erronées.

Références

Boisnard, Houdebine, Julo, Kerboeuf, Merri, 1994, *La proportionnalité et ses problèmes*, Ed. Hachette Education

Bolea, Bosch, Gascon, 1998, Le caractère problématique du processus d'algébrisation, Proportionnalité et grandeurs dans l'enseignement obligatoire, *Actes de la 9ème École d'été de didactique des mathématiques,* pp. 153-159, Ed. La Pensée Sauvage

Bosch, 1994, La dimension ostensiva en la activdad matmatica. El caso de la proportionalidad. Thèse de doctorat, Universitat Autonoma de Barcelona.

Chevallard, 1999, Pratiques enseignantes en théories anthropologiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques 19.2,*pp. 221-266, Ed. La Pensée Sauvage

Comin, 2000, Proportionnalité et fonction linéaire. Caractère, causes et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoire

Comin, 2002, L'enseignement de la proportionnalité à l'école et au collège, *Recherche en didactique des mathématiques 22 2-3*, pp. 135-181, Ed. La Pensée Sauvage

Comin, 2003, Des souris et des graines, *Grand N n°72,* pp. 41-73, Ed. IREM de Grenoble

Dahan-Dalmedico, Peiffer, 1995, Une histoire des mathématiques, routes et dédales, Ed. Point Sciences

Douady, 1986, Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en Didactique des Mathématiques 7.2,* pp. 5-31, Ed. La Pensée Sauvage

Duval, 1995, *Sémiosis et pensée humaine : registres sémiotiques et apprentissages intellectuels,* Ed. Peter Lang

Hersant, 2001, *Interactions didactiques et pratiques d'enseignement, le cas de la proportionnalité au collège*, Thèse de l'Université Paris 7.

Pluvinage, Dupuis, 1981, La proportionnalité et son utilisation, *Recherches en Didactique des Mathématiques 2.2,* pp. 165-212, Ed. La Pensée Sauvage

Sokona, 1989, Aspects analogiques et aspects analytiques de la proportionnalité dans une situation de formulation, *Petit x 19*, pp. 5-27

Sokona, 1992, *A propos de la proportionnalité : avatars d'une situation didactique dans sa transmission à un enseignant et son insertion dans un curriculum existant*, Thèse de doctorat de l'université de Grenoble 1

Vergnaud, 1981, *L'enfant, la mathématique et la réalité*, Peter Lang

Vergnaud, 1990, La théorie des champs conceptuels, *recherches en didactique des mathématiques 10 2-3,* pp. 133-170

Annexe 1

Savoirs relatifs au calcul de quatrième proportionnelle

Nous avons répertorié dans le tableau suivant les savoirs relatifs à la tâche « calcul de quatrième proportionnelle » avec leur déclinaison en fonction de la théorie de référence et des registres de représentation. Pour des raisons de commodité nous exprimons ces propriétés dans le cadre (Douady, 1986) des suites numériques finies, mais nous ne perdons pas de vue que la proportionnalité est d'abord une relation qui s'exprime dans le cadre des grandeurs.

Théorie des proportions (rapports, proportions, extrêmes, moyens)	**Théorie de l'application linéaire** (application, fonction, image, antécédents)
Soit I *un sous-ensemble fini de* **N**, *les suites numériques* $(u_i)_{i\in \mathbf{N}}$ *et* $(v_i)_{i\in \mathbf{N}}$ *de termes non nuls sont proportionnelles, si l'une des propriétés suivantes est vérifiée :*	*f est une fonction définie de* **R** *dans* **R**. *Soit* I *un sous-ensemble fini de* **N**, *les suites numériques* $(u_i)_{i\in \mathbf{N}}$ *et* $(v_i)_{i\in \mathbf{N}}$ *sont proportionnelles si l'une des conditions suivante est vérifiée :*
1. Pour tout i et j de I, $\frac{u_i}{u_j}=\frac{v_i}{v_j}$, (les suites varient dans le même rapport)	
2. a) pour tout i de I, si u_i est multiplié par 2, 3, 4... λ (λ réel), v_i est multiplié par 2, 3, 4… λ. 2. b) pour tous i, j, k de I, si $u_i = u_j + u_k$ alors $v_i = v_j + v_k$.	8. a) pour tout entier i *et* j de I si le réel λ est tel que $u_i = \lambda\, u_j$ alors $v_i = f(u_i) = \lambda\, f(u_j) = \lambda\, u_j$ 8. b) pour tout entier i, j, k de I si $u_i = u_j + u_k$ alors $v_i = f(u_i) = f(u_j) + f(u_k) = v_j + v_k$
3. Pour tout i et j de I, $u_i v_j = v_i u_j$ (le produit des extrêmes est égal au produit des moyens)	
4. Pour tout i et j de I, $\frac{u_i}{v_i}=\frac{u_j}{v_j}$	
5. Pour tout i, j, k de I, si λ et μ sont des réels non tous les deux nuls tels que $u_i = \lambda u_j + \mu u_k$ alors $\frac{u_i}{v_i}=\frac{\lambda u_j+\mu u_k}{\lambda v_j+\mu v_k}$	8. Pour tout entier i, j, k de I si les réels λ et μ sont tels que $u_i = \lambda u_j + \mu u_k$ alors $v_i = f(u_i) = \lambda\, f(u_j) + \mu\, f(u_k) = \lambda v_j + \mu\, v_k$ 8*. Toute combinaison linéaire des deux colonnes du tableau est une nouvelle colonne du tableau
6. $\frac{u_i}{v_i}$ est un coefficient de proportionnalité, c'est le nombre par lequel il faut multiplier u_i pour obtenir v_i.	7. Pour tout i de I, v_i est l'image de u_i par une application linéaire f, c'est-à-dire : il existe un réel non nul a tel que pour tout entier $i \in$ N, $v_i = a\ u_i$. 7*. il existe un opérateur multiplicatif qui permet de passer d'une ligne à l'autre du tableau
	9. Dans un repère l'ensemble des points $(u_i, v_i)_{i\in \mathbf{I}}$ est sur une droite passant par l'origine du repère.

Annexe 2

Extraits des textes officiels [10]

1. Annexe F définissant les programmes de 1887

CM : Règle de trois ; règle d'intérêt simple.
CS : Méthode de réduction à l'unité appliquée à la résolution de problèmes d'intérêt, d'escompte de partage, de moyennes, etc.

2. Programmes de 1923 pour le CM

VII — *Calcul. Arithmétique. Géométrie*.
Les nombres complexes : le temps (heures, minutes, secondes) ; la circonférence (degrés, minutes, secondes). Calcul de la longueur de la circonférence.
Système de mesures légales à bases 10, 100, 1000. Multiples et sous-multiples.
Calcul des surfaces : rectangle, carré, triangle, cercle.
Calcul des volumes : prisme droit à base rectangulaire, cube, cylindre. Problèmes sur des données usuelles. Règle de trois simple. Règle d'intérêt simple.

3. Programmes de 1923 pour le CS

VII - *Calcul. Arithmétique. Géométrie*.
1 — Calcul et arithmétique
Calcul de certaines surfaces (parallélogramme, trapèze, polygone, secteur de cercle, surface latérale du cylindre, du cône). Calcul de la surface de la sphère.
Calcul de certains volumes (prisme droit à base polygonale, cône, sphère)
Problèmes : Solutions raisonnées des problèmes sur l'intérêt, l'escompte, les partages, les moyennes, les densités.
Emploi progressif des lettres, des représentations graphiques et de solutions algébriques du 1er degré.
2 — Géométrie : échelle et plan

4. Répartition officielle de Gay et Mortreux (1924) pour le CM et le CS

	Cours Moyen deuxième année
Novembre	Problèmes : 1° sur la multiplication : facture, prix d'achat, prix de vente
Décembre	Problèmes :1° sur la division : moyenne, valeur de l'unité, quantité
Janvier	Fractions […]
	Opérations sur les nombres entiers et décimaux […]
	Problèmes: 1° sur les quatre opérations […]
Février	Fractions […]
	Problèmes : […]
Mars	Fractions : division des fractions (à partir des fractions décimales).
	Problèmes : 1° sur la multiplication et la division des fractions ; prendre une fraction d'un nombre ; fraction connue ; 2° sur la durée et le mouvement uniforme ; 3° la longueur de la circonférence et la surface du cercle.
Avril	Règle de trois simple directe et inverse.
	Problèmes : 1° sur la règle de trois […]
Mai	Règle de trois. Tant pour cent.
	Problèmes : sur la règle de trois et le tant pour cent. Prendre le tant pour cent. Tant du tant pour cent.

10 Pour ne pas trop allonger l'article, nous indiquons ici les extraits principaux des programmes, pour plus de détails voir Hersant, 2001, chapitre 1 et annexe 1.

Juin	Règle d'intérêt simple. Calcul de l'intérêt, du taux. Problèmes : sur le calcul de l'intérêt et du taux : intérêt en une ou plusieurs années, en un ou plusieurs mois, en un ou plusieurs jours; le taux.
	Cours Supérieur première année
Novembre	Problèmes : 1° sur les quatre opérations : recette et dépense. Vente ou achat à la douzaine, au cent, au mille.
Décembre	Problèmes : 1° sur les quatre opérations. Partages ; parts différentes ; parts multiples
Avril	Règle de trois. Partages proportionnels. Tant pour cent. Problèmes : 1° Partages proportionnels. 2° Prendre le tant pour cent, taux, quantité soumise au pourcentage [...] 4° sur le mouvement uniforme
Mai	Problèmes : 2° densité Règle d'intérêt. Problèmes : Intérêts en une ou plusieurs années, un ou plusieurs mois, un ou plusieurs jours ; calcul du taux, du capital.
Juin	Règle de trois : Escompte, caisse d'épargne, rentes sur l'État, mélanges et alliages. Problèmes : Calcul de l'escompte commercial, du taux, de l'échéance d'un billet, de sa valeur nominale. Les moyennes.
	Cours supérieur deuxième année
Janvier	Géométrie: […] Échelle et plan
Avril	Compléments : Partages inversement proportionnels. Règle de société et répartition des impôts. Quantité soumise au pourcentage.
Mai	Compléments : […] 2° sur le calcul du capital primitif.
Juin	Compléments : Calcul de l'intérêt à la caisse d'épargne. Calcul du montant d'un titre de rente, du prix de la rente, du cous, du taux. Mélanges et alliages. Le titre d'un alliage.

5. Programmes de 1938 pour le Cours Supérieur, 1ère année

Arithmétique et dessin géométrique

Expression d'un poids spécifique, d'une vitesse par un quotient. Exemples analogues de quotient rencontrés couramment. Calculer une fraction d'une grandeur mesurée par un nombre. Problème inverse. Pourcentage. Expressions diverses (par ex : 6% ; 6/100 ; 0,006). Calcul sur les pourcentages. Application des pourcentages et des fractions à des problèmes de la vie courante et à l'étude de l'intérêt simple.

6. Programmes de 1938 pour le Cours Supérieur, 2ème année

Arithmétique et dessin géométrique

Relations entre les unités de poids et de volume. Poids spécifique en g par cm^3, en kg par dm^3 ou litre, en tonne par m^3. Volume spécifique. Monnaies : prix unitaire d'une marchandise, et éventuellement quantité de marchandise correspondant à l'unité de monnaie. Problèmes simples sur les changes en utilisant les deux quotients inverses des valeurs des monnaies. Passage des grades aux degrés et inversement, on pourra prendre comme intermédiaire les angles exprimés en degrés et en dixièmes et centièmes de degrés. Mesure du temps [...] Vitesse dans le cas d'un mouvement uniforme. Expression d'une vitesse en km par heure, mètres par seconde, cm par seconde, relations entre elles. Temps nécessaire au parcours de l'unité de distance. Intérêts simples pour des durées de placement de moins d'un an. Escompte. Rentes.

7. Programmes de 1947 pour le CM (suite de l'extrait)

Pourcentages. — *Les pourcentages sont considérés comme des multiplicateurs abstraits, c'est-à-dire indépendants du choix de l'unité de la grandeur considérée. Prendre 80 p. 100 d'une grandeur, c'est partager cette grandeur en 100 parties égales et prendre 80 de ces parties. Il suffit pour cela de multiplier la mesure de la grandeur par 0,80. On met ainsi en évidence la recherche inverse qui se fait en divisant par 0,80 :*

Poids de farine = poids de blé × 0,80;
Poids de blé = poids de farine : 0,80.

Les pourcentages se rencontrent dans des problèmes de proportions concernant des mélanges, des transformations, etc. Par exemple : azote dans l'air, savon frais et savon sec, poids de farine et poids de pain, acompte à verser, part de l'État et de la commune dans l'impôt, intérêt annuel d'un capital.

Fractions. — *Les fractions, comme les pourcentages, sont considérées comme des multiplicateurs abstraits. Prendre les quatre-cinquièmes d'une grandeur, c'est partager cette grandeur en cinq parties égales et prendre quatre de ces parties (il est équivalent d'en prendre 80 p. 100). Il suffit pour cela de diviser la mesure de la grandeur par 5 et de multiplier le quotient obtenu par 4. On retrouve ainsi le mode de calcul de la règle de trois; par exemple :*

$$\text{poids de farine} = \begin{cases} \text{poids de blé} \times \dfrac{4}{5}, \\ \dfrac{\text{poids de blé} \times 4}{5}. \end{cases}$$

8. Programmes de 1970 pour le CM : la situation des colliers

5.2. Utilisation de tableaux de nombres en correspondance pour l'étude de situations concrètes.

Lorsque l'opérateur est « multiplier par . . . » ou « diviser par . . . » la correspondance qui permet de passer d'une liste à l'autre est la *proportionnalité*.
La plupart des problèmes traités au cours moyen mettent en œuvre des thèmes dans lesquels la proportionnalité doit être explicitée.
D'une façon générale, tous les problèmes traités au moyen de la « règle de trois » relèvent du modèle mathématique précédent. Il est essentiel de savoir qu'il s'agit d'un seul et même problème, qu'il convient d'expliquer en termes nouveaux.

Exemple 1 : **Pour une fête, des enfants font des colliers composés tous du même nombre de perles.**
Un enfant a utilisé 45 perles pour faire 3 colliers.

Le tableau ci-contre permet de répondre aux deux questions :
— Combien faut-il de perles pour fabriquer 7 colliers ?
— Combien de colliers peut-on fabriquer avec 135 perles ?

Colliers	Perles
3	45
7	
	135

9. Programmes de 1980 pour le CM

5.2 Savoir […] représenter ces situations (situations aussi variées que possibles), sous différentes formes (tableaux de nombres, graphiques, etc.) ou à l'inverse, interpréter et exploiter de telles représentions, et pour ce faire identifier les couples d'éléments associés, la fonction numérique est ainsi perçue comme une famille de tels couples.

5.3 Savoir reconnaître, organiser et traiter des situations relevant de fonctions numériques, celles citées ci dessus (en particulier, celles qui relèvent de la proportionnalité) et d'autres. […]

5.3.2 O*n s'attachera à mettre en évidence et à utiliser la proportionnalité,* propriété caractéristique des fonctions *n Æ n ¥ a, a* étant un naturel ou un décimal, voire une fraction simple.

5.3.3 *Il importe toutefois que les élèves sachent reconnaître l'existence de la proportionnalité,* et ceci bien qu'en général un seul couple de nombres leur soit fourni. *Par exemple : « 2 cm sur la carte représentent 2,5 km sur le terrain. Quelle est la distance qui, sur le terrain, correspond à 6 cm sur la carte ? »*

[…] c'est le plus souvent l'analyse de la situation qui permet à l'élève de reconnaître l'existence ou non de la proportionnalité.

10. Instructions de 1980 pour le CM

De nombreuses situations rencontrées en classe ou hors de la classe, et en particulier au cours des activités d'éveil, conduisent à constater et à expliciter une correspondance entre deux ensembles de données numériques (par exemple : achat d'articles à l'unité, à la longueur, au poids, etc. ; masse et volume ; compteur de pompe à essence ; tarif d'une course en taxi ; affranchissement postal ; etc.). L'analyse de telles situations et la résolution des problèmes qu'elles posent [...] peuvent être conduites grâce à l'utilisation de représentation et/ou de propriétés de certaines fonctions numériques.

Annexe 3

Analyse des manuels

Cette grille d'analyse des manuels est obtenue de la façon suivante.
La *théorie de référence* est la théorie mathématique utilisée implicitement ou explicitement dans le manuel. Pour la proportionnalité, deux théories peuvent être employées : la théorie des proportions, notée P, ou la théorie de l'application linéaire, notée A. Si la théorie est expliquée dans le manuel, des propriétés de cette théorie sont données, et elle notée PE ou AE dans le tableau. Si elle est implicite elle est notée PI ou AI. Les deux théories peuvent être utilisées dans le même manuel, dans ce cas, nous l'indiquons.
Nous indiquons dans la colonne « *proportionnalité entre* » si les propriétés et définitions données dans le manuel le sont pour des grandeurs proportionnelles, des suites de nombres proportionnelles i.e. des suites de mesures de grandeurs proportionnelles ou encore des nombres proportionnels qui ne sont pas des mesures de grandeurs proportionnelles.
La propriété utilisée pour définir la proportionnalité est indiquée dans la colonne « *définition issue de* ». Les propriétés énoncées au sujet de la proportionnalité dans le manuel sont indiquées dans la colonne « *propriétés énoncées* ». Enfin, les techniques proposées dans le manuel sont indiquées dans la dernière colonne, avec les abréviations suivantes :

— τ_u : technique de réduction à l'unité
— τ_r : technique de multiplication par un rapport
— τ_p : technique des proportions
— $\tau_x(\tau_x^*)$: technique du produit en croix (dans le registre tableau)
— $\tau_c(\tau_c^*)$: technique du coefficient (dans le registre tableau)
— $\tau_l(\tau_l^*)$: technique utilisant des propriétés de linéarité (dans le registre tableau)
— τ_g : technique graphique

Date	Niveau	Auteurs	Théorie de référence	Proportionnalité entre	Définition issue de	Propriétés énoncées	Techniques proposées
Avant 1887							
1884	CM CEP	ED BELIN	PI	Grandeurs	5		τ_u
1886	CM	PLUSIEURS PROFS	PE	Grandeurs	5		$\tau_u\tau_r$
Première période 1887-1923							
1904	CM CEP	BARREAU LALARGE	PI	Grandeurs			τ_u
1904	CM	FF	PE	Grandeurs	5		τ_u
1920	CM	LEMOINE	PI	Grandeurs	5		τ_u
	CS	FEC	PE	Grandeurs	5		$\tau_u\ \tau_r\ \tau_p$
1903	CS	LEYSENNE	PE	Grandeurs	5		$\tau_u\ \tau_r$
1909	CS	BEHR VAREIL	PE	Grandeurs	3	1 5	$\tau_p\ \tau_r$

Seconde période 1923- 1945							
1923	CE CM	LEMOINE	PI	Grandeurs			τ_u
1923	CM CEP	LEMOINE	PI	Grandeurs	5		τ_u
1931	CEP CS	MARTIN REAU	PI	Grandeurs	5	1	τ_u
1933	CEP CS	MORTREUX	PI	Grandeurs	5		τ_u τ_c τ_r
1923	CS	LEMOINE	PI	Grandeurs	5		τ_u
1932	CS	ROYER COURT	PE	Grandeurs	5	3	τ_u τ_p τ_r
1935	CM CEP	CROISILLE	PI	Grandeurs	5		τ_u
1943	EPS	PLUGIBET	PI	Grandeurs	5		τ_u τ_c
1939	EPS/ 5-4-3	FOULON	PE	Grandeurs	3	1 5 9	τ_g
Troisième période 1945-1969							
1946	CM CS 7	MARIJON MASSERON DELAUNAY	PI	Grandeurs	5		τ_u
1950	CM2 CS	CROISILLE	PI	Grandeurs	5		τ_u
1950	CM	DRAUX	PI	Grandeurs			τ_u
1959	CM	DS (Commission d'instituteurs)	PE	Grandeurs	5		τ_u τ_r
1962	CM CS 8E 7E	PIETE SCIULARA BERTHOUL	PI	Grandeurs	5		τ_x* τ_r
1965	CM	ADAM - GOUZOU	PI	Grandeurs			τ_u τ_c
1969	CM2	NADAUD BENHAIM	PI	Grandeurs			τ_u τ_r
1958	6 CC	MARVILET		Grandeurs			
1959	CC BE	MARIJON PEQUINIOT	PE	Grandeurs	6 3	5 4 7 9	τ_p τ_c τ_g
1965	6	HUISMAN ITARD	AI	Grandeurs	4		τ_c
1965	6	QUEYSANNE REVUZ	AI	Suites numériques	4	7	τ_c τ_g
1963	6	MONGE GUINCHAN	AI	Suites numériques	4		τ_c
1963	5-4-3	CLUZEL COURT	PE	Grandeurs	5	1 2 4	τ_p
1963	3	CHILLOUX MALLET	PE	Grandeurs	4	1 6 7	τ_p
1960	3	LEBOSSE HEMRY	PE	Grandeurs	5	4 6	τ_c τ_g
1968	3	QUEYSANNE REVUZ	AE				
1968	3	MONGE GUINCHAN	AE		4		
Quatrième période 1969-1977							
1969	6EME	QUEYSANNE REVUZ	AE				

1977	6EME	QUEYSANNE REVUZ	AE				
1973	CM2	ADAM NICOLAS GOUZOU	AI	Nombres	7*	5* 8*	τ_l *
1970	CM	DENISE THEVENON JOLY	AI	Grandeurs Nombres		5* 7*	τ_l * τ_c*
1971	CM	GOERGLER ANDRIEU VIALA	AI	Nombres		7* 5* 8*	τ_l * τ_c*
1977	CM2	GOERGLER ANDRIEU VIALA	AI	Nombres		7* 5* 8*9*	τ_l * τ_c*
1970	CM	THIRIOUX GASPARI MIREBEAU LEYRAT	AI	Nombres		5* 7* 8* 2*	τ_c*
1976	CM	THIRIOUX GASPARI MIREBEAU LEYRAT	AI	Nombres		5* 7* 8* 2*	τ_l * τ_c* τ_x*
Cinquième période 1977-2000							
1980	CM	THIRIOUX GASPARI MIREBEAU BORGOMANO	AI	Nombres			τ_c*
1984	CM	DENISE THEVENON	AI	Nombres		7* 5* 8*	τ_l * τ_c*
1988	CM	BIA MARECHAL CLAVIER	AE	Suites numériques		8 7 9	τ_l * τ_c* τ_g
1996	CM	BIA MARECHAL PELTIER	PI	Suites numériques		7* 8* 9	τ_l * τ_c* τ_g
1977	6	MAUGUIN	AI	Suites numériques	7	8	τ_c τ_u τ_l τ_g
1981	6	THIRIOUX DOMAIN L ET S SANCHEZ	AI	Nombres	7*	5* 8* 2*	τ_l * τ_c* τ_x*
1987	5	JULIEN PENNINCKX	AI/PI	Suites numériques		1 3 4 7	τ_l*$\tau_c$$\tau_u$$\tau_p$$\tau_x$*
1987	5	BAREIL ZEHREN	AI	Suites numériques		8 7 9	τ_l τ_c τ_g τ_u
1989	3	DELORD TERRACHER VINRICH	AE	Grandeurs		7	τ_c τ_l
1990	6	DELORD TERRACHER VINRICH	AI/PI	Grandeurs		1 5* 7* 9	τ_c* τ_l * τ_g
1991	5	DELORD TERRACHER VINRICH	AI/PI	Grandeurs		5* 7* 9	τ_l * τ_c* τ_x*
1992	4	DELORD TERRACHER VINRICH	AE	Suites numériques		7 8 9	τ_c τ_g
1993	3	DELORD TERRACHER VINRICH	AE	Suites numériques		7 9	τ_c τ_g τ_l
1996	6	DELORD VINRICH	AI	Nombres		5* 7* 9	τ_c* τ_g* τ_l *
1997	5	DELORD VINRICH	AI/PI	Nombres		5* 7* 9	τ_x* τ_c
1998	4	DELORD VINRICH	AI/PI	Nombres		1 7* 9	τ_c*$\tau_g$$\tau_l$ * τ_p

Annexe 4

Extraits longs de manuels

Reprenons le Problème II (page 98). Le commerçant a établi un tableau de vente. Comme la réponse est obtenue en effectuant $\frac{3 \times 20}{15}$, il cherche

Longueur en m	*Prix en F*
1	5
2	10
3	15
4	20
5	25
6	30
7	35
8	40
9	45

Longueur en m	*Prix en F*
3	15
?	20

Longueur en m	*Prix en F*
3	17
7,5	?

un moyen rapide pour placer convenablement les 3 nombres : 3, 20, 15 qui sont soulignés dans le tableau de vente.

Dans un tableau réduit, il inscrit ces nombres à leur place. A l'endroit où doit se trouver la réponse, il met un point d'interrogation. Il trace une croix et il remarque que :

Pour trouver la réponse, il faut multiplier les 2 nombres connus d'une branche de la croix et diviser le produit obtenu par le nombre connu isolé de l'autre branche.

$$? = \frac{3 \times 20}{15}.$$

Avec ce procédé, sans tableau de vente, il peut ainsi trouver immédiatement les calculs qu'il faut effectuer pour trouver la réponse du Problème III (page 98).

$$? = \frac{17 \times 7,5}{3} = 42,5.$$

Ce procédé est appelé règle de trois.

Lorsqu'on connaît 3 nombres de 2 lignes d'un tableau de grandeurs proportionnelles, on peut calculer le quatrième par la règle de trois.

1. — Piète-Sciulara-Berthoul, CM CS 8ème et 7ème , 1962

2. — Queyssanne Revuz, 6ème, 1965

41. Proportionnalité.

Il est possible de *schématiser* simplement les situations rencontrées dans les exemples précédents :

a) Dans chaque cas intervenaient deux listes de nombres (par exemple : une liste de poids de blé et une liste de poids de farine).

A chaque nombre de la 1re liste correspondait exactement un nombre de la deuxième liste (par exemple : à un poids de blé correspondait le poids de la farine extraite de ce blé).

Ceci peut se représenter dans un tableau tel que le suivant :

x	2	5	3,5	27	0,4
x'	6	15	10,5	81	1,2

Dans la 1re ligne figurent les nombres de la 1re liste, dans la 2e ligne ceux de la 2e liste. *Chaque nombre de la 2e ligne est dans la même colonne que le nombre de la 1re ligne auquel il correspond.*

b) Ajoutons une 3e ligne et pour chaque colonne, écrivons dans la case de la 3e ligne le quotient du nombre de la 2e ligne par le nombre de la 1re ligne.

x	2	5	3,5	27	0,4
x'	6	15	10,5	81	1,2
$\frac{x'}{x}$	3	3	3	3	3

Pour le tableau ci-dessus, comme pour ceux des pages précédentes, on trouve le même nombre dans toutes les cases de la 3e ligne. *On dit alors que les nombres de la 2e ligne sont proportionnels à ceux de la 1re, ou qu'il y a proportionnalité entre les nombres de la 2e ligne et les nombres correspondants de la 1re.*

La valeur constante k du quotient est appelée **coefficient de proportionnalité, ou rapport** d'un nombre de la 2e ligne au nombre correspondant de la 1re.

Lorsque le quotient $\frac{x'}{x}$ d'un nombre x' de la 2^e ligne par le nombre correspondant x de la 1re est constant, le quotient $\frac{x}{x'}$ l'est aussi. Dans le tableau ci-dessus, on a $\frac{x}{x'} = \frac{1}{3}$.

La proportionnalité des nombres d'une liste à ceux d'une autre liste est une propriété symétrique. Mais lorsque l'on parle du rapport, il faut toujours préciser : rapport du nombre de telle liste au nombre correspondant de telle autre liste.

Si l'on sait qu'il y a proportionnalité entre la liste des nombres x' et celle des nombres x, on peut résoudre trois problèmes :

Problème 1. Connaissant un nombre x de la 1re liste, et le rapport k de la 2^e liste à la 1re, trouvez le nombre x' de la 2^e liste qui correspond à x. La réponse est donnée par :

$$\boxed{x' = k\,x}$$

Problème 2. Connaissant un nombre x' de la 2^e liste, et le rapport k de la 2^e liste à la 1re, trouvez le nombre x de la 1re liste qui correspond à x'. La réponse est donnée par :

$$\boxed{x = \frac{1}{k}\,x'}$$

Problème 3. Connaissant un nombre x de la 1re liste et le nombre x' de la 2^e liste qui correspond à x, trouvez le rapport k de la 2^e liste à la 1re. La réponse est donnée par :

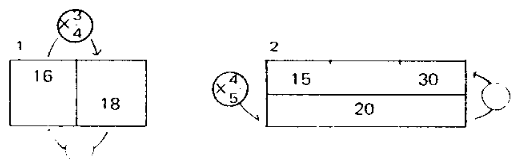
$$\boxed{k = \frac{x'}{x}}$$

Nous allons appliquer maintenant cette notion de proportionnalité à deux problèmes : pourcentage et intérêt simple.

3. — Thirioux et al., La mathématique contemporaine, CM, 1970

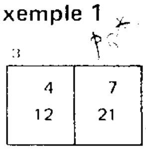
126 PROPORTIONNALITÉ I

I Tableau de proportionnalité

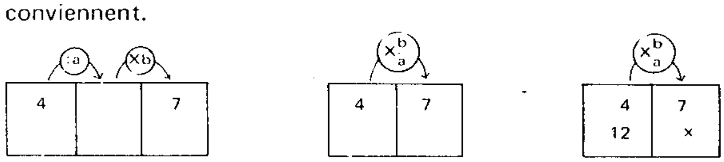


Complète les tableaux ci-dessus.
Les tableaux où les nombres se correspondent deux à deux par un opérateur fractionnaire sont appelés des tableaux de proportionnalité. (un opérateur fractionnaire s'écrit $\times \frac{a}{b}$ a pouvant être égal à 1, b pouvant être égal à 1).
Nous allons chercher une règle pour savoir si un tableau est ou non un tableau de proportionnalité.

Exemple 1

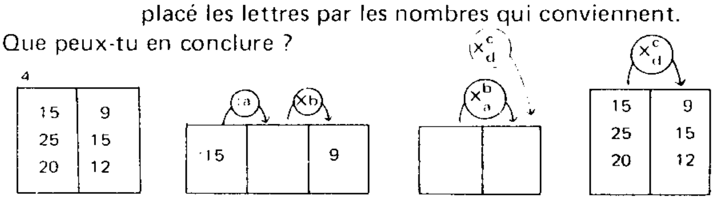


Si ce tableau est un tableau de proportionnalité, il existe un opérateur fractionnaire qui permet de passer de la colonne de gauche à la colonne de droite.
S'il existe, cet opérateur fait correspondre 7 à 4.
Complète les tableaux et remplace les lettres par les nombres qui conviennent.



Que peux-tu en conclure ? (Le tableau 3 est un tableau de proportionnalité et l'opérateur fractionnaire est $\times \frac{7}{4}$)

Exemple 2. Dis si le tableau 4 est un tableau de proportionnalité après avoir complété les tableaux suivants et remplacé les lettres par les nombres qui conviennent.
Que peux-tu en conclure ?



Exemple 3.

5

9	6
12	9
18	12

Fais comme ci-dessus avec le tableau 5. Que peux-tu conclure ? (on passe de 9 à 6 par l'opérateur fractionnaire $\times \frac{2}{3}$, mais cet opérateur transforme 12 en 8 et non en 9; le tableau 5 n'est pas un tableau de proportionnalité).

Règle : Pour savoir si un tableau est ou non un tableau de proportionnalité, on prend deux nombres correspondants et on cherche l'opérateur fractionnaire qui les associe (ne pas oublier de simplifier la fraction). On vérifie ensuite que cet opérateur fractionnaire fait correspondre les autres nombres deux à deux.

II Propriétés des tableaux de proportionnalité

Complète le tableau ci-dessous à gauche. Que peux-tu dire du correspondant de la somme (16+8)? (C'est la somme du correspondant de 16 et du correspondant de 8)

$\times \frac{3}{4}$

6

8	
16	
8+16	

x	y
u	v
x+u	y+v

Vérifie sur d'autres exemples que le correspondant par tout opérateur fractionnaire de la somme de deux nombres est la somme des correspondants des deux nombres par ce même opérateur fractionnaire (si tous ces correspondants existent).
Complète le tableau ci-dessous. Que peux-tu dire du correspondant de (2X10) ? de (3X10) ?

$\times \frac{3}{5}$

7

10	
2 x 10	
3 x 10	

x	y
ax	ay

Vérifie sur d'autres exemples que : le correspondant par tout opérateur fractionnaire du produit d'un nombre x du tableau par un nombre entier a est le produit du correspondant de ce nombre x par ce même nombre entier a

Tableau de deux couples.

8

21	28
6	8

Vérifie que le tableau 8 est un tableau de proportionnalité. Comment obtiens-tu le tableau 9 à partir du tableau 8 ? Vérifie que le tableau 9 est un tableau de proportionnalité.

9

21	28
6	8

Vérifie sur d'autres exemples que si le tableau $\begin{array}{c|c} a & b \\ c & d \end{array}$ est un tableau de proportionnalité alors le tableau $\begin{array}{cc} a & b \\ \hline c & d \end{array}$ est aussi un tableau de proportionnalité.

Dans les tableaux de 4 nombres nous omettrons le trait partageant les colonnes ou les lignes. Pour tous les tableaux de 4 nombres de la leçon, calcule aXd, et bXc. Conclus. (aXd = bXc).

127 PROPORTIONNALITÉ II

I Echanges

Jean et Pierre décident d'échanger des billes, mais comme les billes de Jean sont de meilleure qualité, l'échange se fera selon la règle :

4 billes de Jean contre 7 billes de Pierre

Complète le tableau :

Jean donne	billes	4	8	12	16
Pierre donne	billes	7	14		

Que peux-tu dire du tableau ci-dessus ? (C'est un tableau de proportionnalité, l'opérateur fractionnaire étant $\times \frac{7}{4}$ du nombre des billes de Jean vers le nombre des billes de Pierre)

Complète le tableau ci-dessous.

$\times \frac{7}{4}$

36	
72	
	84

Réponds aux questions suivantes :

Combien Pierre donnera-t-il pour 36 billes de Jean ?

Combien Pierre donnera-t-il pour 72 billes de Jean ?

Combien Jean donnera-t-il pour 84 billes de Pierre?

II Proportions

Le directeur dit : "Cette année, trois élèves sur cinq sont des filles."

Quels renseignements te donne cette phrase ? Peux-tu dire combien il y a d'élèves à l'école ?

Peux-tu dire s'il y a plus de filles que de garçons ?

La phrase du directeur signifie que les élèves de l'école peuvent être partagés en groupes de 5 élèves comptant 3 filles et 2 garçons chacun.

Complète le tableau.

nombre d'élèves de l'école :	50	100	250	500
nombre de filles :				

Que peux-tu dire de ce tableau ? (C'est un tableau de proportionnalité, l'opérateur fractionnaire étant, $\times \frac{3}{5}$ du nombre d'élèves vers le nombre de filles).

Réponds aux questions suivantes :

$\times \frac{3}{5}$

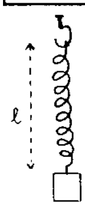
85 290	363

Quel est le nombre des filles si le nombre d'enfants de l'école est 85 ? 290 ?
Quel est le nombre d'élèves si le nombre de filles est 363 ?

Remarques. On dit que la proportion des filles est de $\frac{3}{5}$. La proportion des garçons est de $\frac{2}{5}$.

Le mot proportion est utilisé dans le sens qu'il a en langage courant.
Quand on dit que la proportion des femmes parmi le personnel d'un bureau est de $\frac{3}{5}$ il s'agit souvent d'une approximation.

III Tableaux de nombres



Exemple 1. On a réalisé le montage schématisé à gauche.
A un crochet on a fixé un ressort (dans l'exemple un ressort de stylobille bic) et au bout de ce ressort un dispositif pour accrocher des masses marquées. Nous mesurerons la longueur du ressort entre le point de fixation et le point d'accrochage.
Lorsqu'il n'y a pas de masse, la longueur du ressort mesure 33 (en mm).
Pour une masse qui mesure 500 (en g) la longueur du ressort mesure 53 (en mm). 53 − 33 = 20

Nous dirons que l'allongement du ressort est de 20 (en mm)
On a obtenu ainsi :

masse g	250	500	1 000
allongement mm	10	20	40

Nous ne pouvons pas utiliser de masses de mesure supérieure à 1 (en kg) sans détériorer le ressort.
Que peux-tu dire du tableau ci-dessus ?
Complète le tableau :

$\times \frac{1}{25}$

150 375	31

Peux-tu prévoir l'allongement du ressort pour des masses qui mesurent 150, 375 (en g) ?
Peux-tu prévoir la mesure de la masse qui donnerait un allongement égal à 31 (en mm) ?

Exemple 2. On te donne les temps réalisés dans les courses aux Jeux Olympiques de 1968.

distance m	100	200	400
temps s	9,9	19,8	43,8

Ce tableau est-il un tableau de proportionnalité ?
Peux-tu expliquer pourquoi ?