LE GOUT DE LA GÉOMÉTRIE

Parabole épistémologique
à la mémoire de
Philippe BERNAT

Philippe LOMBARD
Irem de Lorraine

When the legend becomes
fact print the legend.
John Ford. *The man*
who shot Liberty Valence

Il y avait jadis au Rajasthan, dans le nord-ouest de l'Inde, un Maharaja qui s'appelait Sawai Jai Singh. Un beau jour de 1727, il décida de construire de toutes pièces une nouvelle capitale ; il baptisa celle-ci Jaïpur. Ce Maharaja est très connu en Inde et on le désigne parfois sous le nom de « Newton indien » car c'était un grand amoureux de sciences, et notamment d'astronomie. La première chose, d'ailleurs, qu'il fit édifier dans sa nouvelle capitale fut un des plus beaux observatoires de pierre jamais construits : le Jantar Mantar. Celui-ci se visite encore aujourd'hui, il est toujours en très bon état avec ses astrolabes monumentaux, ses cadrans solaires gigantesques ou ses immenses sphères armillaires de marbre blanc.

Mais il faut bien vous avouer que ce ne sont pas ces vestiges de la science passée qui amènent à Jaïpur les touristes en visite au Rajasthan. Non. En réalité la ville de Jaïpur est universellement connue des agences de voyage pour un tout autre monument, érigé lui aussi au début du XVIIIème siècle par notre Maharaja Sawai Jai Singh. Celui-ci ne s'appelle pas le Jantar Mantar ; il s'appelle le Hawa Mahal…

Ce Hawa Mahal est un fabuleux palais de grès rose, avec une merveilleuse façade de cinq ou six étages, ouvragée dans le style rajpoute caractéristique de la ville. Cette façade est percée d'un nombre incalculable de fenêtres qui sont autant de petites loggias s'avançant sur la rue et permettant d'observer le spectacle de la ville, plus ou moins caché par les véritables dentelles de pierre qui constituent les colonnettes et les linteaux. Or ce sont précisément cette façade et ses mille fenêtres sculptées qui attirent les visiteurs et assurent à elles seules la célébrité de ce palais. Et pour cause, car cette façade est précisément *le palais tout entier* ! Car ce « palais » se résume en réalité à ces cinq ou six étages de fenêtres qui ne servent à rien ! Ou plutôt à rien d'autre qu'à offrir des sortes de loggias destinées à observer l'animation de la rue… D'ailleurs son nom de Hawa Mahal n'annonce pas autre chose : Hawa Mahal signifie tout simplement « Palais des vents ».

Bien sûr, le Rajasthan, le Maharaja Sawai Jai Singh, les Jantar Mantar et autre Hawa Mahal n'ont qu'*indirectement* à voir (et encore…) avec notre sujet, puisque celui-ci n'est consacré — on veut le croire — qu'à l'enseignement de la géométrie… Il n'empêche, d'abord, qu'un Maharaja féru d'astronomie mérite bien de servir d'introduction à une réflexion consacrée non seulement à l'enseignement de la géométrie mais au surplus (et comme son titre l'indique) au *goût* de la géométrie. La chose est assez rare en effet pour être signalée, et même si notre exemple fait appel tout à la fois à une histoire et à une géographie bien lointaines, il me semble particulièrement réconfortant de savoir que quelque grand de ce monde puisse avoir eu le *goût de la science* et que ce *goût* — presque à lui seul — ait suffi à l'inscrire dans la mémoire commune.

Certes, on m'objectera sans doute ensuite que l'on ne peut si aisément confondre le *goût de la géométrie* et le *goût de l'astronomie* ; que la première ne se consacre guère qu'à percer les secrets des nombres et des formes alors que la seconde se place d'emblée sur le terrain du règlement du monde, de l'agencement entre le temps et l'espace, du devenir de l'univers, bref : de rien moins que de toutes les énigmes proposées par les étendues cosmiques qui nous entourent… On me fera peut-être même remarquer enfin que ce Maharaja- là ne s'intéressait à cette science-ci que pour de mauvaises raisons, à commencer par le fait que son astronomie était surtout motivée par les illusions zodiacales de l'obscurantisme astrologique…

Qu'importe. Personne ne chercherait à contester que la compréhension et la maîtrise de l'univers reposent très souvent sur des fictions et que ces fictions ne sont bien souvent que des phantasmes, des chimères, dont il aura bien fallu se défaire un jour pour se raccrocher à d'autres hypothèses, à d'autres théories qui se révéleront — à leur heure — comme autant d'autres chimères. Mais personne ne saurait non plus contester que la géométrie est précisément — par essence — le lieu même où s'élaborent les fictions les plus merveilleuses et les plus sophistiquées qui servent de *modèles* presque magiques aux explications les plus convaincantes que l'homme ait jamais été capable d'apporter aux secrets de la nature ! La géométrie tout court n'est jamais si loin de la géométrie du monde (à commencer au niveau de son étymologie elle-même), pour que l'on puisse argumenter bien longtemps sur des différences bien plus artificielles que réelles.

Le philosophe, bien évidemment, ne saurait complètement les négliger, mais on m'accordera aisément — en tout état de cause — qu'elles n'ont guère de pertinence au niveau qui nous occupe et qui est celui de l'*enseignement* de la géométrie et, plus encore, au niveau plus précis auquel je me suis placé d'entrée de jeu : au niveau, non pas de la simple transmission du *savoir géométrique*, ni même (puisque l'on a tendance à faire la différence aujourd'hui) de la transmission de la *compétence géométrique*, mais au niveau de la transmission… du *goût de la géométrie* ! Chacun sait en effet que s'il est un domaine lié à la science dont les mystères semblent encore plus impénétrables que ceux de la science elle-même, c'est bien de celui de l'*enseignement* des sciences qu'il s'agit. Que s'il est une partie de l'enseignement dont les énigmes semblent les plus résistantes à l'analyse, il s'agit bien de celle qui touche à la transmission de la *vocation* scientifique. Que si, enfin, il est une partie de l'activité qui nous occupe (nous autres professeurs de mathématiques) et qui mériterait largement des modèles, des fictions, des phantasmes, voire des chimères un tant soit peu efficaces, c'est bien celle qui consiste à transmettre le *goût de la géométrie*…

Mais c'est justement cela qui ramène notre Maharaja, son observatoire et surtout son « Palais des Vents » à notre sujet.

Pourrait-on, en réalité, invoquer une plus belle figure emblématique que ce « paravent de chimères » pour symboliser tous les phantasmes modélisateurs auxquels ont donné libre cours jusqu'ici la pédagogie des sciences en général et celle de la géométrie en particulier ? Cette « fiction de Palais » côtoyant une réalisation scientifique et technologique aussi admirable que l'observatoire de Jaïpur nous ramène au paradigme même de la notion de « fiction » et surgissent, d'un seul coup, les fantômes de toutes les fictions qui ont été, un jour ou l'autre, mises sur pied par la pédagogie dans l'espoir de « modéliser » — ou de « théoriser » si l'on préfère — cet acte contre nature qui consisterait à susciter chez les élèves le goût de la géométrie…

Je ne parle évidemment pas ici — on l'aura compris — de toutes les inepties proférées sur ce sujet par ceux qui ont renoncé depuis longtemps aux préoccupations pédagogiques et qui prétendent, à la place, faire pompeusement de la « didactique des mathématiques »… Il s'agit là aussi, naturellement, de « fictions », mais de fictions si immédiatement « fictives » qu'elles nous feraient sortir irrémédiablement du cadre où je me suis placé, celui des « fictions sérieuses », c'est-à-dire — à tout le moins — suffisamment sérieuses pour susciter un certain intérêt chez celui qui les rencontre. Non. Je veux parler de toutes les tentatives de bonne foi qui ne cherchent pas nécessairement une reconnaissance institutionnelle et qui ne sont pas simplement destinées à faire habiliter leurs auteurs dans la confrérie des « didacticiens ». Je ne m'intéresserai ici qu'aux efforts accomplis par des générations de maîtres ou de professeurs préoccupés de « faire passer » chez des générations de collégiens ou de lycéens un peu de la passion de la géométrie qui les anime.

Quel enseignant n'a-t-il pas, en effet, été effleuré un jour par ce constat en forme de question, qui fut si bien formulé par Henri Poincaré en 1905 :

> *« Comment se fait-il qu'il y a tant d'esprits qui se refusent à comprendre les mathématiques ? N'y a-t-il pas là quelque chose de paradoxal ? Comment, voilà une science qui ne fait appel qu'aux principes fondamentaux de la logique, au principe de contradiction, par exemple, à ce qui fait pour ainsi dire le squelette de notre entendement, à ce qu'on ne saurait dépouiller sans cesser de penser, et il y a des gens qui la trouvent obscure ! et même ils sont en majorité ! ».*

Et point n'est besoin de jouer de fausse naïveté ! Quel enseignant n'est-il un jour tombé, en toute bonne foi, dans une telle exhortation impuissante au « sens commun » le plus élémentaire qui serait la solution à toutes les difficultés rencontrées par ses élèves ! Qui même ne s'est jamais surpris un jour à penser que la géométrie était le lieu privilégié de la vision des choses, de « l'intuition », du « raisonnement »… pour mieux se lamenter sur l'incapacité des élèves à « voir », à « sentir », à « conjecturer », à « faire des hypothèses », à « déduire », « argumenter », « démontrer » ! Bref, à simplement « penser », comme le dirait Poincaré…

Les mathématiques en général — et la géométrie en particulier — demanderaient-elles, par hasard, non seulement de « penser juste »,… mais aussi un petit « autre chose » sans lequel même les esprits les plus logiques et les plus malléables se révéleraient incapables de pénétrer les arcanes de situations qui paraissent pourtant si « naturelles » au spécialistes ? Y aurait-il donc une « bosse des maths » que les anatomistes, les physiognomonistes et même les didacticiens auraient définitivement renoncé à localiser,… mais qui suffirait vraiment à expliquer tous les blocages et, de ce fait, à justifier nombre de renoncements pédagogiques ?

Paradoxalement, la mode ne semble pas à glorifier de tels renoncements et on assisterait plutôt à de multiples tentatives pour essayer de comprendre pourquoi l'apprentissage de la géométrie est si difficile et pour trouver des moyens d'en améliorer l'efficacité. Qu'il suffise, pour s'en convaincre, de considérer les diverses « boîtes à outils », les recherches fondées sur les « lectures de figures », les mises en jeu de « configurations » plus ou moins fondamentales, les appels aux logiciels, didacticiels, imagiciels, supportant les espoirs engagés dans la promotion d'une « géométrie dynamique », etc., etc. Sans oublier évidemment les expériences fondées plus classiquement sur l'approfondissement de la logique rationnelle ou même sur l'introduction de l'histoire des sciences et des mathématiques…

C'est précisément autour de la plupart de ces réflexions et de ces tentatives que je voudrais placer mon propos en cherchant à illustrer sur un exemple les difficultés du problème. Cependant, je ne me placerai pas directement ici au niveau des élèves mais à un niveau géométrique beaucoup plus élevé, puisque c'est plutôt chez le lecteur lui-même que je souhaiterais susciter des réactions… en le prenant tout à la fois comme « expert » et comme « cobaye »…

I — De Napoléon à Morley

Nous allons nous intéresser à une propriété fameuse en géométrie du triangle, découverte et démontrée un peu par hasard en 1899 par un mathématicien américain qui s'appelait Frank Morley. Il s'agit (comme chacun le sait sans doute de façon plus ou moins précise) du théorème suivant :

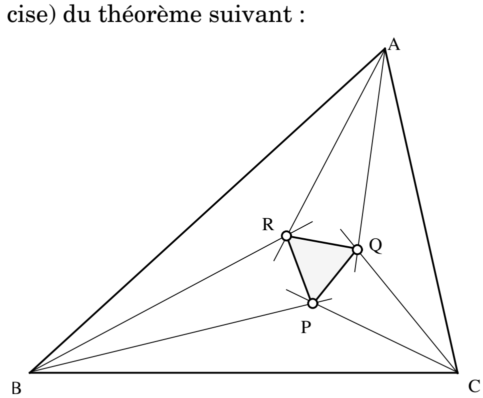


Figure 1

« Dans un triangle ABC quelconque, les six droites qui partagent les angles en trois parties égales (et que l'on appelle les *trisec-*

trices) déterminent un *triangle équilatéral* PQR lorsqu'on les regroupe comme sur la figure. »

C'est peu de dire que cette propriété est surprenante ou, pour le moins, inattendue. Le seul fait qu'il ait fallu attendre 1899 pour s'en apercevoir suffirait à justifier de tels qualificatifs… Mais surtout, elle est au fond assez « fascinante » et ceci me semble-t-il pour deux sortes de raisons qui ne sont d'ailleurs peut-être pas complètement étrangères l'une à l'autre.

La première tient (nous le verrons plus loin) dans *la difficulté de sa démonstration*.

Historiquement, Frank Morley n'avait aucune raison particulière de s'intéresser directement aux propriétés des trisectrices et il se trouve que son « théorème » concernait en réalité une question parfaitement indépendante de celles-ci, car il ne recherchait rien d'autre que les *cardioïdes tangentes aux trois côtés* d'un triangle ou, si l'on préfère, les cardioïdes « inscrites » dans le triangle ABC… Il se trouve en effet que le lieu des centres de telles cardioïdes consiste en une famille de droites qui font entre elles des angles de 60° et que ces droites déterminent donc des triangles équilatéraux. Mais il se trouve aussi que des points tels que P, Q et R situés à l'intersection des trisectrices sont des positions particulières « doubles » assez faciles à détecter pour le centre d'une cardioïde inscrite dans le triangle ABC… Si bien que les trisectrices (ainsi d'ailleurs que celles que l'on pourrait baptiser du nom de « trisectrices extérieures ») héritent miraculeusement de cette propriété imprévue de sous-tendre des triangles équilatéraux auxquels elles donnent pourtant l'impression de n'avoir jamais été le moins du monde apparentées !

Cela étant, il est clair que la démonstration originelle ne peut guère avoir de chances d'être « élémentaire ». Elle repose effectivement sur des raisonnements de géométrie algébrique que nous n'aborderons pas ici. Mais cette naissance quelque peu inespérée confère en définitive à la propriété des trisectrices un mystère qui la rend d'autant plus intéressante : d'abord celui de trouver une ou des démonstrations élémentaires pour une propriété qui — une fois mises de côté les cardioïdes — ne fait nullement appel à des théories savantes. Ensuite (et surtout) celui de trouver — disons « derrière » des démonstrations plus directes — une ou des « explications » de ce phénomène que personne n'avait osé soupçonner auparavant. Il n'est pas question pour moi de rentrer dans des considérations générales sur les raffinements bien connus entre les démonstrations « explications », « justifications », « convictions », « preuves », etc., mais je ne peux résister à la tentation de citer, ici encore, Henri Poincaré :

> « *Nous ne pouvons pas nous contenter de formules simplement juxtaposées et qui ne s'accorderaient que par un hasard heureux ; il faut que ces formules arrivent pour ainsi dire à se pénétrer mutuellement. L'esprit ne sera satisfait que quand il croira apercevoir la raison de cet accord, au point d'avoir l'illusion qu'il aurait pu le prévoir.* »

Il nous suffira de remplacer dans sa première phrase le mot « formules » par le mot « théorèmes », ou même plus modestement par le mot « propriétés », pour traduire de façon remarquable ce que pourrait être le désir de rechercher des « démonstrations » à propos de faits qui sont pourtant déjà connus et avérés… Le cas est d'autant plus intéressant ici, et propre à piquer la curiosité, qu'il faut bien reconnaître que la figure elle-même qui traduit la propriété symbolise parfaitement la difficulté qui nous attend. Elle ne « souffle » aucune piste évidente à celui qui la regarde : le triangle équilatéral PQR ne paraît relié au triangle initial ABC que par ces sortes de « haubans » constitués par les trisectrices, si bien que rien ne semble laisser deviner, de prime abord, un quelconque chemin capable de mener des hypothèses à la conclusion ! Faudra-t-il, comme c'est si souvent le cas lorsque les pistes semblent manquer, se « rabattre » sur les calculs ? Faire appel à l'arsenal des formules qui garnissent les coffres où dorment les propriétés « métriques » ou « trigonométriques » des triangles ? Ce serait bien le diable si, à force de courage et de patience, une propriété quelconque (pour peu qu'elle soit vraie) ne pouvait se déduire des propriétés déjà connues par le jeu des calculs. Quelquefois si mystérieux mais toujours si magiques… Il est possible évidemment de trouver de telles démonstrations et, comme ce n'est pas mon propos, je laisserai le lecteur les chercher lui-même ou les découvrir dans la littérature. Il ne manquera pas de possibilités dans cette voie. Mais celui qui commencera à chercher pour lui-même s'apercevra vite que « ce n'est pas si simple » et, qu'au fond, la figure ne « souffle » guère plus de pistes pour aborder les calculs qu'elle ne suggère de directions à prendre dans le domaine de la géométrie !

Et puis s'il parvient à son but, il lui faudra se rappeler que la phrase de Poincaré que j'ai citée plus haut *s'applique aussi* (et pour cause…) aux démonstrations reposant principalement sur les calculs…

La seconde raison qui rend la propriété découverte par Morley « fascinante » — et explique sans doute une bonne part de sa difficulté — peut s'exprimer par un seul mot : le mot « symétries »…

Il est devenu commun, en effet, de regarder la géométrie (élémentaire ou non) comme fondée essentiellement sur ce que l'on appelle la « recherche des invariants ».

Cela revient à dire que toute situation géométrique se ramène à la donnée d'un certain nombre de « transformations géométriques » : l'ensemble, précisément, des transformations qui laissent invariante la situation ou la figure données. Ces transformations constituent de façon assez naturelle un *groupe* de transformations et, dès lors, le travail du géomètre n'a pas vraiment d'autre portée que de déterminer les « propriétés » qui sont conservées, c'est-à-dire laissées *invariantes*, par l'action de ce groupe. Ce point de vue, rattaché le plus souvent à ce que l'on désigne sous le nom de « programme d'Erlangen », permet évidemment de donner un éclairage synthétique et intéressant à de nombreux problèmes traités par la géométrie élémentaire. De plus, à un niveau disons « supérieur », il a parfois permis de prendre les choses « à l'envers » et de se poser la question de déterminer *a priori* — je veux dire « à l'avance » et en toute généralité — *tous les invariants* que l'on pouvait s'attendre à rencontrer dans tel ou tel genre de situation. Cela reviendrait, d'une certaine manière, à « tuer dans l'œuf » tous les problèmes d'un coup si la providence n'avait toujours veillé à prévoir des cas susceptibles d'échapper à toutes les classifications systématiques que l'homme aurait pu décider à l'avance…

Il se trouve que le théorème de Morley est précisément un de ces cas réservés par la providence ! Il n'illustre pas autre chose — d'une certaine manière — que l'exact contre-pied de la lecture courante (et réductrice) du « programme d'Erlangen » : alors que nous partons d'une figure « quelconque » (c'est-à-dire d'une situation dont le groupe associé est, par hypothèse, le plus gros possible) nous devons mettre en évidence une propriété de nature extrêmement « symétrique » (c'est-à-dire associée au groupe du triangle équilatéral). Ce n'est évidemment pas véritablement contradictoire avec le « programme d'Erlangen » en lui-même, puisque rien n'empêche que certaines situations reviennent à « réduire » (ou « enrichir » comme on voudra) le groupe concerné au départ… Mais cela montre que l'on aurait tort de penser que la géométrie puisse se réduire « mécaniquement » à une simple inspection de la liste des invariants déjà classés. Bref. Nous sommes en présence d'un résultat exceptionnel et chacun est d'ailleurs bien capable de le sentir de lui-même, qu'il fasse référence ou non au « programme d'Erlangen ».

Ce que nous rappelle opportunément, en revanche, ce fameux programme, c'est que nous ne disposons — en dernière analyse — que de très peu *d'invariants* dans nos hypothèses et que nous devons pourtant les agencer de façon à en déduire l'existence de toutes les étonnantes symétries du triangle PQR…

D'où peuvent-elles bien provenir ? Par quelle mystérieuse alchimie un triangle sans symétrie particulière est-il susceptible de donner naissance à un triangle équilatéral ? Y aurait-il donc une règle très subtile qui nous aurait permis, sinon de prévoir, du moins de « pressentir » une propriété comme celle des trisectrices ?

Après tout, la concourance des bissectrices, des médianes, des hauteurs ou même des symédianes ne repose pas sur plus *d'invariants* mis à notre disposition au départ. Et une concourance est un phénomène qui n'est peut-être pas foncièrement si différent de la présence d'un triangle équilatéral… : qu'est-ce donc, par exemple, que ce phénomène mystérieux qui fait « éclater » en triangle équilatéral le point de concours des bissectrices une fois que l'on passe aux trisectrices ? La *régularité* qui naît ainsi au sein d'une figure ne présentant, au départ, aucune symétrie particulière provient-elle — par une sorte de savant et énigmatique *transfert* — de l'espèce de *symétrie des opérations de constructions* que l'on a effectuées sur celle-ci : découpage en *trois parties égales* des *trois* angles du triangle ?… Mais alors, pourquoi le triangle équilatéral est-il précisément le triangle PQR obtenu en regroupant les trisectrices adjacentes aux côtés ? L'autre triangle possible (opposé dans l'hexagone central) aurait-il à son tour les propriétés de symétries auxquelles il ne manquerait pas de prétendre ?

Le seul moyen de répondre à toutes ces questions est d'essayer d'abord de comprendre *pourquoi* le triangle PQR du théorème de Morley est bel et bien équilatéral ! Mais il n'est pas forcément inutile, cependant, de se rappeler auparavant qu'un certain nombre de situations conduisent aussi à des observations du même genre.

C'est par exemple le cas dans l'étude des « droites de Simson » associées aux points du cercle circonscrit à un triangle…

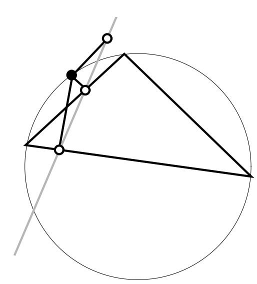


Figure 2

Rappelons en effet la définition de ces droites : on démontre de façon assez élémentaire que si on projette un point M du plan sur les côtés d'un triangle, alors les trois projections obtenues sont alignées si et seulement si ce point est situé sur le cercle circonscrit au triangle. Ces projections déterminent donc une droite dite *droite de Simson* relative au point M, et on dispose dès lors d'une telle droite associée à chaque point du cercle. Il se trouve que ces droites *enveloppent* — ou, si l'on préfère : *restent tangentes* — à une courbe très particulière que l'on appelle une *hypocycloïde à trois points de rebroussement*… :

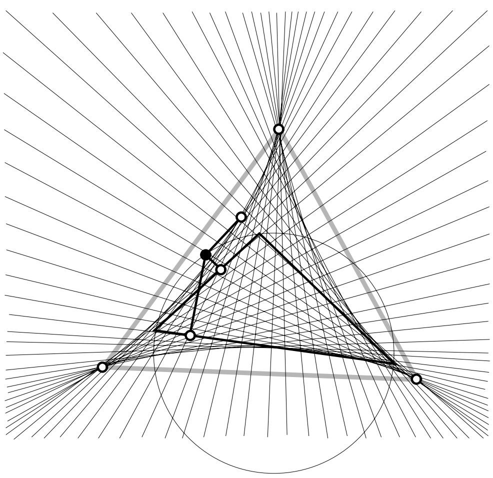


Figure 3

Nous sommes donc en présence d'un autre exemple où on observe un indéniable *gain de symétries* car l'hypocycloïde est indissociable du triangle « équilatéral » formé par ses trois points de rebroussement et elle présente d'ailleurs elle-même les symétries internes propres à celui-ci.

Un autre exemple classique est passé dans l'histoire sous le nom de « théorème de Napoléon » … Partons une fois encore d'un triangle quelconque ABC et construisons trois triangles équilatéraux ABC', BCA' et CAB' situés extérieurement sur chacun des trois côtés du triangle initial (cf. figures 4 et 5 de la page suivante). Alors il se trouve que les centres des trois triangles équilatéraux forment un nouveau *triangle équilatéral* attaché au triangle ABC.

Le même phénomène se rencontre enfin dans d'autres configurations classiques : considérons par exemple un quadrilatère quelconque… Chacun sait sans doute que les milieux de ses quatre côtés forment un *parallélogramme*. C'est donc déjà là un « gain de symétrie », puisqu'une figure quelconque donne ainsi naissance à une figure qui possède une symétrie centrale… Mais considérons maintenant ce parallélogramme (ou un parallélogramme quelconque !) et construisons — un peu comme dans le théorème de Napoléon — quatre carrés s'appuyant extérieurement sur ses côtés. Il se trouve alors (c'est le théorème dit « de Thébault ») que les centres de ces quatre carrés (figure 6) forment à leur tour un carré associé de façon naturelle au parallélogramme initial… C'est-à-dire au fond au quadrilatère quelconque que l'on avait choisi à l'origine…

Comment des configurations « ordinaires » peuvent-elles ainsi engendrer les figures les plus « symétriques » au sein de leur espèce d'origine ? Pourquoi assiste-t-on à cette sorte de « transfert » qui conduit à voir se « cristalliser » la régularité de certaines constructions répétées sur les sommets ou les côtés, dans une « régularité » interne à la figure à laquelle ces constructions donnent naissance ?

Un peu d'expérience en matière de géométrie incline souvent à penser que de tels

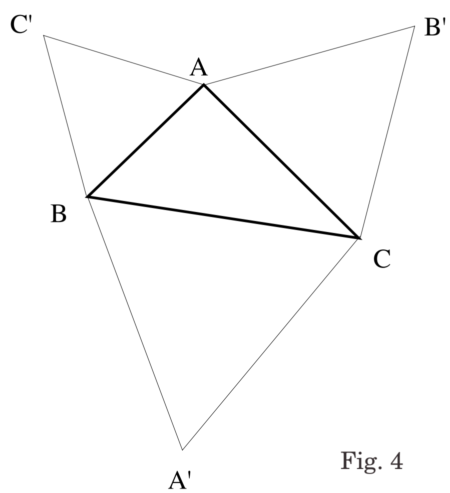


Fig. 4

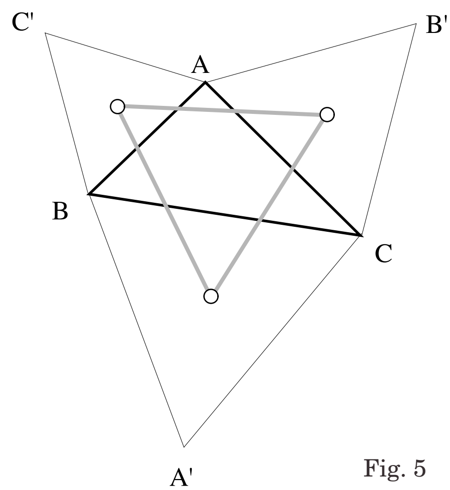


Fig. 5

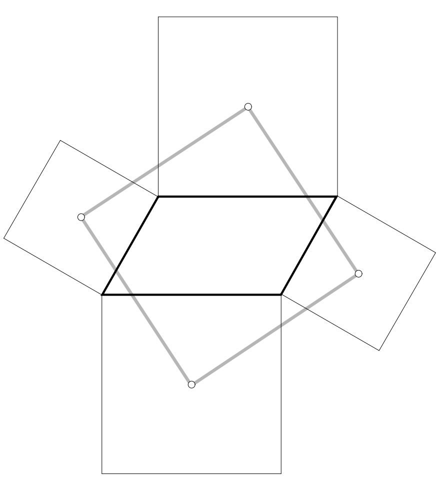


Fig. 6

phénomènes peuvent trouver leur explication la plus « plausible » au travers de propriétés *algébriques*. Et il vrai que, la plupart du temps, les formules qui s'agencent entre elles de manière « symétrique » au cours de certaines phases de calculs donnent le sentiment de traduire de la manière la plus pertinente possible des « symétries cachées » qui se révéleront, au final, comme des propriétés tangibles des figures… Il n'en reste pas moins que, parallèlement, le « calcul » est ressenti comme particulièrement frustrant, surtout lorsqu'il est mené un peu « à l'aveuglette » !… et que le goût de la géométrie consiste précisément à chercher, à un niveau que l'on ressent généralement comme plus « profond », comme plus « intuitif », ou même simplement comme plus « naturel », cette « illusion d'avoir pu prévoir un phénomène » dont parle si bien Henri Poincaré.

C'est ce que nous allons tenter d'explorer à propos du théorème de Morley, mais attardons-nous encore quelques instants sur l'exemple du théorème de Napoléon représenté sur la figure 5. Une idée classique pour montrer que le triangle des centres est effectivement équilatéral consiste à prouver que ses côtés sont égaux en les ramenant (par des similitudes convenables) aux segments AA', BB' et CC' de la figure 7 ci-dessous. Il se trouve en effet que ces trois derniers segments sont eux-mêmes *égaux* car on passe aisément de l'un à l'autre par des rotations de 60° autour des sommets du triangle initial… (Ce qui entraîne d'ailleurs au passage qu'ils font entre eux des angles de 60°…)

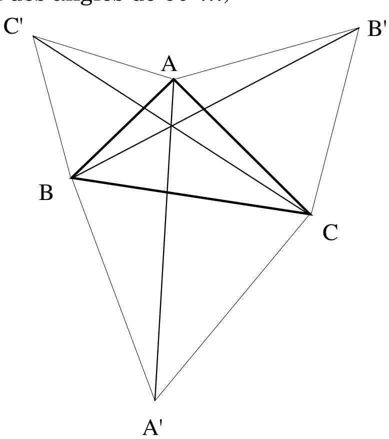


Fig. 7

Mais dès lors, ces trois segments AA', BB' et CC' qui joignent les trois sommets de ABC aux sommets des trois triangles équilatéraux intermédiaires ne possèdent-ils pas déjà — dans une certaine mesure — une *partie des propriétés de symétrie* qui finiront par se condenser dans le triangle formé par les trois centres ? En fait, comme on le voit sur la figure 7, ils possèdent même un peu plus, car il se trouve aussi qu'ils sont *concourants*… Ils se coupent en un point qui s'appelle le « point de Torricelli (ou de Fermat) du triangle ABC », et qui est le seul point à « regarder les trois côtés » sous des angles égaux. C'est même le seul point (du moins lorsque le triangle n'est pas trop aplati) à réaliser le minimum de la somme des distances aux trois sommets de ABC…

Bref. Les figures 5 et 7 manifestent déjà, peu ou prou, ce phénomène de « gain de symétries » et il n'est donc peut-être pas inutile de se demander au moins « pourquoi » le triangle des centre est *équilatéral* ou « pourquoi » des segments comme AA', BB' et CC' sont *concourants*…

On a évidemment très envie de se contenter de résumer la situation en disant que l'on a fait la « même chose » sur chacun des côtés du triangle ABC…

Ainsi, pour obtenir le triangle des centres de la figure 5, on a simplement construit, sur chacun des côtés de ABC, des triangles isocèles dont l'angle au sommet mesure 120°. (De même que, dans la figure 6, on a construit, sur chacun des côtés du parallélogramme initial des triangles isocèles rectangles…) Or un calcul simple à l'aide des nombres complexes montre immédiatement qu'il n'y a en fait que *deux façons* de construire des triangles *semblables entre eux* sur chacun des côtés pour obtenir les sommets d'un nouveau triangle équilatéral : il s'agit du cas des triangles isocèles de la figure 5 et du cas où ces mêmes triangles sont disposés à « l'intérieur » de ABC au lieu d'avoir été placés extérieurement.

En ce qui concerne la figure 7, lorsque l'on se pose une question analogue à propos de la concourance et que l'on cherche de quelle(s) manière(s) on peut attacher à chacun des côtés de ABC des triangles semblables ABC', BCA' et CAB' tels que les droites AA', BB' et CC' soient concourantes (ou parallèles…), le calcul est un peu plus compliqué mais on trouve que les seules solutions « universelles » (c'est-à-dire indépendantes de la forme du triangle ABC) consistent à construire trois triangles isocèles semblables, de bases respectives AB, BC et CA :

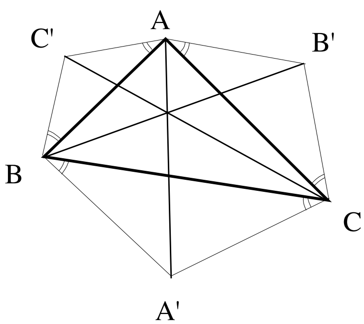


Fig. 8

Le lecteur qui se lancera dans les vérifications au niveau du calcul se convaincra d'ailleurs très vite, au passage, que la « symétrie » des données n'apporte nullement une facilité déconcertante pour dégager les conclusions !…

Mais revenons au problème de Morley. Il est sensiblement plus compliqué que le problème de Napoléon car il met lui aussi en jeu des constructions initiales symétriques (ou semblables), mais celles-ci ne concernent plus, comme dans le cas précédent, chacun des côtés du triangle initial, mais chacun de ses *angles*. Or tout le monde sait bien que le travail sur les angles fait généralement appel à des considérations ou des calculs beaucoup plus compliqués que ceux que nous venons d'évoquer à propos du théorème de Napoléon. On pourra — à titre d'exemple — se plonger dans un problème analogue à celui de la figure 8 précédente et chercher des propriétés de concourance à partir de conditions « semblables » (en un sens assez vague) et qui soient plus liées aux *angles* du triangle ABC qu'à ses côtés. On pourra notamment se rendre compte du résultat suivant :

« Les égalités d'angles résumées sur la figure suivante, beaucoup plus *larges* que celles de la figure 8,

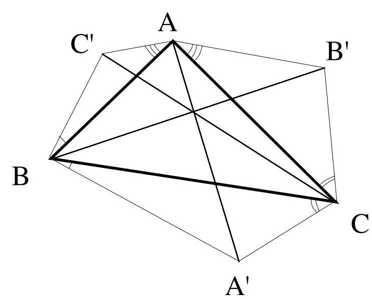


Fig. 9

entraînent aussi la concourance des droites AA', BB' et CC'. »

Je laisse la démonstration au lecteur ; il lui suffira (par exemple) de faire appel au théorème de Ceva. Mais on peut aussi signaler au lecteur plus particulièrement intéressé que ce théorème se démontre en fait sans utilisation de « calculs », c'est-à-dire qu'il repose en définitive sur des propriétés des *symétries orthogonales*… Ce qui prouve — notons-le au passage — qu'il est encore vrai dans le cadre des géométries non euclidiennes…

II — De l'analyse et de la synthèse…

Cherchons donc à *démontrer* ensemble le théorème de Morley. Il nous suffira naturellement de *raisonner* et nous ferons tout aussi naturellement appel pour cela à la démarche ancestrale bien connue (et aussi quelque peu négligée…) du raisonnement *par analyse et synthèse*. Mais de quoi s'agit-il exactement ? Modèle ? Fiction ? Chimère ? A quoi correspondent donc ces deux arches si impressionnantes d'une démarche doctement codifiée par les Philosophes de jadis… et pédagogiquement ritualisée par les Maîtres de naguère ?

Sans remonter aux Anciens, nous nous contenterons ici d'écouter l'avis de l'un des pères fondateurs des mathématiques modernes : François Viète. Il définit en effet, en 1591, dans sa *Nouvelle Algèbre*, les deux moments de la pensée qui nous occupent : l'*Analyse* est tout simplement « l'assomption du concédé par les conséquences tirées de la fin et compréhension du requis… », alors que la *Synthèse* n'est en fait rien d'autre que « l'assomption du requis comme concédé par les conséquences au vrai concédé… »

Traduisons. Mais traduisons en commençant par la fin, c'est-à-dire en nous intéressant tout d'abord à la phase de *Synthèse*… Cette « assomption du requis » correspond évidemment ce que nous appellerions aujourd'hui « l'obtention du résultat cherché » et il s'agit donc — au cours de la Synthèse — d'obtenir ce résultat comme conséquence du « vrai concédé », c'est-à-dire de ce qui est « connu », de ce qui déjà connu comme « vrai » ou, si l'on préfère encore, comme conséquence des « hypothèses accordées au départ ». C'est donc exactement ce que nous résumons actuellement sous le nom de *démonstration* lorsqu'il s'agit de prouver la vérité d'un théorème ou d'une proposition au travers d'un *enchaînement* de propriétés intermédiaires qui sont acceptées comme vraies ou qu'il s'agit de « démontrer » au passage (cf. figure 10).

Pour un créateur contemporain de « résolveurs » (c'est-à-dire de logiciels destinés à trouver des démonstrations) cela s'appelle aussi du « chaînage avant », dans la mesure où l'on cherche à indiquer un chemin qui permette d'avancer des *hypothèses* vers la *conclusion*. Et on peut aussi retrouver une phase tout à fait analogue dans d'autres contextes. Ainsi, dans les problèmes dits « de constructions géométriques », la *synthèse* correspond à la construction proprement dite, période où l'on indique, pas à pas, les étapes successives permettant de passer des éléments donnés aux éléments « requis » de la figure cherchée. De même que, dans les problèmes dits « d'algèbre » (qui touchaient de plus près au discours de Viète), la synthèse — prenant d'ailleurs le nom

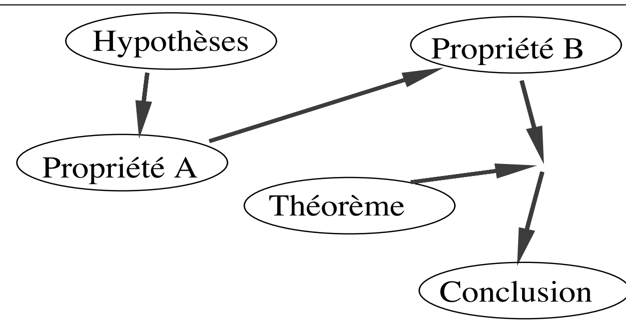


Fig. 10

de « poristique » — correspondait précisément au moment de la « vérification », c'est-à-dire au moment où, *disposant des valeurs possibles à affecter aux inconnues*, il ne reste plus qu'à vérifier qu'elles conviennent effectivement aux autres éléments donnés par l'énoncé du problème.

On voit donc que la phase de *synthèse* dépend du domaine où l'on se place, mais on imagine aisément qu'elle est presque nécessairement *seconde*, puisqu'elle suppose de façon assez évidente que l'on *connaisse le chemin avant* de l'entreprendre ou de l'indiquer à quiconque ! C'est, en d'autres termes, un moment de nature rhétorique qui consiste beaucoup plus à *raconter une solution* (soit qu'il s'agisse de la « prouver », soit qu'il s'agisse d'en « convaincre »), plutôt qu'à la trouver ou même à tenter d'expliquer comment on aurait pu la trouver…

Marquons par exemple une pause et intéressons-nous d'entrée de jeu à une démarche du type « synthèse » à propos du théorème de Morley (figure 11). Comme le triangle ABC est quelconque, nous aurons vite fait le tour des hypothèses dont nous disposons : nous savons simplement que les droites tracées partagent chacun des angles en trois parties égales… Mais sans prétendre savoir atteindre actuellement la conclusion requise concernant le fait que le triangle PQR est équilatéral, nous pouvons chercher à tirer au moins les conséquences les plus directes des égalités d'angles dont nous disposons. Or en groupant les angles égaux deux par deux, on fait aisément apparaître les configurations plus habituelles relatives aux propriétés des bissectrices (figure 12).

C'est alors un exercice très simple (en désignant par exemple par 3α, 3β et 3γ les angles

Fig. 11

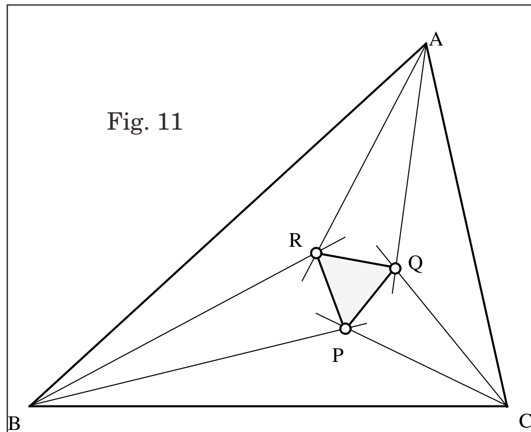
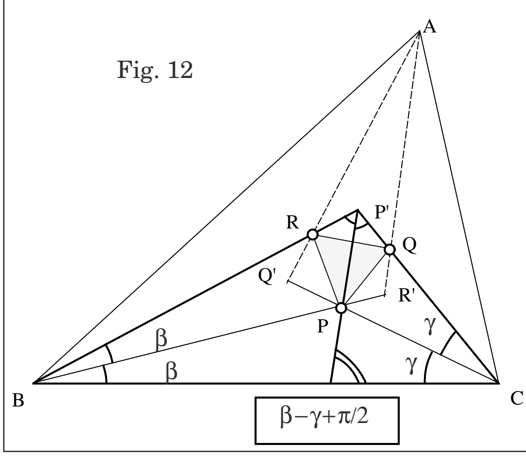


Fig. 12



en A, B et C du triangle donné) de calculer l'angle indiqué sur la figure 12, ainsi que les deux autres angles obtenus en permutant circulairement les sommets…

Le lecteur en déduira alors sans grande peine que les trois segments PP', QQ', RR' de la figure 13 ci-dessous font entre eux des angles de 60°. [Il notera même peut-être, au passage, que ce résultat n'a aucune raison d'être encore vrai dans une géométrie où la somme des angles d'un triangle n'est plus égale à 180°.]

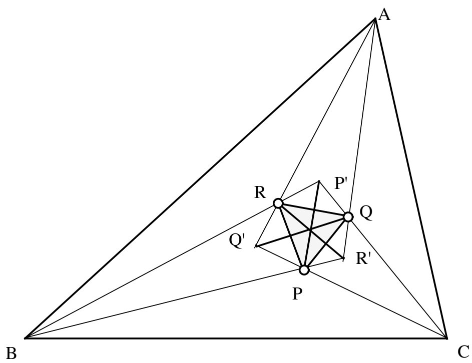


Fig. 13

La tentation est grande évidemment — arrivés à ce point du récit — de conseiller au lecteur d'aller plus loin dans sa propre réflexion ! Mais celui qui se prendra au jeu se rendra vite compte de deux choses… D'abord, *il ne sait pas* si la propriété que nous venons de constater possède la moindre utilité pour parvenir au résultat ; et cela sera inévitablement le cas pour toutes les propriétés intermédiaires (je veux dire : « présumées intermédiaires »), qu'il découvrira de lui-même. Ensuite il aura certainement envie de savoir si ce qu'il peut tout à loisir constater sur *notre* figure 13 est vrai : les segments PP', QQ' et RR' sont-ils vraiment concourants ? Question qui en contient exactement deux autres : 1°) la figure réalisée et présentée ici est-elle une figure « juste » ou une figure « fausse »… ? 2°) même si elle est avérée, la concourance des segments PP', QQ' et RR' présente-t-elle quelque intérêt pour la suite de la démonstration ?…

Autant dire que le lecteur (expert et… cobaye) serait ici placé exactement dans la phase classique du démarrage d'une recherche, et que — à plus ou moins brève échéance — il aurait de grandes chances de se décourager à force de se heurter à des obstacles qui se révéleraient en fait de plus en plus difficiles à franchir et de moins en moins propices à laisser entrevoir la tant désirée « assomption du requis »… C'est qu'en matière de recherche la poursuite « en aveugle » de déductions logiques — aussi irréfutables soient-elles — laisse une telle part au hasard qu'elle conduit le plus souvent à « tourner en rond » ou à des impasses qui semblent vite hors de notre portée. Et c'est justement pour cela que les Maîtres des siècles précédents conseillaient de ne pas se lancer ainsi, sans réflexion préalable, dans une tentative prématurée de démonstration et qu'ils prônaient de conduire tout d'abord une phase d'*analyse* qui consisterait, tout bonnement, en « l'assomption du concédé par les conséquences tirées de la fin et compréhension du requis… » !

Retraduisons : il faut désormais opérer en sens contraire de celui qui serait censé diriger la synthèse finale, il faut parvenir à *obtenir les données* en partant du *résultat cherché* !

Chacun est habitué depuis longtemps aux raisonnements par « double inclusion », à la distinction entre conditions nécessaires et conditions suffisantes, à la différence entre propositions directes et propositions réciproques, etc. Il est vrai que chacune de ces dualités possibles participe un peu à sa mesure à l'opposition qu'il convient de voir entre *analyse* et *synthèse*. Mais, en réalité, aucune ne traduit exactement la véritable distance qui sépare les deux phases, ne serait-ce que parce que la phase d'*analyse* dont il va être question désormais n'est nullement destinée à rentrer dans une rhétorique de preuve, mais qu'elle trouve essentiellement sa justification en tant que *stratégie de découverte*.

Rapportée aux problèmes de constructions que nous avons évoqués plus haut, la démarche d'analyse commence par la fameuse et très rituelle formule : « supposons la figure construite », et consiste à chercher — sur la figure ainsi postulée — des propriétés spécifiques qui sont *conséquences des propriétés requises*, mais qui seront *plus aptes à fournir une piste* permettant de raccrocher les éléments inconnus aux éléments donnés. C'est seulement à la *synthèse* que reviendra, dans un second temps, la tâche de justifier la piste ainsi pressentie… tout en en limitant éventuellement la portée au cours d'une troisième et dernière phase dite généralement « de discussion ».

Au niveau qui nous intéresse ici et qui est celui de la recherche d'une démonstration, l'*analyse* pourrait d'abord correspondre à ce que l'on appelle souvent le « chaînage arrière » (cf. figure 14). On notera cependant que la figure 14 ne traduit pas de manière évidente une différence substantielle avec la figure 10… si ce n'est que l'ordre alphabétique des propriétés schématisées suggère que celles-ci n'ont pas été obtenues en partant des hypothèses mais en partant de la conclusion !

Essayons de nouveau de traduire. A proprement parler, l'idée de « chaînage arrière » qui a été représentée (simplifiée) sur la figure 14, recouvre une démarche « arrière » au sens suivant : on a cherché (et trouvé) une propriété A qui *entraînerait* (si elle était vraie) la conclusion souhaitée, puis (compte tenu du théorème suggéré) on a constaté que cette propriété A *serait elle-même entraînée* par la propriété B (si elle était vraie), enfin on a réussi à déduire la propriété B des seules hypothèses… On a donc résolu le problème en procédant à reculons et il est clair que la *synthèse* ne consiste plus qu'à raconter le cheminement logique dans « le bon sens », c'est-à-dire en remettant dans l'ordre logique « naturel » l'enchaînement des propriétés et des propositions rencontrées. A vrai dire, on peut même envisager une rhétorique (ou une esthétique) de la démonstration finale qui conserve partiellement cet ordre inverse entre hypothèses et conclusions de chaque étape sous

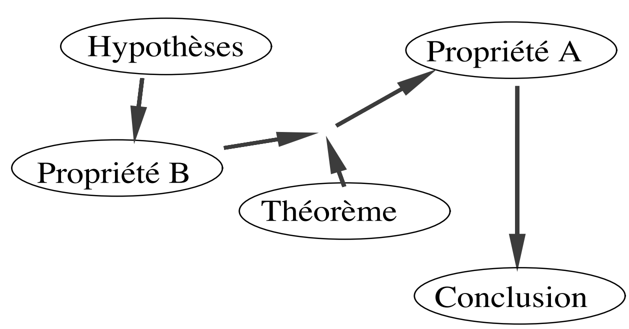


Fig. 14

une forme du type : « pour avoir ceci, il me suffit de prouver cela, or… etc. ».

Malheureusement, vue sous cet angle, l'analyse si chère aux Maîtres du passé n'a pratiquement plus aucune portée susceptible d'enrichir la pensée. Elle doit se contenter de concourir dans la catégorie « intelligence artificielle » où veulent la cantonner un trop grand nombre de créateurs des « résolveurs » qui sont soidisant destinés à l'apprentissage de la géométrie élémentaire. Ce n'est pas ainsi qu'il convient de lire la figure 14 pour ressentir la subtilité et la puissance de la « vraie » phase d'analyse contenue dans la méthode de raisonnement « par analyse et synthèse ».

Certes, il n'est évidemment pas inutile d'aborder un problème avec une « boîte à outils » garnie de théorèmes et de chercher à utiliser ces théorèmes *dans les deux sens* ! C'est-à-dire en se posant deux types de questions : d'une part — dans un mouvement direct correspondant au sens de la synthèse — « telle proposition s'appuie sur telles hypothèses dont je dispose ; que puis-je donc en déduire ? », d'autre part — dans le mouvement inverse — « telle proposition aboutit à telle conclusion qui m'intéresse ; puis-je faire appel à elle ? ».

Mais cette réduction de *l'analyse et synthèse* à une double tentative de « chaînage avant » et de « chaînage arrière » consiste tout au plus à en s'en remettre deux fois au hasard. On double évidemment ses chances en essayant de trouver le bon enchaînement en partant de l'hypothèse ou de la conclusion, mais on reste malheureusement prisonnier de sa seule collection de théorèmes, avec pour seul viatique l'idée de les appliquer directement, sans méthode efficace pour faire émerger des idées originales, spécifiquement adaptées au problème qui est posé.

Revenons à notre exemple du théorème de Morley et cherchons à développer cette idée du « chaînage arrière » à partir de la conclusion. Nous nous demanderons simplement *comment démontrer* que le triangle PQR est équilatéral. C'est-à-dire que nous chercherons dans notre « boîte à outils » les théorèmes ou les propositions qui permettent de conclure qu'un triangle est *équilatéral*… Nous commencerons donc par les plus immédiates : égalités des côtés, égalités des angles, et autres variations autour de la définition. Puis nous irons chercher plus loin des résultats nécessairement plus savants qui peuvent se rattacher à l'apparition de triangles équilatéraux : nous penserons par exemple à certaines caractérisations en termes de nombres complexes… ou même à un théorème comme celui de Napoléon que nous avons rencontré récemment… D'une certaine façon, les opportunités ne manquent pas, mais je laisse ici encore le lecteur se livrer aux spéculations qui lui paraissent le plus attrayantes. Il mesurera forcément la difficulté de la démarche, car on se rend vite compte qu'il ne suffit pas de savoir que telle ou telle idée aboutit à un triangle équilatéral pour que cette idée se révèle intéressante.

Mais il aura peut-être aussi la chance et la persévérance (pour ne pas dire le génie et l'entêtement) de découvrir à son tour une démonstration originale,… ou simplement de retrouver tout seul une démonstration déjà connue.

Le seul conseil qui puisse lui être donné à cet égard est toutefois de revenir au précepte indiqué par Viète : l'analyse est « l'assomption du concédé (c'est-à-dire l'obtention des hypothèses initiales) par les *conséquences tirées de la fin et compréhension* du requis »…

En réalité, le raisonnement par analyse et synthèse, ne se résume donc pas — dans sa phase d'analyse — à chercher *comment démontrer* que le triangle est équilatéral mais au contraire à se poser la question suivante :

> « Quelles sont les *conséquences* entraînées par le fait que le triangle PQR serait équilatéral ? » !

On va évidemment me rétorquer que « ce n'est plus du jeu ! », que je confonds allègrement conditions nécessaires et conditions suffisantes, que je mélange problème direct et problème réciproque, que l'on ne voit pas pourquoi on devrait chercher les conséquences logiques de ce que l'on veut prouver, alors que c'est bien au contraire ce que l'on veut prouver qui doit apparaître comme conséquence logique des hypothèses de départ ! Etc., etc.

Nous allons y revenir, mais retournons auparavant au problème posé par le théorème de Morley pour mettre en application les conseils donnés par Viète : penchons-nous sur la *fin et compréhension du requis*…

Bref : *supposons le triangle* PQR *équilatéral*…

Comme les sommets de ce triangle sont situés sur les côtés et sur la bissectrice de l'angle en P', un raisonnement simple (figure 16) qui consiste à projeter P sur les droites P'Q et P'R, puis à comparer les triangles rectangles d'hypoténuses PQ et PR montre que les sommets Q et R sont [en général…] situés à *égale distance* de P'.

Fig. 15

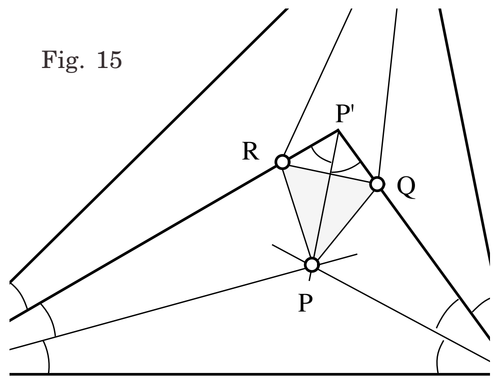
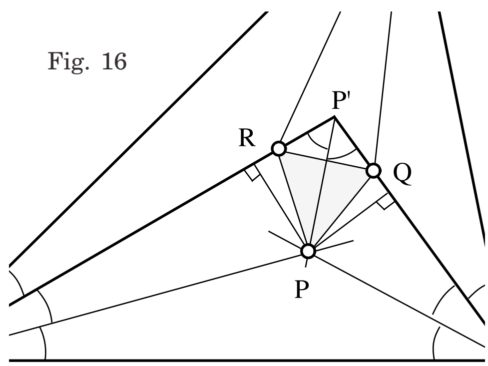


Fig. 16



Il s'ensuit donc en particulier :
— que le triangle P'QR est isocèle,
— que PP' (bissectrice de l'angle en P') est une hauteur du triangle PQR.

Nous en déduirons donc immédiatement, en permutant les sommets, que les trois droites PP', QQ' et RR' sont les hauteurs du triangle PQR et sont donc concourantes… Ce qui répond au passage à la question que nous avions laissée en suspens à la fin de la phase précédente. Il s'ensuivrait aussi, bien entendu, que ces trois droites font entre elles des angles de 60°… mais cela nous le savions déjà puisque nous l'avons démontré précédemment et que cette propriété-là a l'avantage de n'être pas hypothéquée par l'hypothèse supplémentaire faite sur le triangle PQR…

III — De l'art de la zétèse…

Avant d'aller plus loin dans la résolution du problème qui nous occupe, il convient de faire le point sur la méthode que nous tentons de clarifier en parallèle. Pour nous conformer, donc, aux prescriptions de Viète, il ne suffit pas de schématiser la phase d'*analyse* comme un simple « chaînage arrière » tel qu'il a été représenté sur la figure 14, mais bel et bien comme un raisonnement « réciproque » cherchant véritablement à aller de la conclusion vers les hypothèses. Nous serons donc amenés à renverser les flèches dans la figure 14 et nous obtiendrons désormais le schéma de la figure 17...

Mais en vérité, si nous nous reportons à la dernière étape du raisonnement que nous venons d'effectuer, nous constaterons qu'il n'obéit pas exactement à ce schéma de la figure 17. En effet, nous avons effectivement supposé la conclusion « PQR est équilatéral », mais nous avons aussi fait jouer un rôle essentiel au fait que PP' était la *bissectrice de l'angle en* P. En d'autres termes : nous nous sommes aussi servis des *hypothèses* ! Donc le « vrai » schéma auquel nous avons affaire est celui de la figure 18...

On pourrait croire que Viète s'est donc trompé en cantonnant l'analyse dans « l'assomption du concédé par les conséquences tirées de la fin et compréhension du requis » (figure 17), mais il n'en est rien. Pour lui, la figure 18 correspond à une phase qui porte un autre nom : la « zétèse » (ou « zététique », si l'on préfère), et qui désigne précisément la recherche des propriétés déduites de la donnée *simultanée* des hypothèses (le « concédé ») et de la conclusion (le « requis »). Si bien que nous pouvons parler « d'analyse pure » au niveau de la figure 17 et, plus précisément, de « zétèse » au niveau de notre nouvelle figure 18… La nuance s'explique, dans le contexte de Viète, par le fait qu'il s'intéresse principalement à la résolution de problèmes par l'algèbre. Mais nous sommes précisément ici en face d'une situation analogue à ce que nous rencontrerions si nous avions décidé de traiter le problème de manière algébrique : la *mise en équation* du problème consiste effectivement à considérer *simultanément* les données correspondant aux hypo-

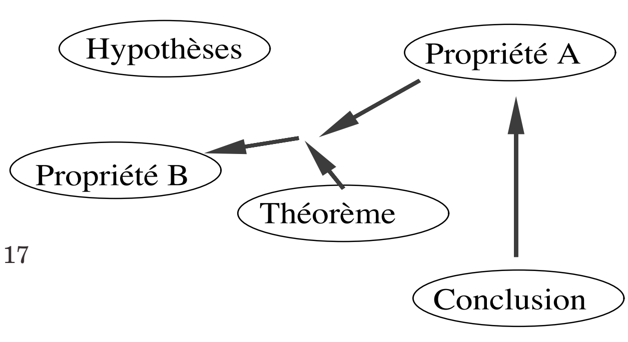


Fig. 17

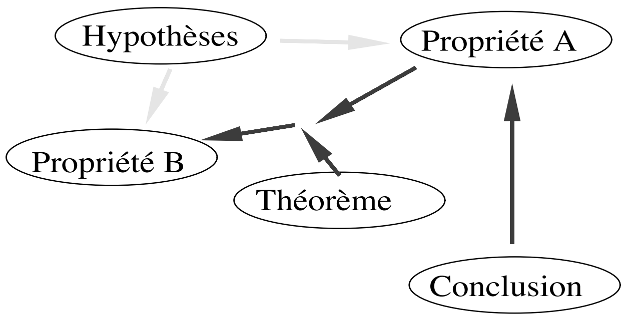


Fig. 18

thèses et les données correspondant aux inconnues pour les « mélanger » correctement de façon à en déduire la (ou les) relation(s) qui deviendront les équations à résoudre…

En matière de raisonnement plus spécifiquement géométrique il faut bien comprendre qu'en fait « tous les coups sont permis » dans la phase d'*analyse*, exactement de la même manière que « tous les coups sont permis » lorsque l'on cherche les équations qui régissent un problème ! Ce sera seulement ensuite à la phase de résolution de ces équations de dégager les solutions possibles, et à la phase de vérification d'éliminer ou non les valeurs qui ne conviendraient pas… Il en va de même en géométrie, car l'*analyse* est — au plein sens du terme — une phase *heuristique* pendant laquelle on cherche des idées pour construire un chemin logique, mais le seul but du jeu est le suivant : trouver des propriétés « susceptibles de devenir des intermédiaires » pertinents.

Peu importe la manière dont ces propriétés peuvent être découvertes. Il peut s'agir aussi bien de « chaînage avant en aveugle » (exemple D), de « chaînage arrière en aveugle » (exemple C), « d'analyse pure » (exemple E), de « zétèse à la Viète » (exemple B),… ou même de « simple parachutage intuitif » (exemple A)…

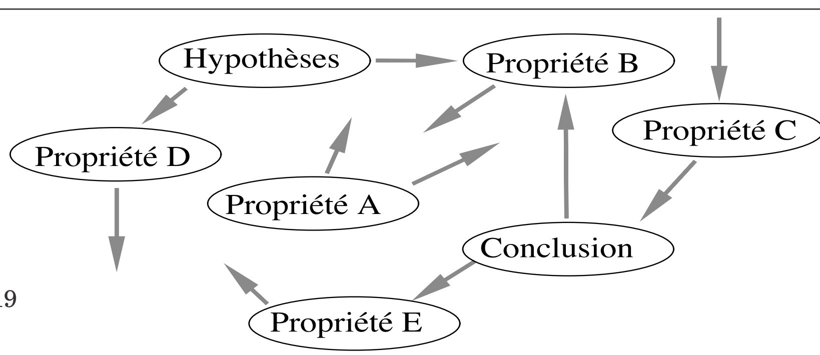


Fig. 19

Tous les coups sont permis car notre seul but est de *trouver des idées*. Et s'il peut paraître illogique *a priori* de faire appel à des propriétés qui se déduisent de la conclusion (les propriétés E ou B), ce n'est que par un excès de scrupule : ces idées-là sont tout aussi légitimes que les autres pour être intégrables dans un raisonnement définitif au moment de la synthèse. Simplement parce qu'il est clair qu'elles sont vraies et démontrables,… puisqu'elles résultent forcément *des hypothèses seules* à partir du moment où la conclusion elle-même est censée résulter de ces hypothèses ! Mais il est tout aussi clair qu'elles ne seront retenues pour le raisonnement final que si, une fois convaincus de leur validité, nous sommes capables d'en trouver une *autre* démonstration, *directe* et qui *ne passe pas* par la conclusion !… Et aussi, bien sûr, si nous sommes capables de nous en servir pour démontrer le résultat cherché…

Le mot « zététique » introduit par Viète vient du mot grec « zétète », qui signifiait « enquêteur », et nous ne sommes dans rien d'autre que dans une phase d'enquête qu'il nous faut bien désigner sous le nom de « raisonnement » ou, mieux, de « zétèse » : *raisonnons* d'abord, nous *démontrerons* ensuite, lorsque nous aurons trouvé la solution. Il n'y a malheureusement pas de règle universelle pour *trouver*. Et quelle que soit la propriété ajoutée à la figure 19, elle résultera du hasard, c'est-à-dire d'un choix qui dépend avant tout de la culture, de la mémoire, de l'imagination, de l'intuition… et aussi de la chance de celui qui cherche la solution. Mais en tout état de cause, il lui restera ensuite l'essentiel du travail et à justifier le chemin de la synthèse, alors même que les efforts qu'il a pu faire dans la phase d'exploration ne peuvent lui servir qu'*indirectement* dans le chemin du retour.

Si j'ai choisi ici le théorème de Morley, c'est d'abord parce que sa difficulté rend substantielles les différentes phases de la résolution, mais surtout parce que la fréquentation de cette propriété fascinante a permis de mettre au point (au cours de l'histoire) d'assez nombreuses solutions intéressantes. Nous allons nous attacher à deux d'entre elles qui me semblent illustrer la particulière richesse de la démarche. Nous commencerons par une démonstration très élégante découverte par Raoul Bricard en 1922 et qui montre la puissance un peu paradoxale que peut prendre le raisonnement « à l'envers » qui sous-tend la phase de zétèse.

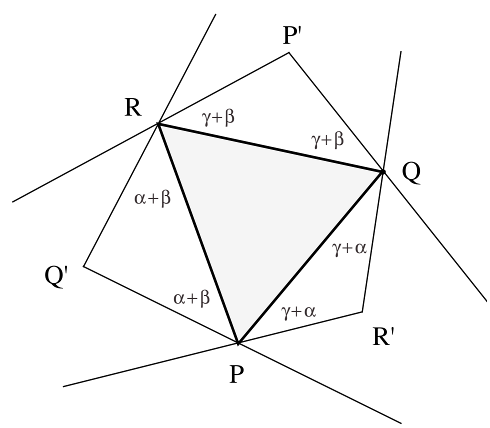


Fig. 20

Revenons en effet au début de celle-ci et aux figures 15 et 16. Nous nous sommes arrêtés précédemment sur le fait que le triangle P'QR est isocèle, mais — compte-tenu des notations introduites dans la figure 12 — il est clair que nous pouvons calculer *tous* les angles qui interviennent dans la figure… (Je laisse au lecteur le soin de calculer, par exemple, les angles en Q et R du triangle P'QR). Cela étant, décidons de chercher à reconstruire toute la figure en partant du triangle équilatéral PQR : donnons-nous un triangle équilatéral PQR de côté arbitraire et plaçons sur ses côtés des triangles isocèles convenables, c'est-à-dire des triangles QP'R, RQ'P et PR'Q ayant les valeurs que nous venons de calculer.

En prolongeant les demi-droites P'Q, R'Q, etc., on obtient un candidat pour devenir le triangle ABC :

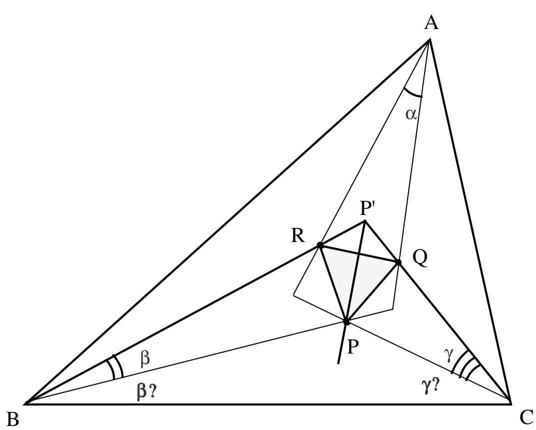


Fig. 21

Un calcul très simple — tout au moins en géométrie euclidienne — montre alors que les angles marqués α, β, γ sur la figure 21 prennent effectivement ces valeurs, compte tenu des valeurs que nous avons fixées pour les angles des petits triangles isocèles. Que manque-t-il alors au triangle ABC ainsi construit pour répondre à la question ?

Il faut avant tout que les droites BR, BP, QP, etc., soient effectivement les *trisectrices*. Or on voit facilement qu'il nous suffit (par permutation) de prouver, sur la figure 21, que les deux angles marqués d'un point d'interrogation prennent bien les valeurs β et γ nécessaires… On peut en fait le vérifier de bien des façon, mais il se trouve même que Bricard en a donné une raison particulièrement économique : un calcul tout aussi direct que les précédents montre que *la somme* des deux angles mystérieux vaut bien $(\beta + \gamma)$; il s'ensuit donc en particulier que l'angle au sommet du triangle PBC vaut $(\pi - (\beta + \gamma))$, ce qui est précisément *la valeur qu'il prendrait* si P était le point de concours des bissectrices dans le triangle BCP'… Mais le point P *est déjà sur la bissectrice* issue du sommet P'… et *c'est donc le bon*, puisque la propriété classique de l'arc capable montre à l'évidence qu'il n'y a qu'un seul point sur cette droite qui peut « regarder le segment BC » sous l'angle voulu…

De ce fait, le triangle ABC a exactement les bonnes propriétés et possède les mêmes angles que le triangle ABC d'origine… Ce n'est sans doute pas le bon puisque nous sommes partis d'une longueur arbitraire pour choisir ses côtés, mais il lui est nécessairement *semblable* et une dernière similitude bien choisie suffirait…

La beauté de ce raisonnement rend sa présentation sous forme de synthèse particulièrement délicate : c'est que nous sommes arrivés si près des hypothèses que nous sommes tentés d'oublier qu'au fond, ce n'est que parce que nous avons supposé au départ aussi bien lesdites hypothèses que la conclusion ! Et quand bien même serions-nous arrivés directement sur les hypothèses en partant de la seule conclusion… nous n'en serions pas pour autant dispensés — et pas pour des raisons de pure forme… — de justifier correctement le passage logique des hypothèses *vers* à la conclusion. Il nous faudra donc dire quelque chose comme :

a) *Théorème :* étant donné trois angles α, β, γ, tels que $3\alpha + 3\beta + 3\gamma = \pi$, il existe un triangle A'B'C' dont les angles sont égaux à 3α, 3β et 3γ, et dont les trisectrices se coupent de façon à déterminer un triangle équilatéral P'Q'R' conforme à la figure 1.

[*démonstration* : recopier ici la partie mise au point lors de la construction précédente]

b) Si ABC est un triangle donné dont les angles valent 3α, 3β et 3γ, considérons le triangle A'B'C' ayant les mêmes angles et dont le théorème précédent affirme l'existence. Il existe une similitude qui transforme A'B'C' en ABC et, *comme cette similitude conserve tous les angles*, elle envoie les trisectrices de A'B'C' sur les trisectrices de ABC et le triangle équilatéral P'Q'R' sur le triangle déterminé par les trisectrices de ABC. Celui-ci est donc équilatéral, ce qui prouve le théorème de Morley.

Voilà donc qui devrait convaincre le lecteur le plus suspicieux : le théorème est effectivement vrai, puisque nous venons de le démontrer ! Pouvons-nous penser pour autant — en revenant à la phrase d'Henri Poincaré — que cette démonstration nous donne le sentiment (voire l'illusion) que nous aurions pu *prévoir* le résultat ?

Je n'en suis pas sûr, tant elle semble « indirecte » (ou *de biais*, si l'on préfère) par son appel à une construction que l'on ressent un peu comme artificielle, malgré le côté indéniable que lui confère la phase d'analyse menée au préalable. C'est en fait le cas dans bon nombre de raisonnements par analyse et synthèse : un démarrage de l'analyse qui consiste à reconstruire la figure en faisant appel à des éléments déduits aussi bien de la conclusion que des hypothèses, finit sur une figure qui se trouve, d'une part être la seule possible et, d'autre part, posséder la propriété que l'on voulait démontrer. Nous sommes donc forcés d'admettre le résultat, puisque la seule figure qui réponde aux hypothèses répond aussi à la conclusion, mais nous ne savons pas trop pourquoi ! C'est un peu comme si nous étions en présence d'une démonstration « par l'absurde » qui nous forcerait à nous rendre à l'évidence face à une propriété qui ne se déduit pas vraiment d'un enchaînement de causes et d'effets, mais qui est tout simplement vraie *parce qu'il ne peut pas en être autrement…*

La deuxième démonstration sur laquelle je voudrais insister ici corrigera un peu cette impression, et elle illustre sans doute mieux les cas les plus fréquents. Comme nous l'avons vu jusqu'ici, une propriété intermédiaire éventuellement intéressante est apparue. Elle est en quelque sorte psychologiquement *surdéterminée* puisque nous l'avons rencontrée aussi bien « intuitivement » (à partir de la figure 13), que « zététiquement » au début de notre analyse : il s'agit de la concourance des trois droites PP', QQ' et RR'.

Si donc nous nous proposons de tenter une *synthèse* à l'aide de cette idée, nous chercherons à établir un cheminement logique qui devra surmonter (au moins) deux obstacles :

a) Les hypothèses initiales permettent-elles de prouver directement la concourance de PP', QQ' et RR' ?

b) Cette concourance (éventuellement jointe aux hypothèses initiales) permet-elle de prouver que PQR est équilatéral ?

Nous nous trouvons donc confrontés désormais à deux problèmes qui devraient être plus simples que le problème initial (si nous avons eu la chance de mettre le doigt sur une propriété pertinente), mais qui relèvent à leur tour d'une démarche « zététique » pour laquelle nous devrons de nouveau faire appel à toutes les ressources de notre intuition, de notre culture, de notre mémoire et peut-être même de notre agilité d'esprit…

Commençons par exemple par la deuxième étape et considérons donc que nous avons démontré — indépendamment de la conclusion, cette fois — que les droites PP', QQ' et RR' sont concourantes. En revenant à la figure 13 (sur laquelle nous avons prouvé, à l'aide des seules hypothèses, que les droites considérées font entre elles des angles de 60°) et en faisant appel à notre culture, nous voyons que leur point de concours est donc nécessairement le « point de Torricelli » du triangle PQR. Il nous reste même peut-être en mémoire une manière très pratique de construire ce point à partir d'un triangle quelconque : il suffit de construire des triangles équilatéraux sur chacun des côtés et de joindre leur troisième sommet au sommet opposé du triangle initial… (cf. figure 7).

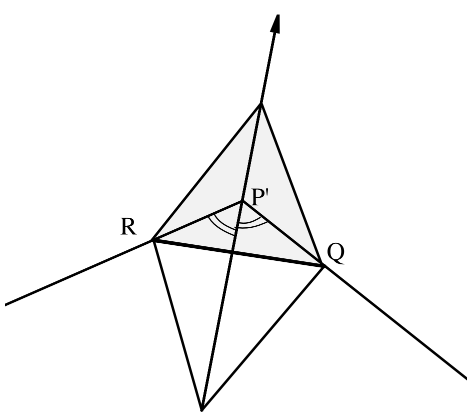


Fig. 22

Mais nous avons montré un peu plus tard (figure 16 de la phase d'analyse) qu'un triangle équilatéral dont les sommets sont sur les côtés et sur la bissectrice d'un angle est (du moins en général) *symétrique* par rapport à cette bissectrice… Les triangles équilatéraux permettant de construire le point de Torricelli sont certes « renversés » par rapport au cas de figure représenté sur la figure 16, mais notre « agilité d'esprit » nous permet de reconnaître la même propriété dans la figure 22 ci-dessus…

Que pouvons-nous donc en conclure ? Eh bien la même chose que dans la phase d'analyse : la droite PP' est un axe de symétrie de la figure 22 et chacune des droites PP', QQ' et RR' est donc en fait *médiatrice* du côté correspondant dans le triangle PQR ; si bien que celui-ci est bien *équilatéral*, puisque ses trois médiatrices passent par ses trois sommets…

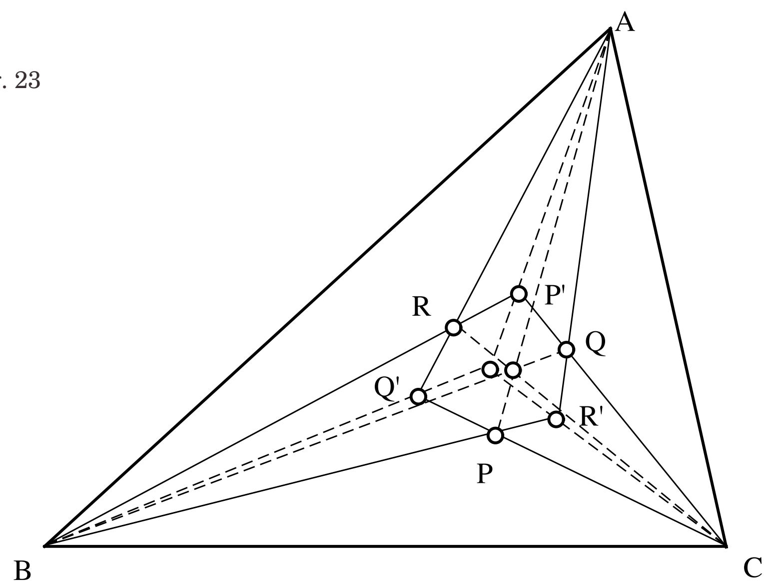
Cela démontre la seconde étape (qui n'est donc pas nécessairement vraie en géométrie non-euclidienne, comme nous l'avons remarqué précédemment), mais seulement à un détail près car notre raisonnement n'est apparemment valable que dans le cas « général » où nous pouvons conclure à la position symétrique des triangles équilatéraux par rapport aux bissectrices. Je laisse le soin au lecteur de surmonter cette difficulté relativement mineure ; il pourra par exemple voir à quelle condition sur les angles de ABC l'ennui se présente effectivement en un sommet P'… et en conclure que le seul cas exceptionnel totalement insurmontable (pour la démarche) serait celui où le triangle ABC aurait deux angles droits !

Il nous reste, pour terminer, à étudier la première étape de notre synthèse et à prouver directement sur la figure initiale que les droites PP', QQ' et RR' sont bien concourantes (ce qui est vrai même en géométrie non euclidienne). Ici encore, il nous faut au minimum

(« chaînage arrière »), commencer à chercher dans notre culture des résultats qui permettent de conclure à la concourance de trois droites… Ils sont très nombreux et il convient évidemment de s'intéresser en premier lieu à ceux qui nous semblent avoir un rapport avec le contexte. Mais ils dépendront aussi — et surtout — du « type de culture » du lecteur (expert et cobaye) qui a bien voulu nous suivre jusqu'ici… En vérité, les propriétés angulaires mises en jeu au niveau des trisectrices pourraient (par exemple) faire penser à certains, et de manière assez naturelle, à des propriétés bien oubliées aujourd'hui sur les « involutions de droites »… et la considération de l'hexagone PR'QP'RQ' rappellerait peut-être aussi à d'autres le « théorème de Brianchon »… Je laisse évidemment à chacun la liberté de dégager sa propre solution, mais nous touchons évidemment là à une des difficultés inhérentes à toute discipline : l'intuition doit toujours s'appuyer sur des connaissances ou sur une expérience que même la plus grande agilité d'esprit ne saura jamais complètement remplacer !

Toutefois, ici encore, servons-nous de notre culture, même si elle est plus moderne et plus récente que celle de nos aînés : nous savons (c'est la figure 9) que des égalités d'angles très simples et très larges permettent de prouver la concourance de certaines droites issues des sommets d'un triangle. Une simple confrontation de cette figure 9 avec la figure initiale formée des trisectrices permet immédiatement d'appliquer le résultats deux fois de suite, en regroupant de deux façons différentes ces mêmes trisectrices… Nous pouvons donc aisément conclure à la concourance des trois droites AP, BQ et RC en un point

Fig. 23



E, ainsi que des droites AP', BQ' et CR' en un point F.

Comme ce n'est pas encore la concourance espérée de PP', QQ' et RR' : il nous manque encore quelques idées.

Mais heureusement, l'intuition (ou la providence) ne sont jamais à bout de ressources et le lecteur saura certainement terminer la démonstration… et si la solution ne lui est pas encore entr'apparue, je ne peux que lui conseiller de prendre un crayon assez épais (mais pas trop !) et de renforcer en traits gras (et proprement !) les segments P'F, Q'F et R'F, ainsi que les côtés de l'hexagone PQ'RP'QR'…

Conclusion

Vous ne trouverez pas le mot « zétèse » dans les dictionnaires… Il n'a d'ailleurs jamais vraiment existé, même si François Viète a introduit le terme de « zététique » aux côtés des termes « d'exégétique » et de « poristique » qui désignaient alors respectivement les phases d'analyse et de synthèse. Et même si Henri Lebesgue a passagèrement parlé à cet égard d'une phase de « zéthèse ». Pourtant, l'étymologie ne peut guère lui conférer que le sens du mot « enquête ». Or c'est bel et bien « d'enquêtes » qu'il s'agit en géométrie, lorsque nous sommes confrontés à des problèmes qui nous résistent et devant lesquels nous paraissons si souvent complètement démunis.

Mais je n'ai pris ici le lecteur comme « cobaye » que parce que je l'ai supposé suffisamment « expert » pour comprendre et pour s'intéresser aux questions que pouvaient soulever, tout à la fois, un théorème difficile et le mystère même de la recherche, de la découverte et de la mise en forme d'une démonstration.

Qui serait, en définitive, mieux placé pour se prendre à un tel jeu, que celui ou celle qui utilise une grande partie de son temps et de son énergie pour tenter de communiquer à des élèves le plaisir et la fascination que peut parfois receler pareille promenade dans l'univers mathématique…

Enfin,… peut-être pas pour « communiquer le plaisir et la fascination »… Non les mots ne sont peut-être pas très bien choisis. Disons plutôt : « pour apprendre à des élèves à raisonner correctement » lorsqu'ils sont placés face à une énigme qui leur résiste un tant soit peu… A moins qu'il ne faille beaucoup plus simplement dire : « pour les faire progresser un tant soit peu dans cette discipline si difficile » et « pour les aider à développer — chacun à leur mesure — quelques capacités en matière de raisonnement » ?…

Peu importe, au fond. La question qui est posée aux professeurs est de transmettre avec la meilleure efficacité possible un héritage. Et cet héritage, en l'occurrence, est une science et cette science, comme toutes les autres sciences, nous confronte à des énigmes. Or la curiosité seule peut pousser à percer des énigmes… On aboutit dès lors à une problématique d'une simplicité confondante : comment aider un élève à être curieux et à percer des énigmes ?

Mais chacun sait bien que les deux termes de cette problématique sont déjà tellement reliés dialectiquement entre eux que le problème en devient presque immédiatement insurmontable : pourquoi être curieux si l'on est impuissant à résoudre quelque problème que ce soit ? comment acquérir des capacités à résoudre des problèmes si la première tentation est de ne pas s'en poser ? Je laisse ceux qui ont toujours des réponses simples aux questions les plus profondes nous proposer leurs solutions miracles en cette matière comme en tant d'autres. Les modélisations proposées par ceux qui se prétendent « didacticiens » et qui sont périodiquement imposées à l'Ecole par l'institution donnent en vérité un large éventail de ce qu'il est possible d'inventer comme « fictions », comme « chimères », lorsque l'on croit avoir trouvé un moyen plus efficace que d'autres pour conduire l'apprentissage des élèves… Quand ce n'est pas — plus ingénument ou plus cyniquement — pour éradiquer, purement et simplement, l'échec scolaire…

Au delà des modes, des naïvetés et des utopies, l'histoire tranchera peut-être. Il nous suffirait d'ailleurs de revenir à Jaïpur, à son Maharaja et aux deux symboles qui en survivent encore aujourd'hui pour nous inciter quelque peu à être prudent. L'observatoire le plus performant et le plus sophistiqué ne doit-il pas nous rappeler en permanence que les explications du monde les mieux reconnues à une époque sont toujours destinées à être répudiées pour être améliorées. Une « fiction de palais » n'est-elle pas, au contraire, le plus beau monument que l'on ne saura jamais inventer pour matérialiser l'idée que le « pouvoir » consistera éternellement, et uniquement, dans la faculté donnée à certains de contempler à loisir l'agitation quotidienne de la rue ?

La promenade que nous avons faite ici, à propos du théorème de Morley et du « raisonnement par analyse et synthèse » aura peut-être permis, je l'espère, de mettre en lumière quelques-unes des multiples difficultés qui sont susceptibles d'arrêter « l'expert »… et qui ne donnent donc qu'une traduction infime des difficultés auxquelles sont le plus souvent soumis les élèves !

Le « raisonnement par analyse et synthèse » n'est lui-même, évidemment, qu'une sorte de « fiction » destinée à mettre au clair une partie du fonctionnement de la pensée. C'est aussi — c'était aussi — une tentative pédagogique pour guider les élèves dans l'apprentissage du raisonnement. Il ne s'agit pas pour moi de dire ici qu'il faille remettre au goût du jour des méthodes qui, de toutes les manières, auront de fortes chances d'être en complet porte-à-faux avec la situation d'aujourd'hui. Il s'agissait au contraire de montrer d'une part la difficulté intrinsèque du raisonnement géométrique et, d'autre part, le défaut de certaines tendances actuelles à croire que c'est la « logique » (formalisée ou non, informatisée ou non) qui peut nous donner des fils conducteurs suffisants.

Comme nous l'avons vu, le « raisonnement » est d'abord une enquête au plein sens du mot et pas un « chaînage » qui décalquerait — tout en prétendant l'anticiper — une « démonstration » conduite de façon purement rhétorique…

Mais je voudrais avant tout avoir réussi à convaincre, au travers de ces exemples, de deux points qui me paraissent essentiels.

Le premier est que l'on ne résoudra jamais quelque problème que ce soit si l'on ne dispose pas au préalable *d'outils efficaces*. C'est-à-dire d'une *culture* susceptible de nourrir des réflexes, des intuitions, des analogies, des méthodes. Il ne sert à rien de s'imaginer que le professeur est capable, avec la meilleure volonté du monde, de *transmettre le sens* plutôt que des algorithmes et des savoirs-faire. Ceux qui le pensent se trompent lourdement.

Je ne mets évidemment pas en doute leur sincérité. Simplement, ils se trompent ; car personne ne fera jamais de sciences si on ne lui a pas transmis des outils qui ont été forgés par d'autres et si on ne lui a pas appris — terrible acharnement ! — à s'en servir efficacement. N'en prenons qu'un seul exemple : comment peut-on penser qu'un élève soit capable de décoder de lui-même le contenu de la figure 15 et de la « démonter » sous la forme de la figure 16 s'il n'a pas été patiemment et méthodiquement familiarisé avec toute la géométrie (de niveau collège) qui tourne autour des égalités de triangles ? Le mot « sens » n'est pas autre chose qu'un mot vide de sens qui ne saurait désigner, en définitive, que la *maîtrise* de situations — *l'illusion de la maîtrise !* — au travers d'outils que l'on a appris soi-même à *maîtriser*. Au-delà et à partir de ces outils, à chacun ensuite de se forger ses propres idées sur les choses, sur le monde, sur la vie… et même sur les outils qu'on lui a inculqués…

Une fois ce premier point admis, viendra alors la question tout aussi récurrente de la « formation au raisonnement », qui (avec celle du sens) remplit les professions de foi de tous ceux qui prétendent penser d'autant mieux sur l'école qu'ils sont moins confrontés à des classes. Il est clair que la géométrie, comme toutes les sciences et toutes les activités intellectuelles, réclame souvent — en plus des méthodes — une « agilité d'esprit » qui ne semble pas toujours équitablement partagée et sur laquelle le maître rêverait, pourtant, de savoir agir efficacement. Là non plus, les bonnes intentions ou les naïvetés n'auront jamais grand effet ! Et nul ne saurait prétendre que les tentatives d'antan pour inculquer — par exemple… — des méthodes telles que le « raisonnement par analyse et synthèse » aient été plus efficaces ou moins efficaces que d'autres. Elles participaient évidemment d'une rhétorique ressentie aujourd'hui comme désuète et contenaient leur part de « rigorisme » rituel, excessif et sclérosant. La question n'est surtout pas d'y revenir aveuglément, mais s'est-on souvent demandé de quelle rhétorique creuse, excessive et sclérosante relevaient les méthodes prônées actuellement ?

Comme je l'ai dit plus haut, le mot « zétèse » ne se trouve pas dans les dictionnaires. En cherchant un peu, cependant, on peut encore trouver dans quelques ouvrages du XIXème siècle le mot « syzétèse » composé à partir de la racine *zétèse*, qui signifie donc « enquête », et du préfixe « sy, sym, syn », qui signifie « ensemble, avec, en même temps ». Il s'agissait d'un procédé de style — une figure de rhétorique, si l'on préfère — qui consistait à « raisonner ensemble »,…

Un peu comme dans un texte qui commencerait par quelque chose comme « Cherchons donc à démontrer ensemble le théorème de Morley… » et qui continuerait en prenant le lecteur par la main, pour le guider un moment dans le dédale des difficultés à surmonter…

Mais dans quel but ?

Dans le seul but, sans doute, de donner le goût de la géométrie… Et en réaction, plus certainement, à la rhétorique désormais bien trop envahissante qui consiste à croire qu'il suffit de présenter un résultat mis rigoureusement en forme, pour avoir enseigné les mathématiques ou les sciences, ou même quoi que ce soit. En oubliant qu'il ne suffit pas d'apporter les réponses à des questions qui ne se posent pas. En oubliant que susciter le *goût de la géométrie*, c'est précisément susciter l'envie de se poser des questions…

La « syzétèse » n'est évidemment pas un remède miracle. Probablement même pas un remède du tout. Mais il lui incombe simplement de ne pas oublier le précepte que lui donne le poète :

> « *Il y a toujours un coin du voile qui demande expressément à ne pas être levé,* […] *c'est là la condition même de l'enchantement.* »

BREVES MULTIMEDIA

Géométrie 3D dynamique et enseignement

En juin 2004, des collègues de l'Irem de Strasbourg (Nicole Vogel, François Pluvinage, Michèle Chagnard) et des élèves de Première ES du Lycée Schuman de Haguenau ayant choisi l'option mathématique, ont animé à Strasbourg une vidéoconférence sur l'enseignement de la géométrie dans l'espace à l'aide de logiciels 2D ou 3D, au cours d'un colloque - IberoCabri - qui avait lieu au Mexique.

La réflexion engagée à cette occasion, quelques idées d'exercices et les animations construites pour les illustrer sont à présent accessibles sur le site IREM 2 :

http://irem2.u-strasbg.fr