PROBLEMES D'INTRODUCTION ET AUTRES PROBLEMES DE RECHERCHE AU LYCEE

Aline ROBERT, Irem de Paris 7
Marc ROGALSKI, Irem de Lille

Nous étudions dans cet article la question des problèmes d'introduction, des problèmes transversaux et des problèmes de recherche.

La première partie dégage d'abord l'enjeu de ce type d'activités en classe, activités qui sont souvent jugées impossibles à mener. Puis sont abordées quelques justifications à leur utilisation, quelques leviers pour les construire, et des conditions et des limites d'utilisation. La deuxième partie présente deux exemples détaillés de problèmes transversaux et de problèmes ouverts, de recherche. La troisième partie étudie des activités possibles concernant l'aire et l'introduction de l'intégrale par l'aire. Un appendice cite quelques exemples d'activités parues dans la revue Repères, utilisables dans le sens de nos propositions.

**Première partie :
pourquoi et comment ?**

L'enjeu de ce type de textes n'est pas vraiment de proposer des énoncés originaux, dont on peut déjà trouver de nombreux exemples dans la revue, mais bien plus de faire réfléchir à leur adoption effective dans la classe. Prévoyant des réactions fatalistes du genre "c'est bien joli tout ça, mais on n'a pas le temps", ou encore "qu'ils viennent donc dans nos classes voir", qui annoncent l'échec de l'entreprise, nous proposons le premier paragraphe suivant, qui présente notre démarche globale, et tente d'illustrer ce que ces activités ont d'indispensable à nos yeux.

La conséquence de cette position peut être qu'il y a lieu de choisir, quand on enseigne les mathématiques au lycée à l'heure actuelle, entre prendre du temps pour faire faire aux élèves, de temps en temps mais pas trop rarement, des activités d'introduction,transversales ou de recherche, ou prendre du temps pour faire "voir" tout le programme.

Une autre question concerne la proportion d'enseignants qui ne rejette pas d'emblée l'idée de "perdre du temps"pour que des élèves en gagnent, peut-être, à terme. D'une part parce que cette position engage le moyen terme et pas seulement le court terme, tout en ne mettant en cause que l'enseignant actuel, et qu'elle devra être défendue comme telle devant les élèves (il y aura un contrat à instaurer). D'autre part parce que l'entreprise sera d'autant plus susceptible de donner les résultats attendus qu'elle ne reste pas limitée à un trop petit nombre d'enseignants.

I. Notre démarche globale

Nous présentons cette démarche en quelques points, nécessairement un peu brefs.

I.1. *Le raisonnement initial en quatre points : quel "agir" des élèves entre apprentissage et enseignement ?*

Le raisonnement global que nous tenons d'abord est le suivant.

I.1.(1) Apprendre (en mathématiques, au lycée) est associé à conceptualiser (des notions [1]). Cela indique une prise de sens de la notion en tant qu'objet et en tant qu'outil. Cela implique des mises en fonctionnement correctes dans beaucoup de situations, et même si la notion à utiliser n'a pas été indiquée par l'énoncé (cela correspond à son caractère "disponible"). Cela s'accompagne d'une insertion de la notion dans le bagage mathématique antérieur. La conceptualisation est une notion relative, et n'est jamais achevée. L'évolution de ce qu'on peut mettre sous le mot "concept de fonction" à travers la scolarité en est un bon exemple. Tout le programme d'une année scolaire ne sera pas conceptualisé, mais une partie peut l'être (pas forcément la première année où elle apparaît, d'ailleurs). Le reste peut être travaillé dans cette optique, même si le processus n'est pas terminé au lycée.

I.1.(2) D'autre part, ce qui fait apprendre les élèves, notamment dans ce qui dépend de l'enseignant et que nous privilégions de ce fait [2], c'est tout ce que celui-ci propose en classe qui engendre des activités [3] mathématiques potentielles des élèves, activités effectives si ceux-ci veulent bien "jouer le jeu" (d'où l'adjectif "potentiel"). Autrement dit, apprendre résulte des activités des élèves, et notamment des mises en fonctionnement dans beaucoup de situations, et même, quelquefois, sans que la notion à apprendre ait toujours été indiquée. *C'est en forgeant qu'on devient forgeron.*

Cependant nos élèves ne vont pas devenir mathématiciens, sauf exception, et le proverbe ci-dessus n'a qu'une portée métaphorique limitée. De plus on voit à quel point notre raisonnement est partiel, puisque nous négligeons d'autres déterminants [4] des apprentissages, aussi importants que l'affectif, le psychanalytique, le social.

I.1.(3) Ce que l'enseignant propose en classe est pour nous (dans ce qui nous intéresse) constitué de deux composantes, indissolublement liées même si les analyses que nous faisons les séparent artificiellement pour un temps : un contenu (énoncé d'exercice par exemple) et un déroulement (forme de travail

1 Ce peut être un ensemble de notions reliées, ou un "gros" théorème, ou un ensemble de propriétés, ou des méthodes générales de résolution de types de problèmes…

2 Nous n'avons pas la naïveté de penser que les propositions de l'enseignant ne dépendent que de lui (nous y reviendrons), les contraintes de programme, les habitudes d'un établissement pèsent aussi, même sur les choix de contenus quotidiens. Mais cela dépend en grande partie de l'enseignant, cela influence les activités des élèves et cela peut donc certainement avoir une répercussion sur les apprentissages.
3 Le mot "activités" désigne tout ce que l'élève pense, écrit, dit…
4 Nous nous limitons de ce fait àtout ce qui peut dépendre consciemment des enseignants.

des élèves et accompagnements de l'enseignant pendant la résolution de l'exercice). Pour traduire ce double aspect, on réserve le mot tâche à un énoncé proposé, et le mot activité à ce qu'il déclenche chez les élèves (dans le contexte étudié). Autrement dit, la description des activités proposées aux élèves, qu'elle soit diagnostique ou prospective, doit intégrer ces deux "ingrédients", la tâche prescrite et le déroulement effectif.

I.1.(4) Enfin, les pratiques des enseignants ne sont pas seulement déterminées par les nécessités d'apprentissage de leurs élèves : enseigner est un métier, qui engage l'individu dans un environnement social. Les enseignants sont soumis à des contraintes et à des habitudes institutionnelles (programmes par exemple), sociales, et doivent s'y adapter avec leurs ressources personnelles originales. Autrement dit, tout n'est pas possible en classe (en particulier un certain "idéal" didactique est invraisemblable), et, même dans ce qui est didactiquement possible, tout n'est pas adapté à chaque enseignant [5].

I.2. Deux prémisses sur les mathématiques et sur les apprentissages

Notre raisonnement global s'appuie donc sur deux prémisses à exposer d'abord : une réflexion sur l'apprentissage (la conceptualisation) en mathématiques, tenant compte de la spécificité de ce domaine d'activités, et une réflexion sur les activités des élèves en classe comme vecteur d'apprentissages [6]. C'est ce qui va nous permettre de répondre en partie à la question de la contribution respective de divers types d'activités à proposer aux élèves pour la mise en route d'un processus de conceptualisation mathématique. Restera à réfléchir au possible, en déterminant les variables en situation de classe sur lesquelles l'enseignant peut réellement agir. Soulignons qu'un certain nombre de propositions didactiques [7] ont déjà été élaborées suite à cette double réflexion, reprise brièvement ci-dessous.

I.2.(1) *Première prémisse : plusieurs dynamiques contribuent à la conceptualisation de notions en mathématiques*

Nous résumons ici un point de vue global sur ces dynamiques.

— *Les dynamiques entre les exercices (contextualisations) et les connaissances correspondantes (décontextualisation).*

Il s'agit de la manière dont sont organisés respectivement les exercices et le cours sur une notion en cours d'acquisition, dans le temps (l'ordre et la répartition dans lequel est présenté et travaillé cet ensemble interviennent notamment), d'un point de vue quantitatif et qualitatif. Remarquons que la décontextualisation (qui correspond à une exposition générale pour le niveau scolaire envisagé) comporte plusieurs degrés (par exemple le générique, le général). Il peut y avoir plusieurs niveaux dans le général, pensons encore une fois aux fonctions. Dans les exercices, les différents contextes mis en fonctionnement, les passages entre contextes, les différents modes de raisonnement peuvent contribuer à la dynamique envisagée, ainsi que "l'étendue" de ce qui a été abordé (exploré) par

5 Des recherches montrent que les pratiques sont assez rapidement stables pour un enseignant donné, et insistent sur leur cohérence (élément de stabilité) et leur complexité. En particulier des pratiques d'enseignant expérimenté ne se changent pas facilement.

6 Nous tenons compte de théories disponibles (didactique, psychologie, ergonomie…), pas toujours élaborées pour la classe ni pour les mathématiques (sauf en ce qui concerne la didactique).

7 Notamment des ingénieries de G. Brousseau et de R. Douady.

les élèves — aussi bien qualitative que quantitative. Combien de fois on est revenu sur un type d'énoncés, quelles adaptations du théorème en cours d'acquisition ont été proposées aux élèves… sont autant de questions qui jouent sur cette dynamique.

— *La formalisation*

Là encore plusieurs degrés sont possibles, et un certain choix existe dans les activités entre contextualisé et décontextualisé. Ainsi, le recours au générique (exemple non entièrement général ni formalisé, mais suffisamment non particulier pour "faire comprendre" le cas général) peut contribuer à une bonne décontextualisation ultérieure…

— *Les mises en relation entre contextes, entre objets mathématiques*

Pour nous tout ce qui contribue à *l'organisation des connaissances* (entretien des connaissances anciennes, intégration du nouveau dans l'ancien, réorganisation de l'ancien autour du nouveau) fait partie de la conceptualisation.

La dialectique outil/objet est une proposition particulière de gestion de tous ces facteurs par les élèves (cf. R. Douady). La théorie des situations en propose une autre, assez proche (voir G. Brousseau).

I.2.(2) *Deuxième prémisse : certaines conséquences de théories de l'apprentissage (Piaget, Vygotski)*

Un certain nombre de théories générales sont évoquées lorsqu'on travaille sur les apprentissages scolaires dans un domaine disciplinaire donné. Nous résumons ici ce que nous en retenons.

Du côté de ce qui est à faire par l'élève, ou, comme on dit[8], de ce qui est "dévolu à l'élève", on s'inspire beaucoup de travaux de Piaget. *On admet ainsi l'importance de la construction de connaissances de façon plus ou moins autonome par l'élève* — ce qui se traduit par l'organisation (indispensable ?) pour les élèves de phases de recherche (d'action), à certains moments. De nombreuses variables permettent cependant d'affiner ce levier.

Il y a la transformation de l'action de l'élève, notamment par le lien entre ce qu'il a fait et les connaissances en jeu, faute de quoi l'impact sur l'apprentissage peut être minimal. En particulier la part de l'élève à la formalisation ou à la structuration des connaissances est une variable de ces phases d'apprentissage. Il y a aussi le choix de ce qui est cherché par l'élève (une application immédiate d'une connaissance, des adaptations de cette connaissance ne vont pas contribuer de la même façon aux apprentissages). On peut ainsi se demander dans quelle mesure, si on ne propose aux élèves que des applications simples et isolées d'une proposition par exemple, les élèves réussiront à apprendre à adapter cette proposition dans un exercice où il faut soit la reconnaître, soit un peu travailler pour l'appliquer.

Quels sont les moyens de contrôle mis à disposition de l'élève pour qu'il puisse "évaluer" seul son action ? Si seul l'enseignant a les moyens de valider cette action, l'autonomie de l'élève restera très limitée.

Dans quelle mesure l'action de l'élève l'amène-t-il à un processus de déséquilibre/rééquilibration (grâce à des changements de cadres ou de contextes ou de registres ou de

8 Cf. G. Brousseau.

niveaux) ? Quel passage à l'écrit est prévu, jouant sur le processus de représentation, ou de formalisation ?

Du côté des relations directes des enseignant vers les élèves, on peut compléter ce catalogue, notamment par des travaux de Vygotski. Cela conduit à postuler qu'*il peut y avoir appropriation de connaissances par l'élève par imitation de l'enseignant* (qui expose des connaissances ou explique une proposition), mais à condition que ce qui doit être ainsi approprié soit proche de connaissances déjà acquises [9]. Cette dynamique peut être renforcée par les médiations qui viennent de l'enseignant : le contenu des questions et réponses (relances, reprises…), les aides (avant le travail des élèves, après), le recours au "méta" (discours général sur la nature des connaissances en jeu, la manière de s'en servir, l'origine de la question étudiée…), les explications et structurations proposées…

Du côté des relations entre élèves, les théories précédentes permettent de donner de l'importance à une construction collective (pouvant précéder l'appropriation individuelle). On peut aussi s'inspirer de la théorie des conflits (socio-cognitifs) pour prendre en compte les échanges entre élèves : si plusieurs personnes débattent ensemble et sont proches de la connaissance visée, alors les explications de celui qui a déjà acquis cette connaissance peuvent convaincre les autres de façon efficace pour leur apprentissage.

Enfin, du côté de la classe, le concept de "contrat" (et de coutume) permet de rendre compte dans les apprentissages des phénomènes en partie implicites liés aux attentes des différents partenaires.

9 Tout se passe comme si un travail d'imitation "efficace" pouvait avoir lieu dans une zone de connaissances proches de celles déjà acquises (zone nommée "zone proximale de développement" par Vygotski).

I.3. Retour aux activités effectives des élèves en classe : quelles contributions aux apprentissages, quelles variables ?

I.3.(1) *L'absence fréquente de liens entre l'ancien et le nouveau et l'insuffisante organisation des connaissances*

Les contraintes de temps, rendues encore plus lourdes par les restrictions d'horaires actuelles, sont toujours évoquées pour justifier le fait de privilégier en classe un travail sur "le nouveau", mais sans beaucoup d'exploration [10], peu d'entretien de l'ancien, pas ou peu de réorganisation entre ancien et nouveau. En termes d'activités, cela correspond à des tâches isolées (qui portent sur le chapitre en cours), sans beaucoup d'adaptations des connaissances à utiliser [11].

C'est d'emblée le chapitre "organisation des connaissances" de notre première prémisse qui est ainsi une des premières victimes de ce manque de temps, ainsi que le développement de la dynamique entre cours et exercices, qui manque d'ampleur.

On ne peut pas être sûr qu'il en résulte toujours chez les élèves un morcellement des connaissances [12], car certains élèves apprennent ce qui ne leur est pas enseigné explicitement (et leur est donc dévolu, plus ou moins implicitement). Mais on peut se demander

10 qualitative notamment.

11 Nous avons étudié, pour établir ces constats, des séances en classe de troisième et de seconde, essentiellement en algèbre. Les énoncés proposés n'étaient pas des exercices d'application immédiate, mais ils intervenaient juste après un cours ou juste avant, et n'étaient pas très éloignés du contenu du cours.

12 Bien que ce soit l'un des constats les plus forts qu'une étude sur les connaissances des étudiants préparant le CAPES ait fourni.

tout de même si la plainte réitérée de beaucoup d'observateurs du manque de "choses sûres" chez les élèves n'a pas aussi comme origine ce type de travail en classe ; la légitimité de cette interrogation est renforcée par ce qu'on entend souvent les élèves déplorer : « c'est juste quand on commence à comprendre qu'on change de chapitre ! ».

Ces choix d'activités des élèves s'accompagnent aussi de peu d'exploration du champ des problèmes résolubles avec les outils du moment. On propose en effet, vu "la nécessité d'avancer" que l'enseignant contraint par le temps s'impose à lui-même, des tâches relativement proches du cours, qui demandent des mises en fonctionnement standard, qu'il faut bien avoir vues. Sans gammes, pas question de virtuosité : alors on choisit de commencer par les gammes, même si on n'a pas le temps de finir par le sens.

Nous nous demandons d'ailleurs si, dans les instructions actuelles accompagnant les programmes, il n'y aurait pas une confusion entre "expérimentation" sous forme d'activités préalables et "exploration du champ des problèmes possibles" : une certaine prise de sens initiale, obtenue par un travail des élèves de type expérimental sur un problème, ne contribue pas nécessairement à l'apprentissage des mises en fonctionnement ultérieures. D'autant plus que souvent l'expérience en question n'amène même pas à utiliser (ou si peu) les outils en question ! Par exemple, l'étude empirique sur calculatrice du comportement d'une suite numérique a souvent peu de rapport avec les outils qu'il faudra utiliser pour prouver effectivement les propriétés ainsi découvertes. Par contre, l'arithmétique se prête mieux à une expérimentation formatrice à cause de la présence fréquente d'exemples génériques (voir dans la deuxième partie le problème de recherche proposé).

I.3.(2) *Une orientation univoque et une prise en main précise et quasi-immédiate de l'activité des élèves*

C'est une conséquence presque inéluctable du choix forcé évoqué au paragraphe précédent : puisqu'il faut apprendre (et vite) à se servir d'une nouvelle notion, l'enseignant va devoir orienter étroitement l'activité des élèves, au moins dans les premiers exercices sur une notion, même si cela ne correspond pas toujours à leurs premières réponses, ainsi non prises en compte.

L'enseignant engage très vite vers un recours systématique au décontextualisé (en train d'être appris et mémorisé) pour résoudre une question. En troisième, pour résoudre $-3x = 7$, on copie sur la résolution de $ax = b$: l'activité des élèves est cantonnée à évoquer le modèle, puis à remplacer a par -3 et b par 7 dans $x = b/a$. En seconde, pour résoudre $|x+2| < 5$, on identifie le modèle $|x-c| < r$, on remplace c par -2 et r par 5 dans la formule donnée en cours, qu'on recopie. Le professeur ne laisse pas les élèves *refaire sur l'exercice le raisonnement adapté au cas particulier* (ou mélanger le contextualisé et le général). Il fait appliquer strictement le cours (décontextualisé). Du coup le générique aussi est souvent vite éliminé au profit du général, même s'il finit par se réintroduire subrepticement. Il n'y a pas pour les élèves de possibilité de "patouiller" (d'utiliser des mathématiques pas tout de suite propres). Mais, "au moins on a appris quelque chose aujourd'hui…"[12](voix off de tous les enseignants).

12 E. Roditi a montré dans sa thèse qu'il y a là un principe "en actes" chez tous les enseignants, très fort.

Pour arriver à cette orientation de l'activité des élèves, on constate, dans beaucoup de séances d'exercices, un découpage immédiat par l'enseignant de la tâche (si elle n'est pas une application immédiate) en sous-tâches (questions intermédiaires), qui correspondent à un isolement accru, pour faire appliquer juste ce qui est visé, puis à une simplification éventuelle si les élèves n'y arrivent "encore pas". On ne laisse pas aux élèves l'élaboration des sous-tâches, ils ont au mieux à répondre (collectivement) à la question du "comment résoudre" la sous-tâche. Il n'y a donc pas d'hésitation des élèves sur le démarrage, la question "quoi faire" est posée par l'enseignant, immédiatement, la question sur les méthodes aussi (même si la réponse est parfois laissée aux élèves, si le découpage en questions intermédiaires n'est pas trop fin). Les élèves ne sont pas dans le flou, ils ne vivent pas d'incertitude. Le temps laissé aux élèves (il y en a) sert à ce que certains élèves répondent brièvement à des questions "bien posées" (dans ce cas l'enseignant attend autour de 10 secondes, souvent) et à ce qu'ils fassent (tous, si possible) les "derniers" calculs, précisés par ce qui précède (alors le silence peut dépasser une minute) [13]. Quelquefois ce sont les dessins pour lesquels l'enseignant laisse un peu de temps.

On constate donc, et cela pourrait renforcer le manque d'organisation des connaissances déjà pointé, une séquentialisation des activités sur une même notion en moments relativement indépendants : les élèves font fonctionner les outils les uns après les autres, indépendamment, ils n'ont besoin que des connaissances outils (empilées) correspondant au cours et soufflées par le découpage organisé par l'enseignant. Il y a beaucoup de tâches simples et isolées, in fine. Il y a aussi majoration des calculs (en classe). Dans ces conditions, il n'y a pas besoin de dévolution des moyens de contrôles aux élèves. Il n'y a pas de structuration des connaissances en acte du côté des élèves (ils n'ont pas besoin de le faire, c'est le professeur qui s'en charge).

Par rapport à nos prémisses, cela revient à privilégier le sens "décontextualisé $\longrightarrow$ contextualisé", et à minorer encore tout ce qui contribue activement (en venant des élèves) aux mises en relation, aux explorations qualitatives des possibles et à l'organisation des connaissances.

I.3.(3) *Quelles variables pour l'enseignant ?*

Mis à part l'argumentaire sur le temps développé ci-dessus, les enseignants font aussi remarquer que les élèves préfèrent savoir quoi faire, avoir à calculer (ou à dessiner) quelque chose de précis et à leur portée. De plus c'est un bon moyen de gérer les classes un peu agitées : pendant un calcul bien délimité presque tout le monde travaille. Alors y a-t-il lieu de proposer des changements ? Quelles sont les variables dans ce dispositif ?

Il y a en particulier une première question qui mérite d'être explicitée : qu'est-ce qui peut être appris sans avoir été explicitement enseigné ? *Nous admettons ici une nouvelle hypothèse :* si un type de tâche n'est jamais prescrit, ou très rarement, il y a de nombreux élèves qui risquent de ne pas apprendre seuls à le mettre en œuvre. Autrement dit, nous pensons qu'il est indispensable, pour amener davantage d'élèves à apprendre, de pro-

13 Cela a des conséquences importantes sur l'idée que se font les élèves du travail mathématique. Voici un fait souvent constaté en travaux dirigés en première année d'université : la moitié des étudiants arrêtant de chercher l'exercice proposé au bout de 5 minutes, l'enseignant leur demande pourquoi ; réponse : "Monsieur, si on n'a pas trouvé en 5 minutes, on ne trouvera jamais"…!

poser aux élèves, malgré tout, de temps en temps, en argumentant sur le moyen terme, des activités différentes de celles que nous avons décrites ci-dessus (différentes en termes de contenus et de gestion).

Et nous demandons à notre tour (voix off des auteurs de l'article) aux enseignants : "vos élèves disent préfèrer savoir quoi faire — mais avez-vous déjà essayé autre chose ? Par exemple un problème de recherche pas trop difficile à travailler en petits groupes ?"

Si on fait le choix d'introduire des activités variées, il s'agit d'utiliser explicitement, consciemment, la manière dont ces activités différentes impliquent [et/ou sont impliquées par] un état des connaissances, à transformer éventuellement. Par exemple, les applications simples et isolées des propositions du cours vont du texte général au particulier, elles amènent à une reconnaissance très partielle, à des remplacements et très rapidement à des calculs ; elles participent d'un apprentissage technique indispensable ; elles engagent la mémorisation, et une certaine algorithmisation des connaissances, très appréciées des élèves ! Les tâches qui comportent des adaptations permettent, si la gestion en classe ne modifie pas l'activité correspondante, de jouer sur divers contextes, sur des reconnaissances, sur des mises en relation. Elles entraînent un petit peu les élèves à explorer certaines nouvelles questions, à gérer une petite incertitude. Les énoncés sans indication permettent, eux, de mettre en relation un problème et des connaissances à utiliser, on va du particulier au général puis au particulier. Souvent on entretient ainsi des connaissances anciennes et on organise le nouveau dans l'ancien. C'est ce que nous allons préciser maintenant.

Nous introduirons dans le paragraphe qui suit des leviers permettant d'organiser des activités variées des élèves, comme l'ouverture des énoncés (que ce soit au niveau de la question posée ou des indications). Il va sans dire que l'enseignant aura à choisir entre toutes ces ressources (ouvertures des énoncés, introduction d'étapes ou d'intermédiaires, difficultés des mises en fonctionnement…) et à les combiner à sa guise, en jouant en même temps sur la gestion, quitte à proposer par exemple des questions fermées à travailler individuellement lorsque l'enjeu qu'il se fixe est de faire mélanger des connaissances (cf. l'exemple 1 de la deuxième partie).

Une dernière question se pose et doit être posée : est-ce que cette alternative est possible dans l'état actuel des choses ? Des récits d'expérience déjà publiées dans la revue nous rendent assez optimistes, nous espérons en lire d'autres…

II. Problèmes pour introduire des notions nouvelles

L'objectif que nous avons en élaborant ce type de problèmes est de ne pas toujours faire travailler les élèves dans le même sens, en partant de leur cours pour en arriver aux exercices ou problèmes d'applications.Ils'agit d'introduire une notion par un travail sur un problème dans lequel les élèves la mettent en fonctionnement partiellement, naïvement, pas de manière générale, ou bien dans lequel les élèves se posent une question à laquelle l'introduction de cette notion donne ou donnera les moyens de répondre.

L'hypothèse qui sous-tend cet objectif est que nous supposons que la démarche de généralisation, de décontextualisation peut être porteuse de sens pour les élèves (voir le I).

II.1. ***Un exemple***

Nous proposons dans la troisième partie des activités pour introduire en terminale S le lien entre intégrale et aire, et pour introduire en même temps les suites adjacentes.Ce qui est mis à la charge des élèves, et dont on espère qu'ils pourront y accéder sans l'aide de l'enseignant [14], a deux objectifs : d'abord l'utilisation de suites adjacentes particulières pour définir un nombre (leur limite), sans que la notion générale de telles suites ait été introduite ; puis le questionnement sur le lien entre aire et fonction sous le graphe de laquelle on a calculé l'aire : ce n'est pas la preuve de la réponse qui peut être devinée par les élèves, mais seulement la question et/ou la conjecture sur la réponse ; ils peuvent se demander, et c'est notre but, si ce qu'ils ont trouvé deux fois (la dérivée de l'aire est la fonction …) ne serait pas général.

II.2. ***Les leviers***

Nous faisons jouer dans ce type de problèmes les facteurs suivants :

II.2.(1) *S'appuyer sur du connu (des élèves) pour donner du sens à du nouveau (qui peut être un futur outil, une question à laquelle un futur théorème — ou une définition à venir — répondra, etc.). En particulier, si c'est possible, construire un problème comportant des moyens de contrôle internes (à partir du connu antérieur des élèves) ou externe (s'il y a activité de mise en équation ou modélisation).*

Ce peut être par l'intermédiaire d'un problème qui n'est pas résoluble avec ce que les élèves savent déjà, ce qui les amène à une question ou à une conjecture. Ce peut être par généralisation d'un outil qui peut être utilisé "spontanément" par les élèves, de manière plus large que ce qu'ils ont déjà fait. Dans notre exemple, l'utilisation des suites adjacentes est possible avec les théorèmes déjà introduits, et c'est une question (généralisation d'une propriété rencontrée deux fois) qui est visée.

II.2.(2) *Jouer sur des différences des connaissances des élèves dans des domaines de travail (cadres) différents pour qu'ils trouvent quelque chose.*

Dans notre exemple, on fait travailler les élèves dans le cadre graphique (où ils voient des choses) et dans le cadre de l'analyse.

II.3. ***Quelle différence avec les "activités" des manuels ?***

La plupart du temps, ces activités des manuels, très découpées, ne correspondent pas à une mise en fonctionnement partielle ou naïve de ce qu'on cherche à construire. Ou bien elles font réviser ce qui est juste "avant" ; ou bien on a absolument besoin pour les résoudre de coups de pouces du professeur (introduisant subrepticement du nouveau non "motivé") ; ou même le texte du manuel introduit dès l'activité la nouvelle notion déjà formalisée.

Du point de vue des mises en fonctionnement des connaissances, on ne retrouve pas l'idée d'une formulation de l'origine de ce qui va être construit à travers un questionnement, ou de son utilisation partielle par les élèves, non aidés par l'enseignant (dont le cours sera plus systématique, général, décontextualisé).

14 Ce peut être une aide locale, mais pas sur les idées à mettre en œuvre

II.4. *Une autre épistémologie des mathématiques ?*

L'un des rôles importants des problèmes d'introduction peut être de faire prendre conscience aux élèves que les notions mathématiques qui sont enseignées *répondent à des problèmes, des questions,* qui se posent ou ont été posées. Le sens des concepts mathématiques peut ainsi être mieux saisi. Ce qu'on vise par ces problèmes, c'est la dévolution d'une question aux élèves, avant de leur apporter la réponse. Il s'agit donc de rompre avec le modèle d'enseignement des mathématiques : *réponses à des questions non posées !*

Certains de ces problèmes d'introduction peuvent aussi permettre que des idées soient d'abord développées comme des "outils" de résolution, si possible par les élèves eux-mêmes, au moins en partie, avant de donner lieu à la création "d'objets" mathématiques étudiés pour eux-mêmes (la "dialectique outil-objet" de R. Douady [15]). L'activité de généralisation peut être valorisée (alors qu'elle est très discréditée dans les commentaires des programmes du secondaire de ces dix dernières années). Et l'ensemble de la démarche ainsi pratiquée par les élèves peut être porteuse de sens pour eux, tout en étant plus proche du véritable développement des mathématiques (même si lesproblèmes choisis ne suivent pas les démarches historiques).

Il nous semble que faire en sorte que les élèves se fassent une idée correcte des démarches scientifiques qui ne se réduise pas à "comment faire pour réussir l'examen ?" est un enjeu fondamental de l'enseignement des sciences, en particulier dans une période qui voit les vocations scientifiques se raréfier.

II.5. *Mais ce type d'introduction n'est pas toujours possible*

Plusieurs aspects peuvent limiter le recours à des problèmes d'introduction.

II.5.(1) *Une première difficulté tient au type des notions : les différentes notions mathématiques ne sont pas de même nature* [16].

Certaines permettent d'emblée le jeu de la dialectique outil-objet, leur construction s'obtient en décontextualisant assez facilement l'outil créé "naturellement" pour résoudre un problème (c'est le cas par exemple avec l'intégrale : la procédure intégrale comme outil mis en place pour mesurer certaines grandeurs se conceptualise assez directement en première année d'université [17] ; on peut aussi penser à l'introduction des nombres complexes par l'étude de l'équation du troisième degré [18]). Il est assez fréquent qu'on puisse alors utiliser un problème accessible aux élèves (utilisant éventuellement un changement de cadre, ou une question extérieure aux mathématiques) leur permettant de construire l'outil de résolution nécessaire.

D'autres notions généralisent un concept déjà connu mais insuffisant en dehors de certaines limites (par exemple, le passage de la continuité à la continuité uniforme en deuxième année d'université) ; selon le cas, il peut alors être facile, ou pas, de construire un pro-

15 Voir Douady (1987).

16 Différents types de notions sont présentées dans Robert (1998).

17 Voir M. Legrand (1990).

18 Voir Rogalski et al. (2001).

blème d'introduction pour ce type de notion, et il n'est d'ailleurs pas sûr que le jeu en vaille toujours la chandelle.

D'autres notions se présentent comme généralisatrices de plusieurs situations plus ou moins particulières, avec recours à un nouveau formalisme qui permet de les unifier (citons la notion formalisée de limite, ou la structure d'espace vectoriel [19]). Dans ce cas il peut être tout à fait impossible (ou en tout cas difficile) de trouver un problème accessible qui exige vraiment l'utilisation de la nouvelle notion visée : on sera nécessairement dans l'un des cas particuliers que l'on veut généraliser, donc dans du "déjà vu", et les élèves pourront utiliser les moyens de résolution propres à ce cas qu'ils connaissent déjà, sans avoir d'accès direct à la démarche d'unification formelle qu'on a envie de leur faire faire.

II.5.(2) Si dans le problème proposé il y a trop d'éléments inconnus des élèves, ou difficiles, ou même si c'est trop long pour arriver au fait, alors le problème d'introduction peut ne plus fonctionner. Dans certaines classes de terminale, par exemple, les calculs à faire pour arriver aux résultats de l'une ou l'autre des activités de la troisième partie peuvent être un obstacle insurmontable, et alors les élèves perdent de vue l'objectif (ce qui est à éviter absolument si on veut développer chez eux un questionnement).

II.5.(3) Enfin, une des grandes difficultés pour adopter cette démarche tient *au temps qu'elle demande* : si on veut respecter son esprit "constructif", on doit laisser vraiment les élèves chercher tout seuls, et cela représente un temps considérable, toujours plus long que ce qu'un enseignant croit souvent pouvoir consentir s'il veut finir son programme… Nous renvoyons ici à la section I, où nous avons justifié le fait qu'il faut savoir parfois "perdre du temps".

II.6. *Et la gestion en classe ?*

Nous voulons insister sur ce point : si un problème d'introduction n'est pas laissé à chercher aux élèves "en vrai", avec du temps, l'enseignant acceptant de se taire sur les points essentiels, de ne parler qu'après les élèves (et c'est très difficile), il ratera son but. De ce fait, il peut arriver qu'il y ait une difficulté de démarrage sérieuse de la part de certains élèves s'ils travaillent individuellement. C'est pourquoi une stratégie de gestion de classe particulièrement adaptée à ce type d'activités est le travail en petits groupes : regroupés par trois ou quatre autour de tables séparées, les élèves collaborent et confrontent leurs points de vue, et cela est très favorable à l'apparition des outils de résolution qu'appelle le problème.

Nous avons pu constater, tant au lycée (à propos de la géométrie en terminale [20]), qu'en première année d'université [21], que l'institutionnalisation d'un travail régulier en petits groupes sur des problèmes d'introduction ou de recherche était très efficace, et pouvait amener un changement dans le style de travail des élèves ou des étudiants.

III. Problèmes transversaux

Nous appelons ainsi des problèmes qu'on ne peut pas inscrire dans un chapitre précis

19 Voir Dorier et al. (1997)

20 Sur le dispositif de travail en petits groupes en terminale, voir Robert et Tenaud (1989).

21 Sur le travail en petits groupes à l'université, voir Dorier et al. (1997) et CI2U (1990).

du cours, car ils mettent en fonctionnement plusieurs notions à la fois, y compris dans certains cas des recours croisés à l'algèbre, la géométrie et l'analyse. Parmi ces problèmes, on trouve parfois des problèmes de mise en équation ou de modélisation de situations provenant d'autres disciplines, ou des statistiques ou des probabilités, car ces problèmes obligent souvent à utiliser plusieurs notions ou outils mathématiques différents.

III.1. *Les objectifs*

Dans ces problèmes, qui font utiliser simultanément plusieurs notions (en cours d'acquisition, ou déjà "apprises"), nous visons *l'organisation des connaissances* des élèves. Nous supposons que les mises en relation (*même indiquées par l'énoncé*) que doivent faire les élèves dans ce type de problèmes contribuent à cette organisation, qui, pour nous, fait partie des apprentissages. Dans ce type de travail, l'essentiel n'est pas le travail autonome des élèves, mais leur découverte de liens (*qui peuvent donc être donnés par l'énoncé*) entre des domaines différents des mathématiques ou des sciences, et la prise de conscience que ces liens permettent de résoudre des problèmes.

En particulier c'est dans ces problèmes transversaux que les élèves peuvent apprendre à aller chercher (aidés au début, et tout seuls ensuite) les connaissances, anciennes ou nouvelles, qui vont être utiles. Nous avons pu constater que ces mises en fonctionnement des connaissances (utilisation nouvelle des connaissances anciennes, mélanges, traduction systématique des hypothèses) sont quelquefois minorées, notamment à cause des pressions du programme. Nous avons vu à la section I à quel point l'organisation des connaissances est un des buts essentiels de la formation, et ce type de problèmes peut y contribuer.

III.2. *Un exemple*

L'introduction du travail dans plusieurs cadres (domaines de travail) et registres (domaines d'écritures), et le thème de la modélisation sont de grands leviers qui permettent de fabriquer ces problèmes, comme on peut le voir dans l'exemple 1 de la deuxième partie : à l'occasion de la modélisation de la question de la "compensation" dans une partie de $2n$ coups de pile ou face, interviennent les probabilités, la combinatoire, des calculs algébriques, du calcul intégral, la recherche de limites, l'utilisation d'inégalités.

IV. Problèmes de recherche

Remarquons d'abord que ce type de problèmes n'est pas nécessairement disjoint de la catégorie des problèmes transversaux, ni même d'ailleurs de celle des problèmes d'introduction.

IV.1. *Les objectifs*

L'un des objectifs de ce type de problèmes est d'amener les élèves à sortir de l'habitude de ne travailler que sur des problèmes complètement guidés, découpés par des indications détaillées, "pour que les élèves ne sèchent pas". De façon en apparence paradoxale, ces problèmes doivent montrer aux élèves qu'il est normal — et non décourageant — de sécher (voir la note 13). Lorsqu'on fait des mathématiques (pour elles-mêmes ou pour résoudre des problèmes venant de l'extérieur), on est devant des questions dont on ignore *a priori* les réponses, et il faut donc chercher, explorer… sécher ! Et cela valorise d'autant plus le fait de trouver (si, bien sûr, le problème posé n'est pas inabordable). L'un des objectifs des problèmes de recherche est donc d'apprendre aux élèves à explorer une situation mathématique.

IV.2. *L'exploration*

C'est donc sur la qualité de l'exploration à laquelle mène le problème que va se jouer son succès ou son échec didactique. Il faut que l'exploration soit relativement ordonnée, méthodique [22], qu'elle valorise chez les élèves le fait de traduire des hypothèses, d'essayer des cas particuliers, de changer de points de vue, de faire des simulations, de penser à des choses déjà vues et qui ressemblent…

Nous voulons souligner à ce propos que les phases d'expérience, "pour se donner des idées", ne portent pas toujours en elles des éléments qui aideront les élèves à faire les démonstrations.

Souvent des calculs numériques par exemple n'amènent pas aux ressources algébriques qui serviront par la suite : ils ne peuvent pas les amener car on n'en a pas besoin sur des nombres ! Signalons une exception possible en arithmétique, où par exemple regarder la décomposition d'un nombre concret en produit de facteurs, à titre d'expérience, peut faire dans certains cas penser à la méthode générale pour résoudre le problème posé (c'est le cas dans l'exemple 2 de la deuxième partie).

La même remarque s'applique à la calculatrice : souvent les constats expérimentaux ne livrent aucune lumière sur les moyens mathématiques pour démontrer ce qu'on a deviné. Ainsi, voir sur une calculatrice qu'une suite est décroissante donne peu de moyens pour prouver cette décroissance. La même question peut se poser quand on utilise un logiciel de géométrie dynamique pour explorer un problème de lieu géométrique.

Autrement dit, les problèmes de recherche amènent les élèves à conjecturer, souvent après des expériences. Mais il n'y a pas de relation automatique entre expérience et résolution : il se peut que les expériences ne fassent pas approcher d'une solution conceptuelle.

IV.3. *La question des exemples génériques*

Il faut donc s'arranger pour que, parmi les tests que feront les élèves, il s'en trouve qui soient des "exemples génériques" [23], c'est-à-dire des cas traitables "à la main", et dont le mode de traitement soit celui-là même qui, en formalisant la méthode, répond à la question générale posée. Ainsi, dans l'exemple 2 de la deuxième partie, on peut voir que n'importe quel nombre entier concret sur lequel on cherche à résoudre le problème peut servir d'exemple générique. Un problème de recherche dans l'étude duquel ne se présentent pas naturellement des exemples génériques risque d'être inabordable et décourageant pour les élèves.

IV.4. *Quel rapport avec le "problème ouvert" ?*

La technique des "problèmes ouverts" développée par des collègues de Lyon [24] peut relever des deux catégories : problèmes trans-

22 Pour les problèmesd'enseignements de méthodes, voir CI2U (1990).

23 Pour cette notion d'exemples génériques, voir Balacheff (1982).

24 Voir Arsac et Mante (1983)

versaux, problèmes de recherche. Mais leur inscription systématique à certains moments des apprentissages n'est pas toujours organisée. Pour nous en revanche, il est intéressant de *rythmer régulièrement* l'avancée dans des nouvelles connaissances par de tels problèmes : cela nous semble aussi important que la motivation des élèves. De plus, certains "problèmes ouverts", trop astucieux, ne rentrent pas dans cette catégorie : la quantité de problèmes à faire pour comprendre ce qu'il y a de systématique dans leur résolution est trop grande pour une classe ordinaire.

V. Quelques moyens systématiques pour élaborer ces types de problèmes

V.1. *Importance de la formulation des énoncés et de la gestion par l'enseignant*

Soulignons d'abord que n'importe quel texte d'exercice ou de problème peut être modifié du point de vue du travail des élèves de deux manières : en changeant l'énoncé, ou en intervenant pendant le travail des élèves.

Une question ouverte peut être fermée, en remplaçant "est-ce que ?" par "montrer que…", ou même "montrer que… en utilisant…" ou "est-ce que ? penser à…".

Mais elle peut aussi être fermée par l'enseignant dans sa gestion de l'exercice ou du problème en classe : devant des élèves qui bloquent l'enseignant peut les "aider" en reposant oralement une autre question, plus fermée. Il y a plusieurs manières de refermer ainsi une question ouverte ; on peut demander : "qu'est-ce que vous avez à votre disposition pour ?" ; "où devez-vous chercher dans votre cours ?" ; voire, et c'est une fermeture bien plus forte : "aller consulter tel chapitre du cours".

V.2. *Des exemples de moyens pour élaborer des textes de problèmes*

Ceci dit, un certain nombre de ressources permettent d'élaborer des problèmes nouveaux à partir de textes disponibles.

On peut chercher les prolongements d'un problème : réfléchir aux analogies, aux cas particuliers, faire varier des paramètres (passage d'un triangle au quadrilatère par exemple, dans le troisième exemple ci-dessous).

On peut aussi renverser les points de vue, chercher des réciproques.

On peut encore introduire des changements de cadres, des généralisations qui souvent mettent en évidence les avantages ou inconvénients des différentes méthodes.

On peut enfin avoir recours à des problèmes venant d'autres domaines des mathématiques en cours d'étude, ou extérieurs aux mathématiques (problèmes de mise en équation ou modélisation, tels certains aspects de l'exemple 1 de la deuxième partie, ou bien l'utilisation proposée par les nouveaux programmes de la radioactivité pour introduire la fonction exponentielle).

V.2.(1) *Un exemple d'analogies et de généralisations*

Cet exemple demande la disponibilité chez les élèves de certaines connaissances ou méthodes : le théorème de Pythagore, des formules d'aires, le passage à un travail sur les nombres, voire à un raisonnement par récurrence.

Nous en donnons plusieurs variantes :

(1) Construire un carré d'aire égale à la somme des aires de deux carrés donnés.
(2) Construire un triangle équilatéral d'aire égale à la somme des aires de deux triangles équilatéraux donnés.
(3) Construire un cercle d'aire égale à la somme des aires de deux cercles donnés.
(4) Construire un carré d'aire double d'un carré donné, d'aire 11 fois l'aire d'un carré donné…

V.2.(2) *Un exemple de renversement de point de vue*

On sait par une étude géométrique que n'importe quel sommet d'un tétraèdre orthocentrique se projette orthogonalement en l'orthocentre de la face opposée. Renverser la situation peut signifier chercher l'ensemble des points qui peuvent être le quatrième sommet d'un tétraèdre orthocentrique dont on donne une face. La résolution analytique permet de faire résoudre un système ayant du sens mathématiquement et dont les solutions dépendent d'un paramètre.

V.2.(3) *Un exemple de changement de cadres, et comparaisons des méthodes.*

Etant donné trois points A, B, C du plan, existe-t-il un triangle DEF tel que les points A, B et C soient les milieux des côtés du triangle ? On pourra choisir une méthode analytique (résolution de deux systèmes d'équations linéaires), géométrique vectorielle (traduction des équations), géométrique ponctuelle (étude d'une figure), ou géométrique utilisant l'outil des transformations (symétries centrales). Comparer les quatre méthodes.

V.2.(4) *Un bon et un mauvais prolongement*

Généraliser l'exercice précédent à un quadrilatère, à un polygone plan, conduit à réfléchir sur la généralisation des méthodes précédentes et à distinguer le cas où le nombre de côtés est pair de celui où ce nombre est impair. Par contre, remplacer "milieu" par "tiers" ne conduit pas à quelque chose de différent…

V.3. ***Des limites à ne pas dépasser***

Il faut faire attention, dans la fabrication des types de problèmes que nous proposons ici, à ne pas s'éloigner trop de la consistance des mathématiques, sous prétexte de "gymnastique mathématique" : il faut que les problèmes construits soient de vrais problèmes, reliés à des questions effectivement importantes en mathématiques (il doit s'agir d'une "bonne transposition"). Il existe d'ailleurs des garde-fous (histoire des mathématiques, respect des niveaux de conceptualisation réels des programmes, modélisation et liens avec les autres sciences…).

Deuxième partie : exemple d'un problème transversal et d'un problème de recherche

Insistons en préalable sur le fait que les exemples que nous proposons dans cette deuxième partie nous sont personnels. Chaque enseignant, en fonction de ses préférences et de ses goûts, a évidemment à sa disposition de nombreux exemples qu'il peut développer, modifier ou adapter lui-même. Le but de nos exemples est donc uniquement d'essayer de voir si l'on peut mettre en pratique les idées générales exposées dans la première partie. Les lecteurs, sur ces mêmes exemples, peuvent d'ailleurs imaginer diverses variantes.

Exemple 1 : un problème transversal sur les probabilités de l'égalité et de la quasi-égalité des nombres de piles et de faces dans une partie de 2*n* coups de pile ou face

Ce problème est volontairement rédigé comme un problème "classique", assez directif, car nous avons voulu d'abord en faire apparaître les sens mathématiques de façon claire. Des rédactions plus ouvertes en sont possibles, bien sûr, mais nous rappelons que l'objectif premier d'un problème transversal est de faire que des liens se créent entre les connaissances des élèves dans divers domaines, et pas nécessairement d'être un moyen d'entraînement au travail autonome ; mais on peut parfois conjuguer les deux… Nous insérerons divers commentaires à certains points du texte, en italique entre crochets.

A. Etude de la probabilité de la "compensation" exacte

(1) *L'expression de la probabilité de la compensation*

On note ω une partie de $2n$ coups de pile ou face. Une telle partie ω peut se noter, par exemple, ω = PFFPFPP…PPF. On admet que les 2^{2n} parties possibles sont équiprobables, chacune ayant donc une probabilité égale à $1/2^{2n}$ (on travaille donc dans un "modèle" du jeu de pile ou face). Sur l'ensemble Ω des 2^{2n} parties ω possibles, on définit une variable aléatoire X_n par :

$X_n(\omega)$ = le nombre de piles dans la partie ω .

(a) Comment décrire une partie ω réalisant la "compensation" (autant de piles que de faces) ? Combien y a-t-il de telles parties ?

(b) Montrer que la probabilité p_n de la compensation dans une partie de $2n$ coups de pile ou face est donnée par :

$$p_n = \frac{C_{2n}^{n}}{2^{2n}} .$$

Le problème (1) qu'on se pose est : comment se comporte p_n quand n tend vers l'infini ? Avez-vous une idée *a priori* de ce comportement ? Laquelle ?

[*L'objectif de cette première question est évidemment de rafraîchir les connaissances des élèves pour bien situer la question qu'on veut étudier. Bien sûr, cela peut être inutile si on vient de voir peu avant les probabilités du jeu de pile ou face.*]

(2) *Première étude de* p_n

Montrer qu'on peut écrire aussi

$$p_n = \frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{5}{6}\,\cdots\,\frac{2n-1}{2n}$$

(on pourra écrire $2^n.n!$ comme un produit de nombres pairs). En déduire la monotonie de la suite p_n . Que peut-on en déduire relativement au problème (1) et à votre première réponse à celui-ci ?

[*Si on veut faire de ce problème une activité en classe, il faut que les élèves passent un certain temps à étudier le comportement de la suite* p_n *à partir de ce qui précède, et se heurtent à la grande difficulté de la recherche de sa limite à partir de sa seule définition : si la deuxième expression obtenue pour* p_n *prouve sa décroissance et donc sa convergence vers un nombre* $\lambda < 1/2$ *, puis majoré par* $3/8$ *, puis par* $5/16$ *, etc. (et les élèves peuvent expérimenter et conjecturer), la convergence vers* 0 *paraît difficile à prouver par manque de majorations. Cela va d'autant plus valoriser aux yeux des élèves l'indication ensuite don-*

née par l'énoncé, ou l'enseignant, de trouver une expression de p_n au moyen d'une intégrale, "objet"mathématique bien plus facile à majorer. Par ailleurs, le comportement constaté de p_n suffit déjà à infirmer l'idée naïve éventuellement exprimée par les élèves en réponse au problème (1) : p_n tend vers 1 quand n tend vers l'infini.

Bien entendu, il y a d'autres méthodes pour prouver la convergence de p_n vers 0, mais elles donnent moins lieu à une activité transversale.

Par exemple, l'inégalité $\ln(1+x) \leq x$ *pour* $x > -1$ *donne :*

$$\ln p_n \leq -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leq -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k} = -\frac{1}{2}\ln(n+1)$$

et donc $p_n \leq 1/\sqrt{n+1}$ *… Mais au fond l'idée est la même : majorer une somme peut être plus facile que majorer un produit.*]

(3) *Un détour par une suite d'intégrales*

On pose :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^n \,dx \text{ (l'intégrale de Wallis).}$$

(a) En écrivant $(\sin x)^n = \sin x.(\sin x)^{n-1}$, montrer la relation :

$$nI_n = (n-1)I_{n-2} \text{ si } n \geq 2. \qquad (1)$$

Combien valent I_0 et I_1 ?

(b) En déduire qu'on a les relations :

$$I_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3.1}{2n(2n-2)\ldots 4.2}\,\frac{\pi}{2}, \qquad (2)$$

$$p_n = \frac{2}{\pi}\, I_{2n} \qquad (3)$$

Le problème (1) se ramène ainsi au problème (2) : comment se comporte I_{2n} quand n tend vers l'infini ? Mais le fait que p_n s'exprime sous la forme d'une intégrale va nous permettre de majorer facilement cette quantité.

[*Les lignes précédentes sont bien destinées aux élèves, pour leur expliciter qu'on a transformé le problème.*]

(4) *Majoration et minoration de I_{2n}, application au comportement de p_n*

(a) Déduire de la relation (1) la formule :

$$nI_n I_{n-1} = C, \qquad (4)$$

C étant une constante indépendante de n. Combien vaut C ?

(b) En déduire qu'on a :

$$I_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \qquad (5)$$

(c) Quelle estla limite de p_n quand n tend vers l'infini ? Vous attendiez-vous à ce résultat ?

[*Le passage de l'expression initiale de p_n à son expression au moyen de l'intégrale de Wallis pourrait être moins "parachuté" si celle-ci a été vue antérieurement à l'occasion d'exercices ou problèmes sur le calcul d'intégrales. Par ailleurs, la minoration*

$$I_n \geq \sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}}$$

ne coûterait pas beaucoup plus cher à établir à ce point du problème, avec en conséquence la relation : $\lim p_n \sqrt{\pi n} = 1$.
L'essentiel du bilan à tirer avec les élèves, à la fin de cette partie A, nous semble devoir porter, d'une part, bien sûr, sur la conclusion $\lim p_n = 0$, *assez contraire au "bon sens" spontané, mais surtout sur l'idée que pouvoir exprimer une quantité qu'on veut majorer sous*

la forme d'une intégrale peut être un moyen puissant d'obtenir effectivement des majorations.]

B. Etude de la probabilité de la compensation à ε près

On fixe dans la suite un nombre $\varepsilon > 0$, petit. On note $f_n(\omega)$ la fréquence de pile dans la partie ω, c'est-à-dire la quantité $f_n(\omega) = X_n(\omega)/2n$. On dit qu'il y a "compensation à ε près" dans la partie ω si on a :

$$\left| f_n(\omega) - \frac{1}{2} \right| \leq \varepsilon . \qquad (6)$$

(1) Quelques calculs sur les C_{2n}^k

(a) On pose $\phi(x) = (1+x)^{2n}$. En utilisant la formule du binôme, montrer la relation :

$$\sum_{k=0}^{2n} k C_{2n}^k = \phi'(1) .$$

Calculer ce nombre.

(b) En procédant de façon analogue avec la fonction : $x \longmapsto x\,\phi'(x)$, montrer l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{2n} k^2 C_{2n}^k = 2^{2n}\left(n^2 + \frac{n}{2}\right) .$$

[*Il se peut que la méthode du (a) ait déjà été vue antérieurement, auquel cas on peut poser directement la question (b). L'idée à faire dégager ou à réinvestir est ici : le caractère formel de la dérivation sur les polynômes entraîne des relations inattendues dans un autre domaine, la combinatoire.*]

(2) Calcul de la moyenne ou espérance de X_n, et de sa variance

Si $0 \leq k \leq 2n$, soit p_k la probabilité pour que $X_n(\omega) = k$, c'est-à-dire le quotient du nombre de parties ω où pile est sorti k fois par le nombre total de parties possibles de $2n$ coups de pile ou face.

(a) Calculer p_k [caractériser une partie où pile sort k fois].

(b) Soit $m = E(X_n)$ la moyenne ou espérance de X_n, c'est-à-dire le nombre $m = \sum_{k=0}^{2n} k p_k$. Calculer m.

(c) Soit σ^2 la variance de X_n, c'est-à-dire la moyenne de $(X_n - m)^2$, définie par :

$$\sigma^2 = \sum_{k=0}^{2n} (k-m)^2 p_k .$$

Calculer σ^2, en développant chaque binôme $(k-m)^2$.

[*Là encore, l'introduction de cette question ainsi que le (a) ont pour but de remettre en mémoire des résultats de probabilités sans doute vus antérieurement.*]

(3) Minoration de la probabilité de la compensation à ε près

On note E_ε le sous-ensemble de $\{0, 1, 2, \ldots, 2n\}$ formé des entiers k tels que $|k-n| > 2\varepsilon n$.

(a) Montrer les inégalités :

$$\sigma^2 \geq \sum_{k \in E_\varepsilon} (k-n)^2 p_k \geq 4.\varepsilon^2 n^2 \sum_{k \in E_\varepsilon} p_k . \quad (7)$$

(b) En déduire l'inégalité :

$$\sigma^2 \geq 4.\varepsilon^2 n^2 \mathrm{Prob}\left\{ \omega ; \left| f_n(\omega) - \frac{1}{2} \right| > \varepsilon \right\} . \quad (8)$$

(c) Conclure qu'on a la minoration :

$$\mathrm{Prob}\left\{ \omega ; \left| f_n(\omega) - \frac{1}{2} \right| \leq \varepsilon \right\} \geq 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2} , \quad (9)$$

où on précisera la constante C.

(d) Quelle est la limite, quand n tend vers l'infini, de la probabilité de la compensation à ε près ?

(e) Quels commentaires vous inspire la comparaison de A.3.(c) et du résultat précédent ?

[*Le passage de la question* (3)(a) *à la question* (3)(b) *dans la partie* B *demande d'avoir bien compris ce qu'est la loi d'une variable aléatoire (ici : ne prenant que les valeurs* $k = 0, 1, 2, \ldots, 2n$, *avec des probabilités calculées* p_k *, pour interpréter en termes de probabilité la somme* $\sum_{k \in E_\varepsilon} p_k$.

Le problème a pour objectifs mathématiques, on l'aura reconnu, d'une part de prouver, dans le cas particulier du jeu de pile ou face, la loi des grands nombres dans la version de Jacques Bernoulli : convergence en probabilité ; et d'autre part de détruire l'idée naïve et fausse que quand n tend vers l'infini, la probabilité de la compensation exacte tend vers 1.

Son objectif didactique est de contribuer à la prise de conscience par les élèves de l'intérêt des liens entre différents domaines des mathématiques, à l'occasion de la mise en évidence sur un cas précis de l'efficacité de tels liens.]

Exemple 2 : Problèmes de recherche en arithmétique

Problème 1 : Quels sont les entiers qui sont la somme d'au moins 2 entiers naturels consécutifs non nuls ?

[*Ce problème est typique des problèmes de recherche sur lesquels il peut être souhaitable de faire travailler les élèves en petits groupes, en ayant conscience qu'il faut y consacrer un minimum de temps. Nous le rédigeons dans ce qui suit dans cette optique.*

Le traitement comme un "problème de recherche à la maison" est peut-être possible, mais la difficulté des phases de formalisation, et celle de faire choix entre pair ou impair et de choisir la solution "la plus simple" (questions (3), (b) et (c)) risquent de laisser trop d'élèves en échec, compte-tenu de l'absence de discussion entre élèves et avec l'enseignant dans ce type d'organisation du travail.]

(1) Phase d'exploration empirique

[*Nous supposons donc les élèves organisés en petits groupes de* 3 *ou* 4*, réfléchissant au problème posé sous la forme dans laquelle il figure dans le titre. L'enseignant les laisse travailler au moins* 8 *à* 10 *minutes, avant de récolter de premières suggestions. Ce temps de* 10 *minutes peut être éventuellement allongé, mais l'expérience (y compris personnelle !) prouve que les enseignants ont beaucoup de mal à se taire plus de* 10 *minutes, même en regardant leur montre. Mais ces* 10 *minutes peuvent être suivies d'interventions ponctuelles de l'enseignant auprès des groupes, pour relancer un travail autonome sur des essais supplémentaires.*

On peut supposer que quelques essais auront convaincu les élèves que 1, 2 *et* 4 *ne peuvent pas s'exprimer comme sommes d'entiers consécutifs, tandis que* $3 = 1 + 2$, $5 = 2 + 3$, $6 = 1 + 2 + 3$ et $7 = 3 + 4$ *le peuvent. On peut même espérer que* 8 *aura été aussi étudié, mais avec plus de difficultés ; s'il ne l'a pas été, il faut le proposer à l'étude, car c'est le premier cas d'impossibilité où l'on sent qu'il y a un problème pour envisager toutes les décompositions possibles.*

Quelques résultats généraux auront pu être découverts : un nombre impair $2k + 1$ *se décompose bien :* $k + (k + 1)$, *un nombre pair demande au moins trois nombres pour être décom-*

posé, $m(2k+1)$ *se décompose si* $k < m$:
$(m-k) + (m-k+1) + \ldots + (m-1) + m +$
$+ (m+1) + (m+2) + \ldots + (m+k)$,
peut-être d'autres…

Mais il est sans doute illusoire qu'au-delà de ces essais les élèves pourront penser seuls à inverser leur démarche : au lieu de partir de l'entier n à décomposer, partir de la donnée de q nombres consécutifs. C'est aussi une raison de limiter le temps de recherche consacré à ces essais : ils ne débouchent pas naturellement sur la méthode efficace de recherche (voir le IV.2. *sur l'exploration).*]

(2) Exploration raisonnée de la situation

[*Le premier obstacle "théorique" à franchir est donc d'inverser la démarche, et de passer à une étape de formulation générale. C'est difficile, la mise en forme littérale est une sorte de modélisation interne aux mathématiques qui ne va pas de soi. L'enseignant devra sans doute intervenir pour demander cet effort de formalisation, que nous écrivons sous forme mathématique ci-dessous. Il y a quelques variantes possibles (par exemple partir de* $p + 1$ *au lieu de* p*), ainsi que d'autres notations* ($S_{p,q}$, S_p^q , …). *L'enseignant peut évidemment se saisir d'une formulation proposée par un groupe, une fois l'objectif annoncé.*]

(a) Soient des entiers $p \geq 1$ et $q \geq 2$. On note $S(p,q)$ la somme des q entiers consécutifs à partir de p :

$S(p,q) = p + (p + 1) + (p + 2) + \ldots + (p + q - 1)$.

Exprimer cette somme au moyen d'une expression algébrique simple en p et q.

[*L'étape suivante, une fois qu'on a vérifié que tous les groupes ont bien l'expression algébrique attendue :* $q(2p + q - 1)/2$, *est de faire utiliser cette formule pour une exploration raisonnée de la situation. On peut parier que certains groupes partiront tout seuls sur l'idée d'un tableau à double entrée, et il faut alors diffuser cette idée.*]

(b) Dresser un tableau à double entrée, en mettant la valeur de $S(p,q)$ dans la case de colonne $p \geq 1$ et de ligne $q \geq 2$. Essayez d'obtenir dans le tableau tous les nombres inférieurs à 260 qu'on peut ainsi avoir. On pourra utiliser une calculatrice, un tableur, ou faire les calculs à la main. On notera soigneusement les régularités qui apparaissent dans des lignes ou colonnes.

[*Remarquons que la toute dernière indication sur les régularités dans le tableau peut ne pas être donnée si elle apparaît dans le travail des groupes, ce qui est tout à fait possible, car c'est l'outil naturel pour vérifier que tel nombre non apparu (par exemple 128) ne va pas apparaître plus loin…*

Devrait alors suivre une phase de travail autonome assez longue, à l'issue de laquelle les questions suivantes devraient en fait venir des élèves eux-mêmes, ainsi que les réponses. Si certains groupes, par suite d'erreurs de calcul, voient apparaître une puissance de 2 dans leur tableau, la comparaison avec d'autres groupes et la correction du calcul seraient très faciles.]

(c) Au vu du tableau ainsi dressé, faites une conjecture sur l'ensemble E des entiers qu'on n'obtiendra jamais dans le tableau, aussi loin qu'on poursuive sa construction.

(d) Parmi les nombres n qui s'écrivent effectivement sous la forme $S(p,q)$, y en a-t-il qui s'écrivent ainsi de plusieurs façons ?

[*A cette phase du travail, l'ensemble des groupes devrait être persuadé que les nombres qui peuvent s'exprimer comme sommes d'entiers consécutifs sont exactement les nombres qui ne sont pas des puissances de* 2 (1, 2, 4, 8, 16, …, 256 *n'apparaissent pas dans le tableau), et que les autres nombres ont souvent plusieurs décompositions. Il s'agit alors de passer au stade des preuves, où l'articulation entre le travail autonome des élèves et l'aide de l'enseignant sera plus délicate.*]

(3) Etude de la conjecture

(a) Montrer que $S(p,q)$ a toujours un facteur impair ≥ 3 . En déduire "la moitié de la conjecture".

[*Il faudra sans doute poser la question aux élèves : "comment peut-on écrire un nombre n qui n'est pas une puissance de 2 ?", pour aboutir à la formulation :* $n = 2^k(2r + 1)$ *, avec* $r \geq 1$ *, pour que certains groupes puissent faire le constat de la question* (a).]

(b) Soit $n = 368$. Factoriser n en facteurs premiers. On cherche à écrire $n = S(p,q)$ avec q impair : $q = 2l + 1$. Montrer qu'on obtient l'équation $2^4.23 = (2l + 1)(p + 1)$. Essayer de résoudre cette équation (dont les inconnues sont l et p)en choisissant la solution la plus "simple" : que trouve-t-on ?

(c) Soit $n = 560$. Si on cherche à écrire $n = S(p,q)$ avec q impair : $q = 2l + 1$, la méthode précédente marche-t-elle ? Et si on cherche q pair ?

[*Les questions* (b) *et* (c) *semblent nécessaires pour introduire l'idée de la solution générale en* (d). *Les deux nombres testés jouent ici le rôle d'exemples génériques de ce qui peut se passer. La difficulté, outre le fait de faire un raisonnement "général", auquel les élèves sont peu habitués, tient au fait qu'il n'y a pas unicité de la solution (question* (1)(d)*), et qu'en fait on ne voit pas simplement de méthode "naturelle" systématique pour trouver toutes les solutions : c'est assez miraculeux que la recherche la plus "simple" donne une solution !*

Cette phase de l'exploration demandera sans doute l'aide de l'enseignant dans beaucoup de groupes.]

(d) Soit $n = 2^k.(2r + 1)$ avec $k \geq 0$ et $r \geq 1$. On veut trouver $p \geq 1$ et $q \geq 2$ tels que $n = S(p,q)$. On cherche d'abord s'il y a une solution avec q impair ≥ 3 . Montrer que l'équation à résoudre peut s'écrire $2^k.(2r + 1) = a.b$, avec a impair. A quelle condition sur k et r peut-on choisir la solution la plus simple ?

Si cette condition n'est pas vérifiée, montrer que la même méthode marche en cherchant q pair ≥ 2 .

[*On peut penser que c'est l'enseignant qui devra suggérer en partie la piste de recherche ici proposée, mais comme elle exploite exactement l'idée qui a marché dans les exemples génériques, elle devrait être bien comprise et mise en œuvre avec une certaine autonomie de la part des élèves.*]

(e) Enoncer soigneusement le résultat final sur l'ensemble E .

[*Ce problème semble tout à fait indiqué pour faire comprendre aux élèves qu'une méthode efficace et fréquente en arithmétique consiste à raisonner par cas : q pair ou q impair, n de la forme* $3m$, *ou* $3m + 1$, *ou* $3m + 2$ …

De plus, il montre aussi qu'en arithmétique *il se peut qu'on puisse trouver des solutions sans avoir de moyen systématique de les trouver toutes !*]

Problème 2 : Quels sont les entiers qui sont la somme d'une progression arithmétique d'entiers strictement positifs de raison 2 et d'au moins 2 termes ?

(1) Résoudre le problème général.

(2) Donner pour $n = 211$ toutes ses décompositions possibles en somme d'une progression arithmétique de raison 2. Faire de même pour le nombre $n = 132$. Pouvez-vous généraliser ?

[*Ce problème* 2 *est notablement plus simple que le problème* 1*, on peut laisser les élèves chercher sans indications, quitte, si cela bloque, à poser la question :* "si $n = q(p + q - 1)$, quelle propriété arithmétique remarquable le nombre n ne possède-t-il pas ?" *Là aussi, les exemples numériques proposés peuvent servir d'exemples génériques pour faire comprendre que, cette fois, il y a un algorithme simple pour déterminer toutes les solutions. On peut d'ailleurs faire écrire cet algorithme aux élèves, en supposant donnée la décomposition en facteurs premiers de l'entier n…*]

Troisième partie : des activités pour introduire à la fois l'outil suites adjacentes et le lien entre aires des sous-graphes et primitives

Les nouveaux programmes de terminale proposent d'introduire la notion d'intégrale d'une fonction continue $f \geq 0$ au moyen de l'aire de son sous-graphe. Cette présentation est évidemment plus proche de la véritable origine historique de l'intégrale, et de son utilisation dans les sciences : un moyen de mesurer des grandeurs dans des situations de non proportionalité. En fait ce dernier point est un peu caché, dans l'introduction ainsi faite, dans l'utilisation implicite de l'aire. Cette utilisation exclut en effet *a priori* le recours aux sommes de Riemann ou Darboux.

Néanmoins le nouveau rôle attribué à l'aire dans la présentation de l'intégrale rend sans doute nécessaire que cette notion soit plus franchement abordée que dans les programmes précédents. En particulier, il paraît utile de faire une synthèse de diverses propriétés de la notion d'aire qui vont être utilisées, et en particulier de faire comprendre, au moins intuitivement, pourquoi le calcul des aires demande d'en faire des *approximations* par des aires de figures simples (des polygones), au moyen de suites de nombres qui seront assez souvent des suites adjacentes.

Par ailleurs, le théorème fondamental qui relie la notion d'intégrale (c'est-à-dire d'aire, désormais) à celle de primitive est en un sens assez miraculeux, et en faire pour les élèves une *question* naturelle et non un énoncé parachuté peut être un enjeu didactique intéressant.

Nous présentons donc dans ce qui suit diverses activités possibles autour de ces questions. Conçues comme des activités d'introduction, elles peuvent être proposées, selon le mode de gestion choisi, comme des problèmes directifs ou comme des problèmes de recherche. Bien sûr, là aussi les propositions faites reflètent nos choix personnels, les lecteurs en ont certainement bien d'autres à leur disposition, et en particulier des propositions faites par divers auteurs dans de nombreux numéros de la revue Repères.

Avant de proposer ces activités, nous dégageons une brève synthèse des propriétés de la notion d'aire, qui devraient être plus ou moins claires dans la tête des élèves.

On peut légitimement partir d'un ensemble de propriétés de l'aire de "figures usuelles" admises comme naturelles, et qu'il est doncbon de rappeler.

Le plan étant repéré par un repère orthonormé, l'unité d'aire est représentée par le carré unité C construit sur les deux vecteurs du repère. On admet alors qu'à toute figure "raisonable" F on peut associer son aire *aire*(F) , qui est un nombre positif ou nul, avec les propriétés suivantes :

(1) *aire*(C) = 1 ;

(2) l'aire de tout rectangle de côtés de longueurs a et b vaut ab ;

(3) en particulier, l'aire d'un segment et celle d'un point sont nulles ;

(4) si deux figures F et F' sont isométriques, alors *aire*(F) = *aire*(F') ;

(5) l'aire est croissante : si $F \subset F'$, alors $aire(F) \leq aire(F')$;

(6) l'aire est additive : si $aire(F \cap F') = 0$, alors

$aire(F \cup F') = aire(F) + aire(F')$;

(7) si h est une homothétie de rapport λ , alors $aire(h(F)) = \lambda^2\, aire(F)$.

Ces propriétés sont celles auxquelles les élèves sont en principe habitués. En fait, certaines d'entre elles n'ont sans doute pas été formalisées antérieurement, en particulier la propriété (3) (trop évidente, mais souvent utilisée implicitement dans les applications de (6)) et la propriété (7) (on sait qu'elle pose des problèmes à une grande partie de la population).

Ces propriétés ne sont pas indépendantes, mais cela importe peu, il ne s'agit pas d'élaborer une axiomatique minimale de la notion d'aire.

(1) En dire et en faire un peu plus ?

Dès la classe de première, c'est-à-dire dès qu'on dispose du concept de suites numériques, on peut faire faire aux élèves quelques activités ayant pour but de faire comprendre qu'une aire s'obtient en général comme limite, par un encadrement de la figure entre des polygones (du moins dans le cas des ensembles quarrables, voir : Rogalski et al (2001)). Un exemple assez simple est l'aire d'un rectangle dont les longueurs des côtés sont rationnelles non entières, puis irrationnelles. Cet exemple peut avoir pour objectifs, d'une part de faire fonctionner les propriétés (1),…, (6) ci-dessus, en montrant que des faits intuitifs parce qu'antérieurement admis puis abondamment utilisés peuvent aussi se justifier, et de l'autre de mettre en évidence le processus d'encadrement, qui va utiliser sans le dire des suites adjacentes de nombres décimaux.

Si les côtés du rectangle ont pour longueurs p/q et r/s , il faut déterminer l'aire du carré de côté $1/q^s$ (par (3), (4),(6)), puis l'aire de la réunion de tels carrés…

Puis si les côtés ont des longueurs irrationnelles a et b, on utilise des encadrements décimaux :

$$\frac{A_n}{10^n} \leq a \leq \frac{A_n + 1}{10^n} \quad \text{et} \quad \frac{B_n}{10^n} \leq b \leq \frac{B_n + 1}{10^n}$$

avec A_n et B_n entiers, et on encadre géométriquement le rectangle entre deux réunions de carrés de côtés $1/10^n$ …

[*Il y a de nombreuses façons de gérer en classe le travail des élèves sur ce type de ques-*

tions, l'essentiel est de fairecomprendre les deux objectifs cités ci-dessus.]

(2) L'aire du disque de rayon 1 et celle des polygones réguliers à 2^n côtés

[*Ce calcul peut être proposé en première ou en terminale. Là aussi l'objectif est de prouver un résultat "bien connu" : l'aire du disque unité est* π *. Il faut évidemment partir d'un fait connu sur* π *, même s'il reste implicite :* 2π *est la période des fonctions circulaires de base parce que c'est la mesure de la circonférence du cercle unité. Le problème proposé va donc montrer que c'est le même nombre* π *qu'on trouve dans la formule du périmètre (c'est là sa définition, en fait) et dans celle de l'aire, et il faut alors une preuve ; se rendre compte qu'un résultat longtemps admis et utilisé peut aussi être prouvé, et doit même l'être à un certain moment, est un aspect important de la formation mathématique.*

L'énoncé qui suit est mis en forme mathématique, mais on peut parfaitement le faire rechercher avec un minimum d'indications, par exemple en petits groupes.]

On pose $N = 2^n$, et on note (P_N) la suite des polygones réguliers à N côtés inscrits dans le disque *D* de rayon 1 , les sommets de P_N étant des sommets de P_{2N} , de telle sorte qu'on ait $P_N \subset P_{2N}$. On note aussi Q_N la suite des polygones réguliers à N côtés dont les côtés sont tangents au cercle *C* bord de *D* en leurs milieux, sommets de P_N . On a donc $Q_{2N} \subset Q_N$.

(a) Faire un dessin représentant les polygones P_4 , P_8 , Q_4 et Q_8 .

[*L'étape du dessin paraît indispensable dans cette activité, à la fois pour pouvoir démarrer des "calculs géométriques" et pour mettre tous les élèves sur la même ligne de départ.*]

(b) Calculer les aires a_n et b_n des polygones P_N et Q_N [on pourra utiliser les fonctions trigonométriques].

[*Le calcul ne devrait pas poser beaucoup de difficultés aux élèves, la question importante est la suivante.*]

(c) Quelles propriétés des suites a_n et b_n faut-il établir pour calculer l'aire du disque unité ?

[*C'est cette question qui devrait amener les élèves à imaginer la monotonie des deux suites (alors facile à prouver géométriquement), le point délicat étant de penser à montrer que* $(b_n - a_n)$ *tend vers 0 quand n tend vers l'infini pour prouver leur convergence vers l'aire du disque. L'établissement de la relation :*

$$b_n - a_n = \frac{N \sin^3 \pi/N}{\cos \pi/N} ,$$

une fois suggéré de calculer cette différence, devrait être faisable.]

(d) Déterminer alors l'aire du disque unité.

[*La dernière difficulté, une fois qu'on a vu que les deux suites encadrent l'aire du disque unité et tendent vers lui, est de calculer effectivement leur limite, en ramenant l'expression de*

$$a_n = N \sin(\pi/N) \cos(\pi/N) \quad \text{à} \quad \pi \frac{\sin(2\pi/N)}{2\pi/N} ,$$

et d'interpréter ensuite ce nombre comme $\sin x / x$ *pour un* x *tendant vers 0, et d'utiliser alors un résultat d'analyse sur la fonction sinus admis en première. Pour des com-*

pléments sur ce résultat, voir (Rogalski et al (2001)).

L'idée générale qu'on peut essayer de dégager, à l'issue de cette activité, est que pour déterminer l'aire d'une figure, il suffit de l'encadrer entre deux polygones dont la différence des aires est aussi petite qu'on veut. Ces polygones ne doivent pas nécessairement être convexes (même si c'est le cas dans cette activité), et cela va se voir dans les activités suivantes.]

(3) L'aire sous la courbe Γ_2 : $y = x^2$

(a) En découpant l'intervalle $[0, x]$ en les intervalles $[0, x/n]$, $[x/n, 2x/n]$, … , $[(n-1)x/n, nx/n]$, et en encadrant l'aire sous la courbe Γ_2 sur chacun des intervalles par des aires de rectangles, déterminer deux nombres σ_n et Σ_n vérifiant $\sigma_n \leq aire(\Gamma_2, x) \leq \Sigma_n$ (où $aire(\Gamma_2, x)$ désigne l'aire de la portion du plan comprise entre la courbe Γ_2, l'axe des x et la verticale d'abscisse x). Pour ce faire on pourra dessiner la courbe Γ_2 et les intervalles $[kx/n, (k+1)x/n]$.

(b) Calculer σ_n et Σ_n au moyen des sommes $S_2(n)$ et $S_2(n-1)$, où on a posé :

$$S_2(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2.$$

En déduire que $\Sigma_n - \sigma_n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Montrer par récurrence qu'on a :

$$S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(c) Montrer que la suite Σ_{2^n} est décroissante et que la suite σ_{2^n} est croissante [en faisant un dessin, on pourra regarder par quoi on a remplacé un rectangle intervenant dans un terme de Σ_{2^n} quand on passe à $\Sigma_{2^{n+1}}$, et de même pour σ_{2^n} quand on passe à $\sigma_{2^{n+1}}$. En déduire, en utilisant l'encadrement de (a) et les formules de (b), la relation :

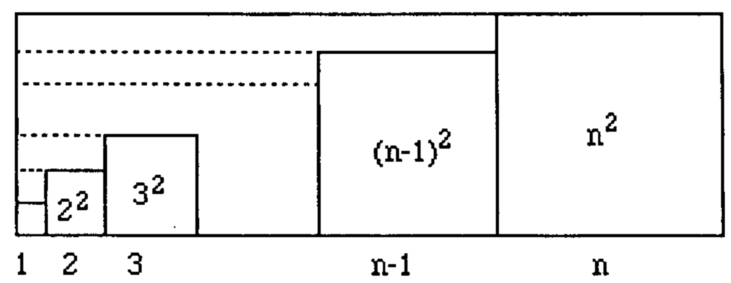
$$aire(\Gamma_2, x) = x^3/3.$$

Quelle est la fonction dérivée de la fonction $x \longmapsto aire(\Gamma_2, x)$?

[*Nous ne proposons pas de gestion particulière pour cette activité, plusieurs sont possibles selon le moment où on la fait.*
On peut donner une variante géométrique à la place de la récurrence pour la deuxième partie de la question (2)(b)*, en proposant d'établir, àpartir du dessin de la figure ci-dessous, la relation :*

$$S_2(n) = n(1+2+3+\ldots+n) - \{1 + [1+2] + [1+2+3] + \ldots + [1+2+\ldots+(n-1)]\},$$

en enlevant de l'aire du rectangle la somme de celles des bandes horizontales, et en utilisant les sommes $S_1(k)$.]



(3) L'aire sous la courbe Γ_3 : $y = x^3$

On se propose de faire le même type de calcul pour calculer l'aire $aire(\Gamma_3\ ,\ x)$ de la portion du plan comprise entre la courbe Γ_3 : $y = x^3$, l'axe des x et la verticale d'abscisse x .

(a) En faisant un dessin, reconnaître les régions du plan dont les aires sont données par les formules :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^3x^3}{n^3}\ \frac{x}{n} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1)^3x^3}{n^3}\ \frac{x}{n}$$

(b) On admet la formule :

$$S_3(n) = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

En déduire de la même façon que pour la courbe $y = x^2$ la relation : $aire(\Gamma_3\ ,\ x) = x^4 / 4$. Quelle est la fonction dérivée de la fonction $x \longmapsto aire(\Gamma_3\ ,\ x)$?

[*Le lecteur peut, selon ses préférences, proposer éventuellement une preuve (algébrique ou géométrique) pour la formule donnant* $S_3(n)$.

On peut estimer qu'à l'issue des deux dernières activités les élèves sont prêts à conjecturer la relation générale :

$$aire(\Gamma_p\ ,\ x) = x^{p+1} / (p+1)\ ,$$

et que le rapport entre un tel calcul d'aire et la dérivation du résultat obtenu devient alors pour eux un problème qui a du sens, sur lequel on peut s'appuyer pour montrer le résultat général :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, aire(\Gamma_f\ ,\ x) = f(x)\ ,$$

On peut aussi souhaiter aller plus loin, et soit étudier des cas supplémentaires ($p = 4$, $p = 5$,...)*, soit étudier le cas général d'un exposant entier. Rappelons que Fermat a calculé l'aire sous la courbe* Γ_α : $y = x^\alpha$, *pour* α *rationnel,* $\alpha \neq -1$. *Pour des activités sur ces différents cas, voir* (Rogalski et al (2001))*, où l'on trouvera aussi l'application de la méthode de Fermat à l'établissement de la propriété fonctionnelle du logarithme directement à partir de sa définition comme aire sous le graphe de la courbe* $y = 1 / x$ *entre les verticales d'abscisses* 1 *et* x .]

Appendice : Quelques thèmes présents dans la revue Repères et pouvant donner lieu à des problèmes de recherche, d'introduction ou transversaux

(1) Autour des questions d'aires et volumes et leurs rapport avec l'intégrale des fonctions, citons :

— Une approche heuristique de l'analyse, C. Hauchart, M. Schneider, Repères 25 (octobre 1996), p.35.

— Calcul d'aires et calcul intégral en TS : un essai pédagogique, J.-P. Daubelcourt, Repères 31 (avril 1998), p. 69.

(2) Pour d'autres problèmes de recherche en arithmétique, voir :

— Conjectures en arithmétique, J.-A. Roddier, Repères 46 (janvier 2002), p. 91.

(3) Sur des problèmes d'introduction à la notion de fonction, on peut consulter :

— Problème d'introduction à la notion de fonction en seconde, Groupe lycée de l'Irem de Clermont-Ferrand, Repères 10 (janvier1993), p. 47.

— Des activités analytiques où la géométrie peut aider à comprendre, B. Destainville, Repères 8 (juillet 1992), p.111.

(4) Pour des activités mettant en jeu des changements de cadres, soit entre divers aspects de la géométrie, soit entre géométrie et analyse, voir, outre les précédents :

— L'inversion de la seconde à la terminale, G. Kuntz, Repères 30 (janvier 1998), p. 23.

— Application du plan dans le plan en classe de seconde, G. Anselme et M. Magnenet, Repères 33 (octobre 1998), p. 59.

— Le théorème d'Erdös-Mordel par la méthode des aires, J.-L. Ayme, Repères 35 (avril 1999).

Bibliographie

Arsac G. et Mante M. (1983) *Des problèmes ouverts dans nos classes de premier cycle*, Petit x, 2,5-33, Grenoble.

Balacheff N. (1982) *Preuve et démonstration en mathématiques au collège,* Recherches en didactique des mathématiques, 3(3) 261-304, La Pensée Sauvage, Grenoble.

CI2U (1990) *Enseigner des méthodes en mathématiques,* dans : *Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A première année*, brochure de la Commission Inter-Irem Université.

Douady R. (1987) *Jeux de cadres et dialectique outil/objet,* Recherches endidactique des mathématiques 7(2) 5-32, La Pensée Sauvage, Grenoble.

Dorier J.-L. ed. (1997)*L'enseignement de l'algèbre linéaire en question,* LaPensée Sauvage, Grenoble.

Legrand M. (1990) *Un changement de point de vue sur l'enseignement de l'intégrale,* dans : *Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A première année,* CI2U.

Robert A. (1998) *Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université,* Recherches en didactique des mathématiques 18(2)139-190, La Pensée Sauvage, Grenoble.

Robert A., Lattuati M., et Penninckx J. (1999) *L'enseignement des mathématiques au lycée, un point de vue didactique,* Ellipses.

Robert A. et Tenaud I. (1989) *Une expérience d'enseignement de la géométrie en terminale C,* Recherche en didactique des mathématiques, 9(1), 63-72, La Pensée Sauvage, Grenoble.

Rogalski M. et al (2001) *Carrefours entre analyse algèbre géométrie,* Ellipses.