# ENSEIGNER AVEC DES DOCUMENTS EN LIGNE

François PLUVINAGE
Irem de Strasbourg

### *1. Des espaces d'enseignement équipés et ouverts sur le monde.*

L'exercice traditionnel de mathématique est censé être adressé à un élève équipé de crayon et de papier, éventuellement d'instruments de tracé géométrique et d'une calculatrice, pour une durée dans le temps étroitement limitée. Le choix par les professeurs d'activités à proposer est évidemment très orienté par un tel « cahier de charges ». L'environnement informatique, avec l'accès Internet, modifie considérablement les conditions de travail. L'utilisateur se trouve dans :

1) la plus grande bibliothèque et médiathèque du monde,
2) un laboratoire doté d'équipements avancés.

Notre vision de l'enseignement peut s'en trouver ainsi profondément modifiée. Pour intéressante que soit l'évolution, elle n'a pas que des aspects positifs, ainsi qu'en témoigne le courrier suivant, récemment arrivé dans ma boîte aux lettres électronique.

> « Lassé de voir les étudiants naviguer sur le *web* ou lire leur courrier pendant que je donne des explications, je teste le logiciel *NetOp School* qui permet de bloquer les postes des étudiants et montrer mon écran à tous les postes de la salle. Ce logiciel permet aussi de montrer l'écran d'un étudiant à tous et possède encore d'autres fonctionnalités. Je ne peux que recommander ce type de solution pour les formations sur ordinateurs. »

C'est que la salle de cours ou de travaux pratiques n'est plus l'univers protégé, en quelque sorte séparé du monde extérieur, dont des générations d'écoliers et d'étudiants ont eu la pratique pendant leurs études. Plutôt que des mesures coercitives et inquisitrices comme celles présentées ci-dessus, l'action éducative me paraît recommandable.

Ayant consacré un autre texte (voir bibliographie) à la recherche d'informations sur Internet et à leur organisation, je ne développerai pas cette question ici. C'est la présence de l'expérimentation en mathématiques qui nous intéressera plus particulièrement.

***2. Mathématique et genèse instrumentale.***

L'introduction de nouvelles modalités de travail, quelque simples d'emploi qu'elles aient été conçues, ne va pas sans entraîner la nécessité de nouveaux apprentissages. Pour l'enseignement, le cas le plus intéressant est lorsque ceux-ci vont de pair avec des acquisitions mathématiques. Nous songeons à ce propos à l'usage de tableurs-grapheurs, d'outils de calcul formel et d'outils de tracé géométrique. Pour toute appropriation de ce type, nous reprenons ci-dessous un schéma général qui

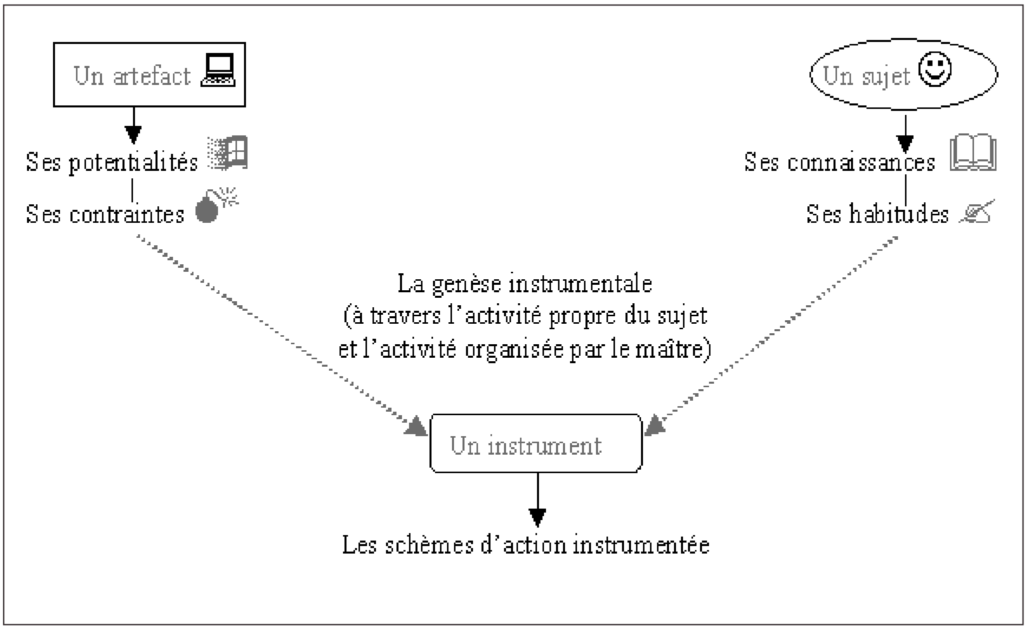


Figure 1 : *D'un outil à un instrument (d'après D. Guin & L. Trouche, 2002, p. 98)*

a été proposé par Dominique Guin et Luc Trouche.

Dans le cas qui nous intéresse, celui d'un artefact destiné notamment à des traitements mathématiques, la genèse instrumentale va en quelque sorte entremêler des acquisitions particulières avec des acquisitions générales. Une *genèse* bien organisée par le professeur et une *institutionnalisation* bien conduite doivent permettre aux élèves de situer convenablement ces acquisitions.

L'instrument est appelé de toute façon à évoluer (l'histoire récente montre que l'outil informatique, quel qu'il soit, a une durée de vie bien inférieure à celle qu'a eu par exemple la faux comme instrument d'emploi courant) et, s'il est effectivement intéressant, à être reproduit ou recréé sous des formes voisines mais non identiques. Il ne s'agit donc pas de former des spécialistes, mais des usagers susceptibles de s'adapter à des changements de l'instrument ou à des mises en circulation de nouvelles versions.

Un exemple sur lequel nous avons récemment travaillé en formation dans le cadre de la géométrie montre bien comment des connaissances de nature diverse s'entremêlent. Il

**Problème *fil rouge***. *Sur un demi-cercle d'extrémités A et B, on considère deux points quelconques M et N. Quel est l'ensemble des milieux I des cordes MN ?*

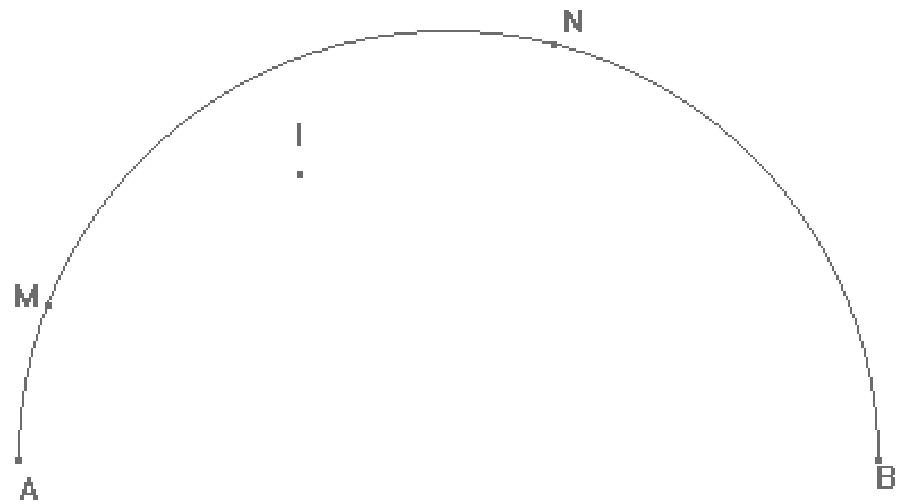


Figure 2 : Milieu I d'une corde d'extrémités M et N sur un demi-cercle AB.

nous servira de fil rouge. Le problème à étudier était le suivant, volontairement retenu en fonction de tout ce que les programmes scolaires d'aujourd'hui pour les lycées français *dissimulent* du cercle.

Les *fans* de GEOPLAN ou SKETCHPAD transposeront mes propos, qui sont issus d'une mise en œuvre de CABRI. L'énoncé du problème adressé à un public de professeurs en formation continue s'avère déclencher des comportements mathématiques de recherche de lieux géométriques (thème bien en place dans le bagage des *connaissances mathématiques des sujets*). L'expérience montre que des élèves ont davantage tendance à se lancer dans une exploration des commandes du logiciel. Plus avant, la figure 4 montre une telle exploration, peu concluante.

Les menus de CABRI comportent bien une commande de lieu géométrique, mais, ici, l'énoncé indique **deux** points mobiles. Le recours à l'aide intégrée (voir en figure 3 l'indication donnée au bas de l'écran) ne permet pas de prévoir le comportement du logiciel. Mais un **essai** avec sélection de I, puis de N comme point mobile, montre que CABRI trace le lieu de I en fonction de N, le point M étant considéré comme fixé, c'est à dire que I apparaît comme $I = f_M(N)$. Comment mettre alors en évidence l'effet des choix possibles de M ?

Deux idées notamment apparaissent réalisables : ou bien la **discrétisation** du problème, en dotant le demi-cercle d'extrémités A et B d'un réseau de points $M_i$ et $N_j$ , ou bien une mise en évidence par un **mouvement**. La première s'appuie sur une bonne vision mathématique, mais est alors simple à mettre en œuvre en s'aidant du tracé d'un polygone régulier. Et l'aide en ligne de CABRI indique comment procéder pour obtenir un tel tracé.

La figure 4 montre le résultat, où l'on aperçoit une apparence de coupole, à partir de laquelle la réponse à l'exercice s'impose (reste à la prouver). La seconde peut conduire à recourir à la commande *trace* du logiciel. Elle nécessite moins de culture mathématique, mais sollicite davantage les fonctionnalités du logiciel. L'aide en ligne sur la trace est assez obscure, pour quelqu'un qui n'a pas fait l'expérience. Elle dit textuellement : « *Sélectionne ou dessélectionne* (sic !) *l'option d'affichage de la trace d'un objet dans ses déplacements. Cette option, attachée à un objet, reste active tant qu'elle n'a pas été annulée*.» De plus, il faut savoir qu'un *lieu* est un *objet* pour le logiciel, même si par exemple un cercle obtenu comme lieu n'est pas un cercle de plein droit (on ne peut par exemple pas y localiser un point d'intersection avec une droite). En conséquence, il est possible d'activer une trace pour un lieu.

De toute façon, aucun des professeurs de notre observation n'a eu recours à la commande *trace* pour cette étude. Quand cette possibilité leur a été indiquée, il est même apparu nécessaire de leur préciser comment obtenir des tracés à la suite de *l'activation de trace* pour un objet. Ensuite l'essai de copier dans un fichier une figure ainsi obtenue a conduit à la surprise que les traces ne sont pas du tout copiées. Ainsi, la figure 5 que nous avons représentée **ne résulte pas d'une copie de figure** dans CABRI. En l'observant attentivement, les connaisseurs du logiciel peuvent retrouver quel a été son parcours, depuis CABRI jusqu'à cette figure insérée dans un texte.

La trace qui est présentée dans la figure 5 n'est pas celle d'un lieu de I,

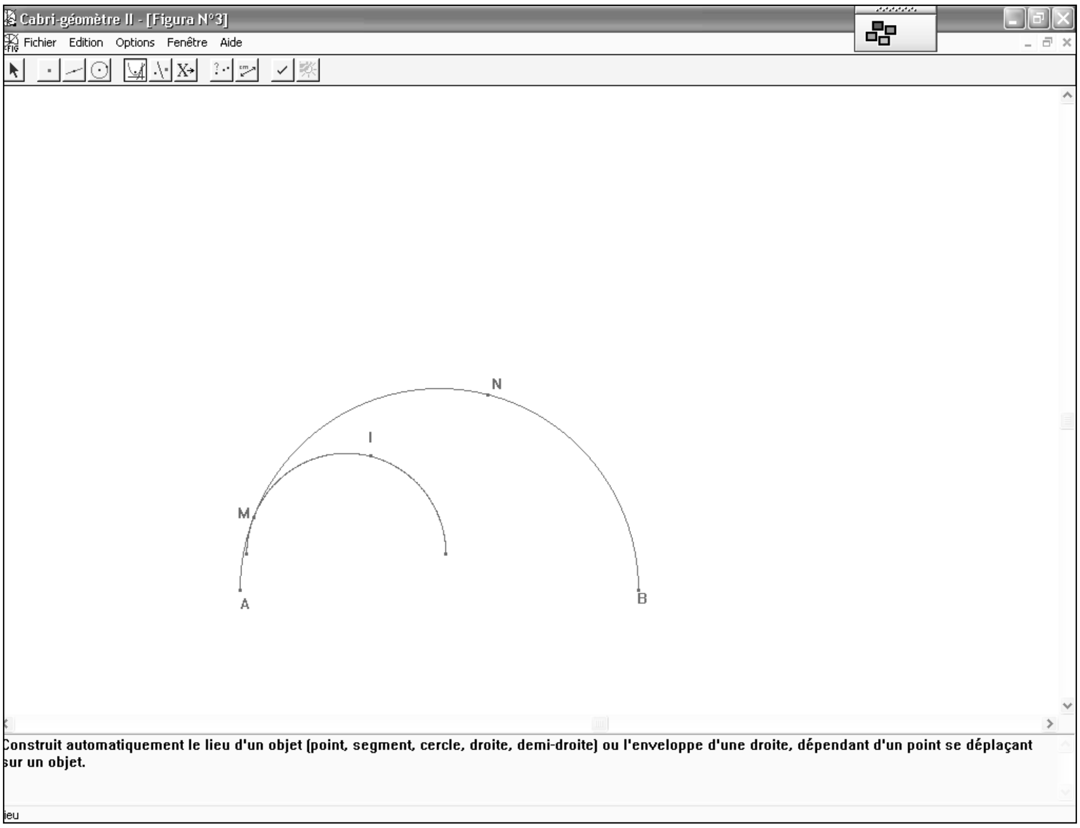


Figure 3 : Effet d'une commande de lieu géométrique dans CABRI, avec une aide indiquée.

mais celle de I lui-même, sous l'effet d'une double animation des points M et N. Contrairement à la coupole de la figure 4, elle ne donne que vaguement l'idée de l'ensemble à déterminer.

**Conclusion** : Le schéma de Guin-Trouche nous fait bien comprendre en quoi le professeur qui expérimente un logiciel de géométrie ou approfondit son usage en résolvant un exercice ne peut guère tirer de l'auto-observation de ses démarches des indications précises sur la *genèse instrumentale* à promouvoir pour ses élèves. Lui-même est amené à préciser ses connaissances géométriques et recherche dans le logiciel les moyens de les mettre en œuvre. Pour eux, certaines acquisitions géométriques vont se construire à travers les problèmes qui surgiront de l'usage du logiciel. Des différences peuvent déjà apparaître en ce qui concerne les faits spécifiques, autrement dit les connaissances élémentaires à mobiliser pour l'étude de l'exercice.

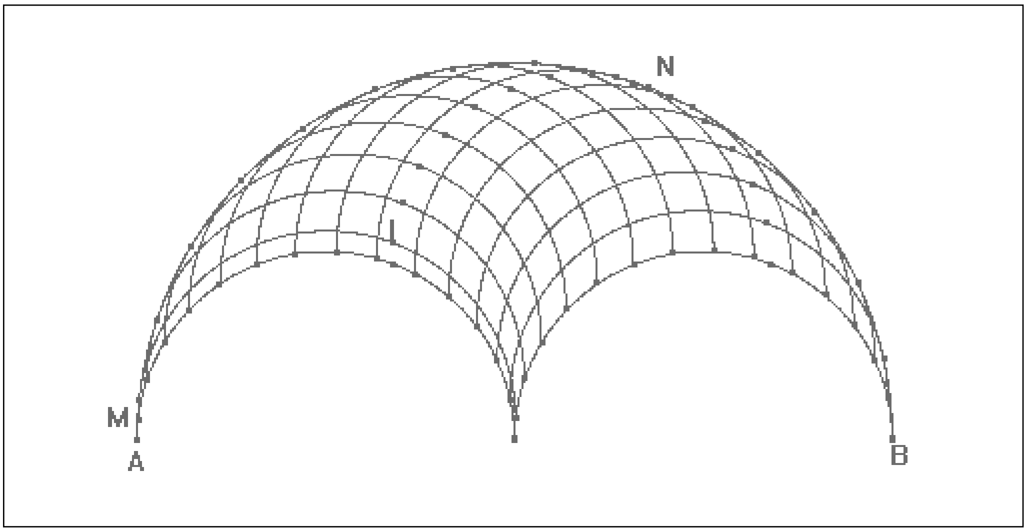


Figure 4 : Lieux de I = $f_M$(N), obtenus pour M pris parmi les sommets d'un polygone.

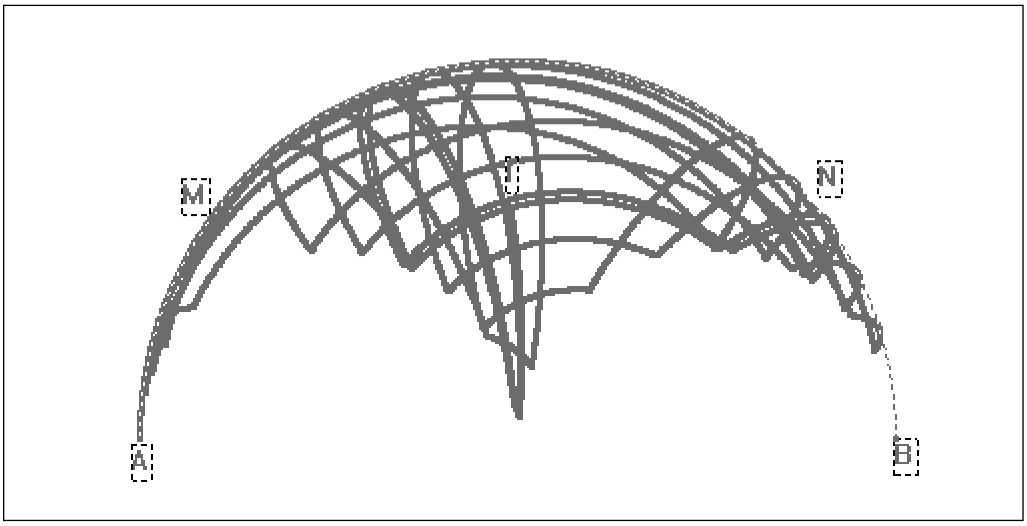


Figure 5 : Effet d'une double animation, de M et N, avec activation de la trace de I.

En conséquence, nous proposons dans ce qui suit quelques principes pour l'analyse d'activités destinées à contribuer à une genèse instrumentale. Dans cette genèse, ce sont pour nous ici les acquisitions mathématiques qui sont prioritaires ; dans un cours d'informatique, les priorités pourraient évidemment être différentes.

### *3. Niveaux d'apprentissages mathématiques.*

Certaines classifications des activités mathématiques sont déjà anciennes comme la classification NLSMA élaborée par Wilson pour les mathématiques, présentée dans l'ouvrage général de Bloom, Hastings et Madaus, 1971. La toile de fond était l'élaboration d'épreuves d'évaluation. Sans entrer dans une problématique aussi détaillée, il nous paraît utile de considérer trois niveaux d'apprentissage différents, que tout enseignement mathématique combine : un niveau 1 de mémorisation de faits spécifiques, un niveau 2 de réaction à des réponses d'un milieu extérieur, un niveau 3 de fonctionnement s'appuyant sur des contrôles internes aux mathématiques.

Le premier niveau, qui correspond à l'image courante de *la bouteille vide que l'on remplit*, concerne les apprentissages nécessaires pour que puisse se déclencher une activité mathématique. A un niveau très élémentaire, on y trouverait par exemple les produits de la table de multiplication ou les propriétés du carré ou du rectangle. A un niveau plus avancé, on y trouverait des définitions de base, des théorèmes comme celui des valeurs extrêmes atteintes par une fonction définie sur une segment, des formules telles les formules de trigonométrie et des procédures comme le produit matriciel. A ce premier niveau, les connaissances mathématiques ne se distinguent pas considérablement de celles d'autres disciplines.

Le second niveau prend en compte les feed-backs. Il fut par exemple largement mobilisé dans les expériences de Piaget et intervient comme partie constitutive des dialectiques proposées par Guy Brousseau. L'adaptation des conduites d'un individu en fonctions de résultats obtenus consécutivement à une action qu'il a déclenchée peut aujourd'hui jouer un rôle très important avec l'usage d'un outil réactif comme l'est l'ordinateur. Et ces possibilités peuvent maintenant être mises en œuvre sur le réseau avec des appliquettes Java (CABRI-Java) ou des ActiveX (GEOPLAN et GEOSPACE). Ainsi Internet peut-il offrir un *laboratoire de mathématiques*.

Le troisième niveau correspond au fonctionnement propre aux mathématiques. Il apparaît tout spécialement quand il s'agit de présenter une démonstration et sollicite particulièrement les conversions entre registres. Par exemple, nous n'avons jusqu'ici pas parlé de la **démonstration** du résultat qui apparaît dans l'exemple précédemment présenté à titre de *fil rouge*. Celle-ci requiert un renversement de point de vue : au lieu de se demander où vont se situer les milieux de cordes, il s'agit à présent de tracer une corde de milieu donné. Et pour ce faire, il est nécessaire d'invoquer des propriétés de symétrie du cercle. L'ouvrage de Raymond Duval, 1995, traite avec précision tous ces aspects de l'activité cognitive. Des expériences récentes ont été lancées sur la prise en compte pour les apprentissages mathématiques de la théorie proposée par Ed

Dubinsky sur les acquisitions de caractère cognitif en mathématiques. Une version en espagnol se trouve sur le site :

http://www.matematica-didactica.cl/relme17/enlaces.htm

et un article en français présentant une expérimentation touchant à ce sujet a été proposé par Asuman Oktaç et Maria Trigueros (voir la bibliographie).

Ces trois niveaux sont associés aux questions suivantes à se poser à propos d'une activité mathématique proposée à des élèves pour un travail sur le réseau ou avec un logiciel :

— Quelles instructions et quelles informations convient-il de leur communiquer pour qu'ils puissent s'engager dans l'activité ?

— Quels objectifs précis leur assigner, afin qu'ils puissent apprécier des écarts éventuels entre ce qu'ils attendent et ce qu'ils observent ?

— A quel point de développement arrêter l'activité engagée, pour passer à une conclusion mathématique ?

### *4. Cycle RID (résolution - inversion - documentation)*

Ce qui précède ne renseigne ni sur des phases à prévoir, associant plusieurs activités successives, ni sur les acquisitions que l'on peut viser. Nous proposons pour ce faire d'engager une analyse multiple d'un problème envisagé pour des activités. C'est un cycle constitué de trois analyses distinctes (résolution, inversion, documentation) qui nous semble permettre au mieux de préciser les activités à engager et selon quel découpage en phases. Dans la bibliographie, nous indiquons un article de Marc Rogalski, 1994, qui nous semble bien correspondre à un tel cahier de charges.

S'il s'agit ensuite de mettre en place une expérimentation, nous proposons de suivre alors les indications d'ingénierie didactique données par Michèle Artigue, 1988. Une raisonnable prise de risque est en effet de dire ce qui est attendu d'une expérimentation et une honnête mise à l'épreuve est de repérer les écarts par rapport aux attentes résultant de cette expérimentation.

Le cycle que nous proposons comporte :

— une résolution par le professeur, avec **tous** les moyens intellectuels et matériels dont il dispose (et non pas en essayant de s'en tenir à ce qu'il attend de ses élèves),

— une étude en sens inverse (une *analyse remontante* selon l'expression de Raymond Duval), reposant sur la recherche de variations d'énoncés susceptibles soit de conserver, soit au contraire de modifier la résolution,

— une recherche documentaire (bibliographie et e-références) autour des questions soulevées lors des deux étapes précédentes.

Il s'agit bien d'un cycle, car certaines des questions qui apparaissent dans la documentation obtenue peuvent amener à repartir dans une nouvelle résolution.

### *5. CONCLUSION*.

Après consultation d'exercices ou d'activités sur le réseau, par exemple sur Publirem, nous avons fréquemment eu envie de mettre un mot particulier aux auteurs, dans le genre : « Vous avez eu une riche idée, il est seulement dommage que vous n'ayez pas un peu plus approfondi son exploitation possible avec des élèves. » Nous ne l'avons jamais fait aussi directement, peut-être pour ne pas paraître prétentieux (de quel droit juger à moins d'être sollicité pour ce faire) ou par crainte de provoquer le découragement. A la réflexion, il est sans doute préférable d'avoir présenté dans cet article général quelques pistes pour permettre de tels approfondissements.

## BIBLIOGRAPHIE

Michèle ARTIGUE, 1988, *Ingénierie didactique*, Recherches en Didactique des Mathématiques volume 9/3, pp. 281-308, Grenoble, La Pensée Sauvage

BLOOM, HASTINGS & MADAUS, 1971, *Handbook for formative and summative evaluation of students learning*, Mc Graw Hill.

Régine DOUADY, 1987, *Jeux de cadres et dialectique outil – objet*, Recherches en Didactique des Mathématiques volume 7/2, Grenoble, La Pensée Sauvage

Raymond DUVAL, 1995, *Sémiosis et pensée humaine*, Bern, Peter Lang

Dominique GUIN & Luc TROUCHE (eds.), 2002, *Calculatrices symboliques, faire d'un outil un instrument de travail mathématique : un problème didactique*, Grenoble (France), La Pensée Sauvage.

Asuman OKTAÇ et Maria TRIGUEROS, article proposé pour parution dans les Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, *La théorie APOS et l'enseignement de l'algèbre linéaire*, IREM de Strasbourg

François PLUVINAGE, texte proposé pour la rubrique multimedia de Repères IREM, *Rechercher des informations sur le réseau et les organiser*

Marc ROGALSKI, 1994, *Les concepts de l'EIAO sont-ils indépendants du domaine ? L'exemple de l'enseignement des méthodes en analyse*, Recherches en Didactique des Mathématiques volume 14/1.2, Grenoble, La Pensée Sauvage