UNE SEANCE DE CLASSE EN GEOMETRIE

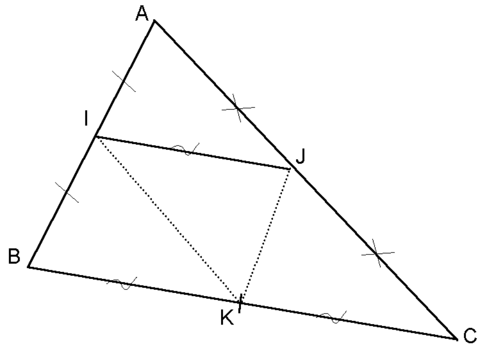
Michel CHEVALLIER
Hélène COLONNA
Irem de Rouen

Les principales difficultés de la géométrie au collège ne se situent pas, à notre avis, au niveau de la démonstration mais plutôt dans tout le travail d'appropriation et d'interprétation par l'élève de la tâche qui lui est proposée.

Pour un enfant de CM 2 qui arrive en 6ème, la géométrie se résume à des « dessins », des « tracés » qu'il doit observer, décrire ou exécuter. Les traces graphiques utilisées restent les mêmes durant les années collège mais leur statut change et donc le regard de l'élève doit évoluer. A la fin de son cursus au collège, l'élève doit être passé d'une géométrie de l'observation à une géométrie de la démonstration.

L'essentiel de cette mutation s'opère au cycle central et nécessite des outils spécifiques. La recherche et la construction de situations répondant à cet objectif nous ont occupés pendant quelques années et nous les proposons dans une brochure éditée à l'Irem de Rouen : *FIGURES ET SENS – VOIR POUR COMPRENDRE. COMPRENDRE POUR DEMONTRER*, Hélène COLONNA, Michel CHEVALLIER [CO].

Nous choisissons de vous présenter ici la situation appelée : « Du triangle … au triangle » extraite de cette brochure. Elle est proposée en début de 4ème, avec, objectif du programme : *les théorèmes relatifs aux milieux de deux côtés d'un triangle* [BO]. Bien entendu, ce travail n'a pas été conçu uniquement dans ce but mais aussi pour nous donner l'occasion de plonger l'élève dans une véritable situation d'apprentissage. Il va d'abord manipuler pour s'approprier les données. Puis il lui faut observer et généraliser, dans le but de faire émerger une figure de référence et dégager les conditions requises à l'obtention de cette figure :



Elle se déroule en deux parties.

Première partie :

Voici, dans l'encadré ci-contre, la première consigne, accompagnée du triangle témoin à conserver telle quelle par l'élève.

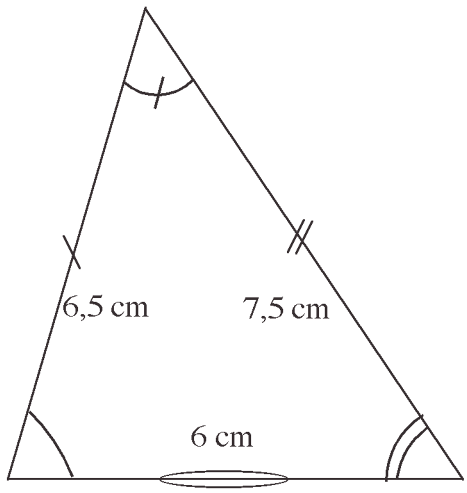
On distribue en même temps une feuille couleur sur laquelle ce triangle est reproduit une dizaine de fois. La couleur permet de bien percevoir la reconfiguration lors des juxtapositions sur fond blanc.

Dans un premier temps, il s'agit d'un travail individuel.

Le découpage et la manipulation favorisent l'appropriation de la situation. L'élève doit découper, bouger, tourner et juxtaposer des petits triangles pour obtenir un nouveau triangle plus grand. Ici, il doit utiliser la translation et la rotation des triangles donnés. L'assemblage de ces sous-figures (petits triangles), homogènes avec la figure finale

Consigne :

Tous les triangles construits sur la feuille jointe sont identiques au triangle d'origine ci-dessous :



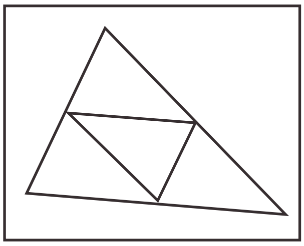
Découper des triangles.
Obtenir, en les juxtaposant, un nouveau triangle.
Construire la figure ainsi obtenue.
Observer et formuler toutes les remarques possibles.

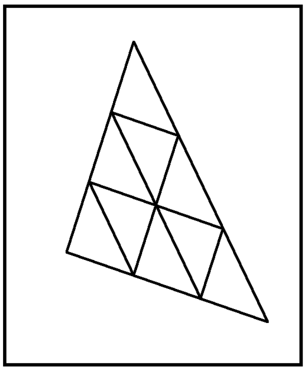
(grand triangle), fait travailler partiellement l'opération de reconfiguration [DU]. Ici, les éléments sont donnés séparément et il faut les « configurer » pour répondre à la consigne.

L'homogénéité des éléments de départ et d'arrivée facilite le travail. Plus loin dans l'activité, le parallélogramme (IJKB, par exemple) sera plus difficile à percevoir car hétérogène avec les autres éléments (triangles – parallélogrammes). Dans cette partie, c'est la rotation qui constitue un obstacle.

Un exemple de reconfiguration est donné dans l'activité « De l'aire ! » de la brochure où l'élève part d'un triangle et doit, après en avoir effectué un partage pertinent, assembler les éléments pour les *reconfigurer* en un rectangle.

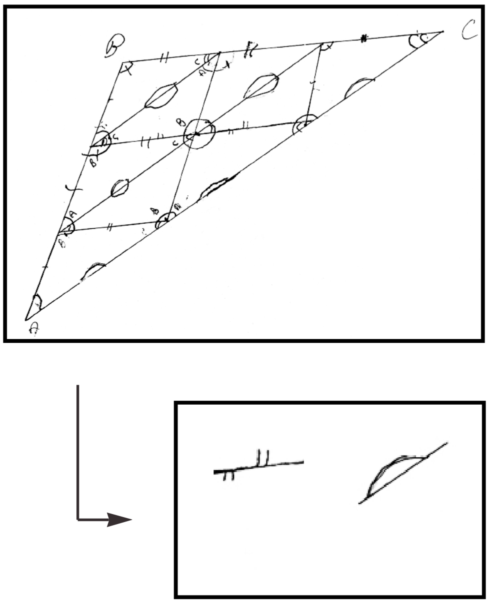
Quel est l'intérêt de travailler l'opération de reconfiguration ? Dans une figure banale d'un problème de géométrie de 3ème, avoir travaillé la reconfiguration permet à l'élève de voir et extraire la sous-figure pertinente pour la question posée et ainsi accéder à la démonstration.





Revenons à notre activité. Le nouveau triangle peut être composé de quatre ou neuf sous-figures compte-tenu du nombre limité de triangles de départ donnés par feuille. La situation offre cependant aux élèves la liberté d'imaginer les configurations plus grandes encore.

De fait, s'effectue naturellement un travail sur la proportionnalité des longueurs dans un triangle, sur les rapports d'aires et de longueurs dans ce cas d'agrandissement. Des phrases comme : « *C'est le même triangle qu'au départ sauf qu'il fait le double des longueurs des trois côtés…* » ou « *Il est quatre fois plus grand que le triangle d'origine…* » arrivent spontanément et enrichissent le débat de classe. Dans cette phase de travail individuel, les élèves doivent maintenant construire une figure qui reprend les caractéristiques du collage obtenu. En réalité, certains exécutent le dessin du collage, c'est-à-dire qu'ils ont là un fonctionnement de type photocopieuse …



comme en témoigne cette production dans laquelle le codage (grossi en bas) est uniquement la trace laissée par les découpages. La demande de construction formulée par la consigne est une première étape pour aller vers la généralisation. Après la manipulation, c'est-à-dire une appropriation par le concret, le dessin permet de se distancier de cette approche pratique.

Dans un deuxième temps, les élèves sont mis en groupe de quatre. Lors de la distribution des consignes, nous ne proposons pas le même triangle à tous afin de gérer l'hétérogénéité mais aussi de donner à la confrontation au sein du groupe la dimension généralisante qui fait accéder à la figure. Un triangle avec trois angles aigus et une « base horizontale » est distribué aux élèves les plus en difficultés. La forme du triangle (angle obtus ou non) et son positionnement sur la feuille (« sur une pointe » ou uniquement « des obliques ») sont les variables didactiques.

Voici la deuxième consigne de cette première partie :

Faire sur le transparent une figure qui correspond à la situation mais avec d'autres dimensions.
Se mettre d'accord sur ce qui est vrai et essayer de justifier ces remarques.

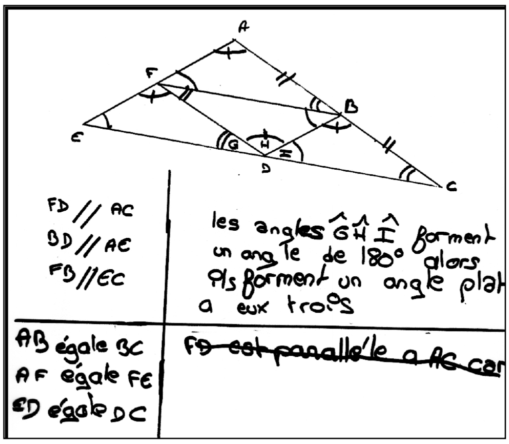
Les élèves doivent maintenant sortir de leur collage, travail particulier, pour accéder à la figure qui généralise la situation. La demande de « dimensions différentes» met l'accent sur ce passage : imposer d'autres dimensions oblige à prendre du recul par rapport au dessin, l'analyser pour en formuler les caractéristiques.

« Du vu au su », la figure traduit non seulement la réalité du dessin mais elle y attache aussi tout le discours issu de l'analyse.

Deux démarches sont alors observées au sein de la classe :

— construction d'un premier triangle et, de proche en proche, obtention de la configuration attendue ;
— construction du triangle final et décomposition pour retrouver les quatre sous-figures.

Les deux méthodes témoignent de l'état de maturation des groupes dans l'appréhension du concept de figure : certains sont encore au stade du dessin, d'autres ont parfaitement intégré la fonction généralisante de la figure. Le travail accompli dans la première partie et une certaine maîtrise de la fonction du codage (travaillée régulièrement en classe) facilitent l'analyse et la mise en mots de ce qui est attendu. La réalisation graphique de la figure permet une appréhension intuitive de ses propriétés et la demande de justifications s'inscrit naturellement dans la démarche. La démonstration est présente car elle revient à mettre en forme ces justifications. Les remarques formulées dans les très nombreuses classes expérimentées ont toujours été pertinentes même si elles n'ont pas toujours été correctement justifiées. L'alignement, si intuitif pour les élèves qu'ils pensent rarement à le justifier, est spontanément abordé, plus ou moins adroitement :



je suis sûr que c'est un triangle car mes trois anges différents du départ sont côte côte sur les 3 côtes donc ça donne un ange plat

La somme de chaque angles des triangles fait 180
$\widehat{CHI} + \widehat{JKB} + \widehat{JKI} = 180°$
Donc CKB ~~est~~ sont aligné.

$\widehat{BFE} + \widehat{EFD} + \widehat{CFD} = \widehat{BEF} + \widehat{FED} + \widehat{AED} = \widehat{CDF} + \widehat{FDE} + \widehat{EDA} = 180°$

Cette production de groupe témoigne du souci de justifier l'alignement des points C, D, E. Voici (ci-dessus) d'autres formulations…

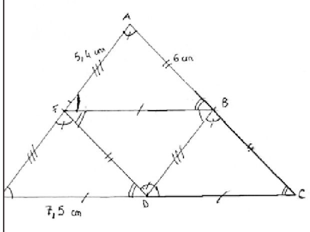
Dans cette séquence, nous sommes passés par les trois temps qui structurent le savoir :

OBJET
↓
DESSIN
↓
FIGURE

C'est-à-dire :

MANIPULATION
↓
REPRODUCTION
↓
GÉNÉRALISATION

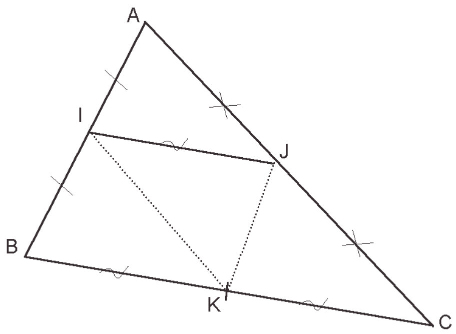
Les productions des élèves permettent de démontrer, en débat de classe, l'alignement des points sur les côtés du grand triangle et le parallélisme des droites (voir page suivante). La synthèse écrite de cette première partie (page suivante) exprime l'ensemble des caractéristiques de la figure finale, il reste à faire émerger les conditions néces-



$\widehat{AFB}$ et $\widehat{FBD}$ sont alternes-internes, donc (BD) et (AF) sont parallèles.
$\widehat{DFB}$ et $\widehat{FBA}$ sont alternes-internes, donc (FD) et (AB) sont parallèles.
$\widehat{FDE}$, $\widehat{FDB}$, $\widehat{BDC}$ forment un angle de 180°.

saires à l'obtention de cette configuration qui permettront d'énoncer les propriétés de la droite des milieux.

Synthèse écrite de la première partie



ABC *est un triangle*
I *est le milieu de* [AB]
J *est le milieu de* [AC]
(IJ) // (BC)
IJ = BC/2

Deuxième partie :

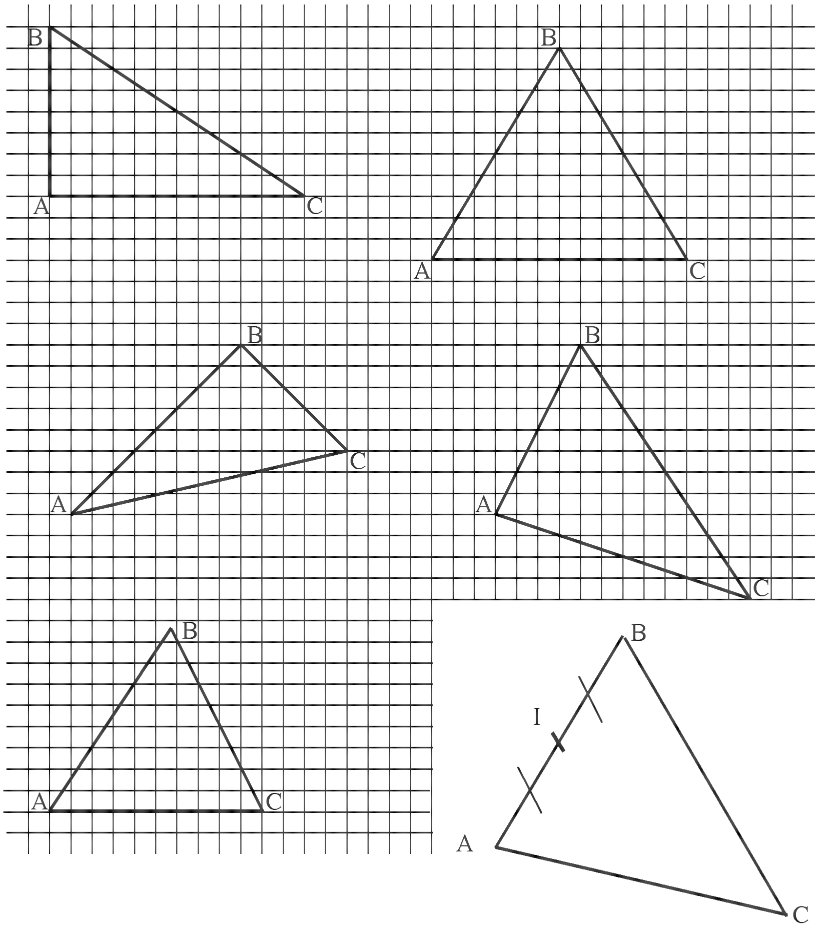
Une figure est un produit fini : elle possède en elle à la fois les données d'un problème et les conclusions attendues. Elle est une représentation graphique fixe d'une pensée qui évolue. C'est là que se situe la difficulté du jeu mathématique du « si … alors … ».

Cette deuxième partie doit permettre de bien identifier et séparer les conditions d'entrée et les assertions de sortie relatives aux propriétés visées. On travaille maintenant uniquement sur la version des quatre triangles.

Elle se déroule en une heure. Chaque élève reçoit la fiche ci-contre (ici réduite) et travaille seul environ 15 minutes. La séance se poursuit en débat de classe, au rétroprojecteur, où chacun peut justifier sa démarche sur un transparent de cette fiche (prévoir plusieurs transparents vierges car les élèves sont souvent inventifs et les démarches peuvent être variées).

De cette séquence on veut faire émerger les deux démarches possibles pour retrouver la figure de référence :

Consigne :
Partager chaque triangle en quatre triangles superposables sans utiliser la règle graduée. Expliquer la démarche pour chaque triangle.



milieu (M1) + milieu (M2) $\longrightarrow$ parallèle (//)
ou
milieu (M1) + parallèle (//) $\longrightarrow$ milieu (M2)

C'est dans ce but que l'éventail des triangles ABC a été construit, avec cet ordre lorsqu'il est sur le quadrillage, ensuite sans.

Dès la figure 1, deux démarches sont possibles pour trouver le milieu de [BC].

— Tracer la parallèle à (AC) passant par le milieu de [AB] ; on utilise alors « un milieu, puis la parallèle à un côté pour placer le deuxième milieu » (encadré 1 ci-dessous).

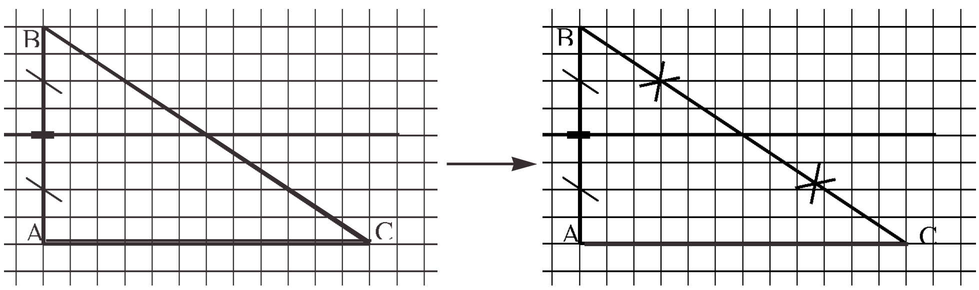
— Tracer la deuxième diagonale du rectangle ABXC construit à partir du triangle ; on utilise alors « le milieu de [AB], le milieu de [BC], et on obtient la parallèle à (AC) (encadré 2 ci-dessous).

Le triangle 2 est isocèle. Par simple comptage de carreaux, on obtient le milieu de l'axe de symétrie [BH].

Trois démarches sont possibles ensuite :

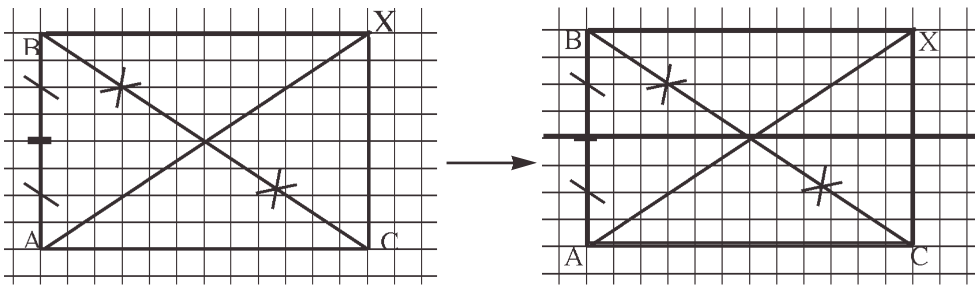
— Tracer la parallèle à (AC) passant par ce milieu qui donne les milieux de [AB] et [BC] (encadré 3 ci-contre).

— tracer les rectangles AXBH et HBYC dont les diagonales donnent les milieux de [AB] et [BC] (encadré 4 ci-contre).



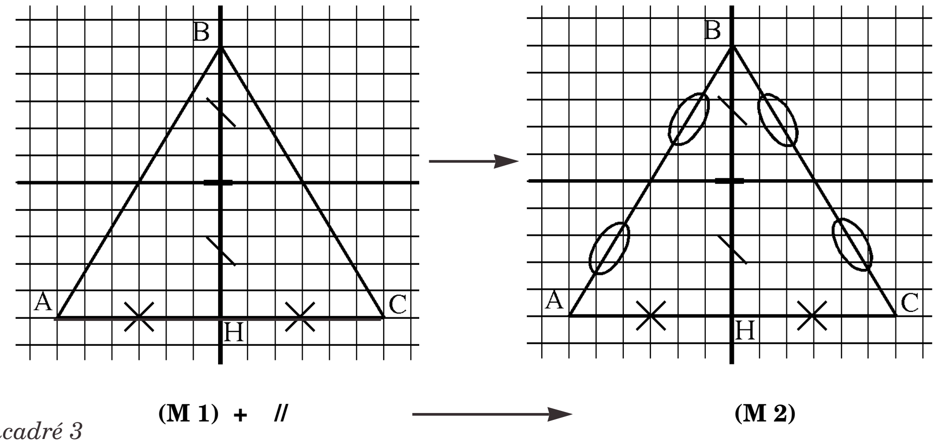
(M 1) + // ⟶ **(M 2)**

encadré 1

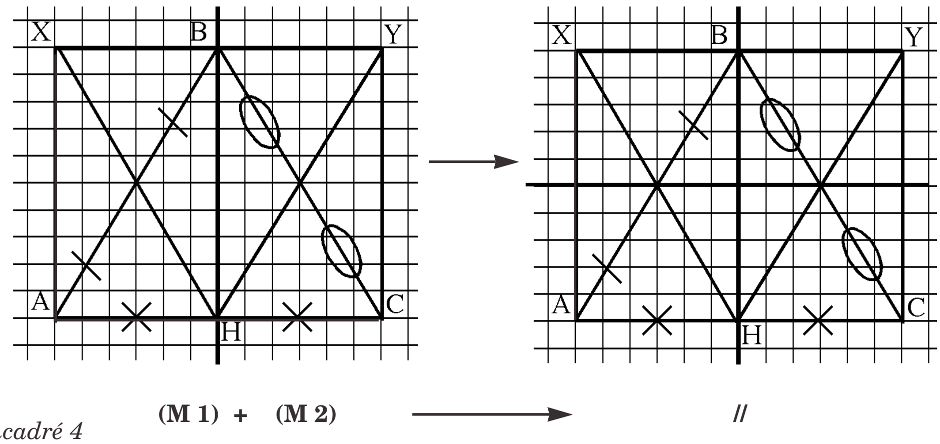


(M 1) + (M 2) ⟶ **//**

encadré 2



encadré 3

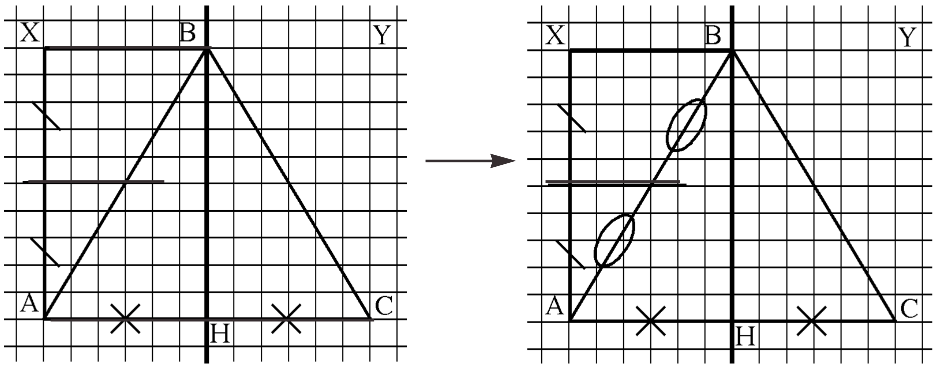


encadré 4

— Tracer le triangle rectangle AXB, placer le milieu de [AX], tracer la parallèle à (XB) passant par ce milieu pour obtenir le milieu de [AB] ; de même pour le milieu de [BC] (encadré 5 de la page suivante).

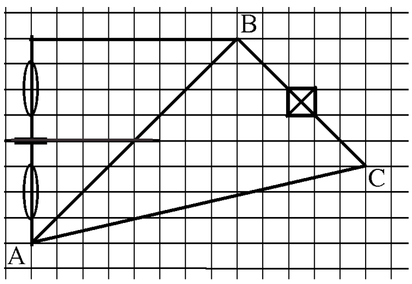
Le triangle 3 n'offre plus le même confort de comptage de carreaux.

Les trois milieux peuvent être construits en utilisant la même méthode sur les trois côtés. Chaque côté est la diagonale d'un rectangle

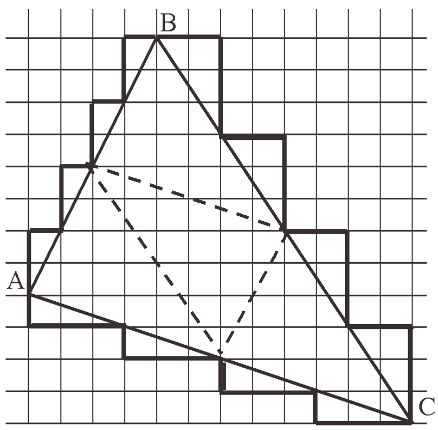


encadré 5 **(M 1) + //** → **(M 2)**

construit sur le quadrillage, la deuxième diagonale le coupe en son milieu. Les milieux donnent les parallèles. Si cette démarche n'a pas été encore découverte dans la recherche individuelle, il reste d'autres possibilités. La méthode du triangle rectangle construit sur le quadrillage et qui admet [AB] comme hypoténuse ne peut être reproduite sur [BC] et [AC] parce qu'on a choisi un nombre impair de carreaux à la construction.



Ce qui ne démonte pas les plus dégourdis qui tracent la diagonale du « carré quadrillage » du milieu de [BC] … mais ne peuvent le reproduire sur [AC]. L'utilisation des diagonales des rectangles ou carrés peut être l'unique démarche sur les triangles 1, 2, 3 et 4 dès lors que le simple comptage de carreaux n'est pas possible. On trouve cependant une remarquable adaptation de certains :



Cette méthode pour trouver les milieux des segments tient-elle au fait qu'il y a un nombre pair de petits rectangles superposables construits sur ces côtés ? Sans doute ces élèves utiliseraient enfin la propriété des diagonales sur le rectangle du milieu si ce nombre était impair…

Pour aller plus loin et sortir du quadrillage, nous proposons les triangles 5 et 6. En 5 (encadré 6 ci-dessous), malgré le quadrillage, le positionnement de B ne permet plus ni le comptage, ni l'utilisation des rectangles sur [AB] et [BC]. Il y a maintenant obligation de construire des parallèles avec les instruments usuels et la démarche :

(M 1) + // ⟶ **(M 2)**

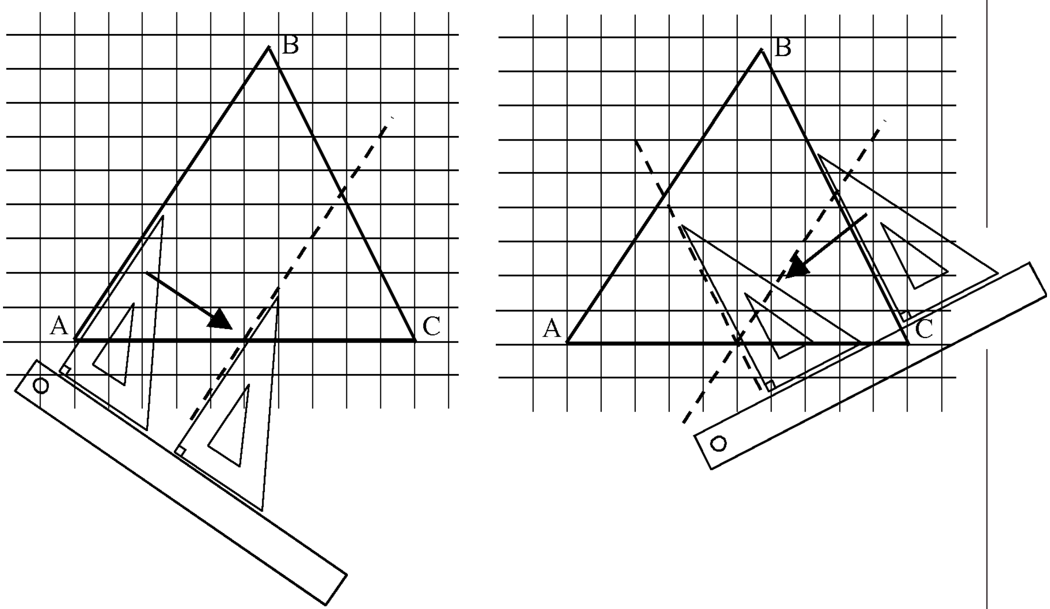
est obligatoire.

On retrouve ces constructions des parallèles sur le dernier tracé qui n'a plus l'appui du quadrillage.

On clôt la séquence en énonçant les deux propriétés correspondantes :

1— Si, dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés alors cette droite est parallèle au troisième côté de ce triangle.

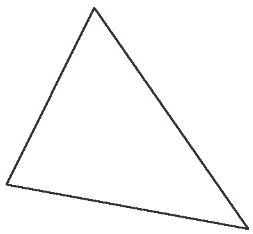
2 — Si, dans un triangle, une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un deuxième côté, alors cette droite passe par le milieu du troisième côté.



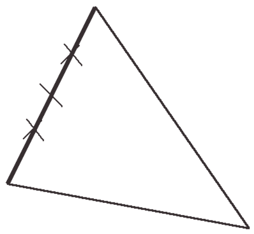
encadré 6

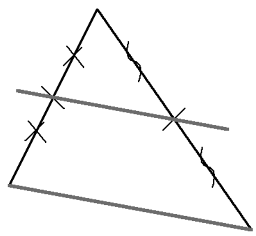
Cette situation a l'avantage de ne faire appel qu'à deux registres : celui de la langue usuelle et celui des figures. Pour ne pas que les figures codées soient un obstacle supplémentaire à la résolution des problèmes de géométrie, il nous semble intéressant, chaque fois que c'est possible, de mettre en parallèle ces deux langages, comme dans l'ancadré ci-dessous.

Si,

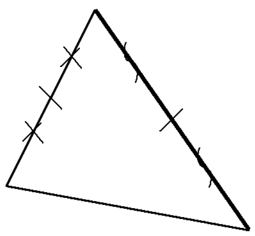


dans un triangle,





un point est milieu d'un côté **alors** **la droite passant par ces deux points est parallèle au troisième côté**



et un autre point est milieu d'un deuxième côté,

Ces deux séquences autour de la droite des milieux s'enchaînent avec une logique que nous affectionnons :

— dans la première nous partons des sous-figures (petits triangles reproduits à l'identique et découpés) pour aboutir au grand triangle, figure de référence ;

— dans la deuxième nous partons du grand triangle dans lequel il faut reconstruire les sous-figures pour obtenir la figure de référence.

Cette double étude sur le triangle de référence : « 1 — *je construis mon ouvrage pierre par pierre ;* 2 — *dans cet ouvrage construit, je retrouve chacune des pierres* » favorise la connaissance de l'objet étudié.

Découper, assembler et « dessiner » favorisent l'entrée de tous les élèves dans la démarche souhaitée et une réelle réflexion s'engage au niveau de chacun. La reconnaissance de leur travail, mis en commun et enrichi par les échanges, leur fait vivre ce temps d'apprentissage comme un plaisir et s'inscrit dans la mémoire de classe. Ils y font référence ensuite, ce qui donne de la cohérence aux apprentissages et évite le morcellement des connaissances.

« Du triangle au triangle » vise à installer les propriétés de la droite des milieux. En même temps elle fait fonctionner la proportionnalité : lorsque nous abordons la propriété de la proportionnalité des longueurs dans un triangle, on peut réutiliser cette séquence de travail avec l'assemblage des neuf triangles. On aborde aussi de façon très efficace le problème du rapport longueurs/aires.

On travaille également plusieurs points nécessaires à une meilleure compréhension de l'image en mathématique :
— la dualité de la trace graphique, tantôt dessin tantôt figure ;
— l'analyse des propriétés attachées à une situation ;
— la nécessité de s'organiser pour une construction ;
— la capacité d'extraire des sous-figures ;
— la nécessaire distinction entre les données et les conclusions …

Cette activité fait partie des « activités pour le cycle central » décrites dans la brochure citée en introduction. Nous y proposons également une réflexion sur grandeurs/mesures et un travail à mener en classe sur les illusions d'optique. Tout cela pour *Apprendre à voir, voir pour comprendre, comprendre pour démontrer*.

Bibliographie :

[BO] B.O.E.N. (1997), n° hors série du 13 février 1997, volume 1, p. 32.

BAZIN J.-M., (1994), *Géométrie : le rôle de la figure mis en évidence par les difficultés de conception d'un résolveur de problèmes en EIAO* in Vingt ans de didactique des mathématiques en France, La pensée sauvage éditions.

BLOCK J.-R., YUKER H.-E., (1994), *Vous n'en croirez pas vos yeux*, Éditions Solar, Paris.

CIIIM (Commission Inter-IREM Image et Math), *Images et Maths,* Bulletin Inter-IREM.

[CO] COLONNA H., CHEVALLIER M., (2003), *Figures et sens. Voir pour comprendre, comprendre pour démontrer*, IREM de Rouen.

Commission Inter-IREM de géométrie, (1996), *Problèmes de géométrie, rôle de la figure,* Actes du colloque Commission Inter-IREM de géométrie, Bayonne.

Commission Inter-IREM Histoire et Épistémologie des mathématiques, (1993), *La figure et l'espace,* Actes du 8ème colloque Inter-IREM, Lyon, 31 mai et 1er juin 1991.

Commission Inter-IREM Premier cycle, (1995), *Autour de Thalès.*

Commission Inter-IREM Premier cycle, (1996), *Mesurer – compter – modéliser. Enjeux d'une formation et d'une culture mathématique.* Actes du colloque commission Inter-IREM, Rouen.

COSTE-ROY M.-F., KNERR P., MARTZLOFF J.-C., TRAN-DANG R., *Tout (ou presque) ce que vous avez voulu savoir sur le Théorème de Pythagore sans jamais oser le demander,* IREM Paris Nord.

[DU] DUVAL R. (1994), Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique in Repères – IREM n° 17 octobre 1994.

FOURREY E., (1907), *Curiosités géométriques,* Librairie Vuibert, Édition 1994, Paris.

IREM de Montpellier, *Le codage.*

IREM de Strasbourg (1988), Annales de didactique et de sciences cognitives, Volume 1.

IREM de Strasbourg (1989), *Annales de didactique et de sciences cognitives,* Volume 2.

LABORDE C., (1994), *Les rapports entre visuel et géométrique dans un EIAO* in Vingt ans de didactique des mathématiques en France, La pensée sauvage éditions.

LOMBARDI H., *Éloge du papier quadrillé* in Repères – IREM n° 45 octobre 2001.

PADILLA-SANCHEZ V., (1992), *L'influence d'une acquisition de traitements figuraux pour l'apprentissage des mathématiques*, Thèse en didactique des mathématiques.

PRACHE D., (2001), *Les plus belles illusions optiques*, Circonflexe.

RAUSCHER J.-C., (1994), *Les enjeux de l'enseignement de la géométrie au début du collège et leur prise en compte par les professeurs* in Vingt ans de didactique des mathématiques en France, La pensée sauvage éditions.

ROUCHE N., (1992), *Le sens de la mesure,* Didier Hatier, Bruxelles.