
LA METHODE DES INDIVISIBLES RACONTEE LORS D'UN STAGE

Claude MERKER, Irem de Besançon

Pour la deuxième journée du stage Irem sur l'histoire des mathématiques, nous avons choisi de raconter comment s'était constituée au XVII^{ème} siècle une méthode très originale et inventive pour calculer les mesures d'objets courbes (lignes, surfaces, volumes) : la *méthode des indivisibles*.

La naissance et l'évolution de cette théorie, dont la durée de vie n'a pas dépassé 50 ans, ressemblent à celles d'une théorie physique. La méthode a vu le jour parce qu'il y avait des problèmes nouveaux. Elle a tenté de comprendre le nouveau par l'ancien et de ramener tout à un petit nombre de principes. Elle a évolué avec des aller et retour, des confrontations au réel, des modifications substantielles lorsque l'adéquation est par trop fautive (paradoxes), jusqu'à aboutir à une méthode des indivisibles tout à fait autre que

celle des origines, dans laquelle les indivisibles sont devenus divisibles!

Pendant les six heures de ce stage nous avons répercuté différents travaux : ceux de Bernard Bettinelli, sur Archimède, d'Ettore Bortolotti, François De Gandt, Evelyne Barbin sur Cavalieri, Torricelli, Roberval. Les références précises de ces sources sont données à la fin. Pour ne pas alourdir le texte, il n'y aura pas d'appels de note, ni de citations bien délimitées. Bien sûr l'auteur de ces lignes répercute ces articles et brochures à sa manière, et rien ne vous empêche de recourir aux sources pour savoir ce qu'ils ont vraiment dit. Seule la partie concernant Pascal est propre à l'auteur de la narration.

La méthode des indivisibles *stricto sensu*, celle de Cavalieri, repose sur un principe simple qui emporte l'adhésion alors que l'on

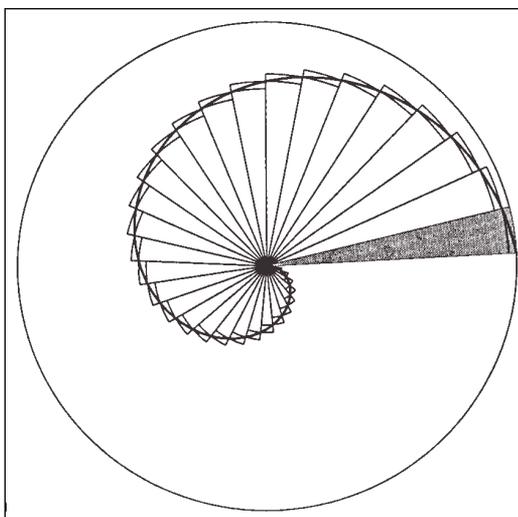
ne peut pas le démontrer, (tout au plus on peut faire appel à un dangereux principe de permanence pour passer du fini à l'infini), elle est un exemple étonnant de « certitude-par-l'évidence » qui court-circuite la rigueur mathématique, elle nous plonge dans le désarroi. Même ses avatars n'ont pas eu d'avenir, on en est sorti en la quittant vraiment. Le dépaysement est donc assuré.

C'est à Archimède trois siècles avant J.C. que nous devons les premiers calculs de mesures d'objets courbes. Il y a eu peu de choses nouvelles dans ce domaine entre Archimède et les savants du XVIIIème.

A tout seigneur tout honneur, nous avons commencé par

Archimède

Et par la plus belle courbe de l'antiquité : la spirale. Elle est dessinée par un point qui se meut uniformément sur une demi-droite tournant uniformément autour de son origine (une courbe d'équation $r = a\theta$, dirait-on aujourd'hui). Archimède a montré que l'aire de sa première révolution était le tiers de celle du disque de même nom. Heureusement nous n'avons pas eu à lire Archimède dans le texte, Benard Bettinelli l'avait fait pour nous¹. La spirale est découpée en secteurs d'angles égaux et encadrée par un double système de



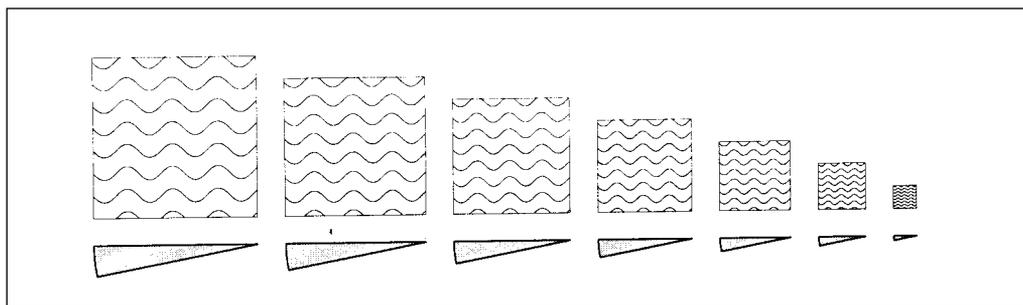
secteurs circulaires. la différence entre les deux figures encadrantes est égale au premier secteur circulaire (le plus grand), et peut donc être rendue plus petite que toute mesure donnée d'avance.

Archimède sait que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n - 1)^2 <$$

$$(1/3) n \cdot n^2 < 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

sa démonstration est géométrique, elle réajuste des carrés de côtés 1, 2, ...n et des rectangles créés pour la situation. Nous ne la faisons pas car 1) elle est très longue, 2) elle concerne des aires « droites », alors que l'objet



¹ Dans la brochure citée à la fin.

du stage est de calculer des aires emprisonnées dans des bords courbes. Les secteurs sont proportionnels aux carrés de même côté (cf. figure du bas), et l'on peut transférer la double inégalité qui porte sur des carrés aux secteurs, par proportionnalité.

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n - 1)^2$ devient la figure encadrante inférieure, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ la figure encadrante supérieure, tandis que $n n^2$ devient le disque de première révolution (paradoxalement, c'est cette transformation « par proportionnalité » des n carrés tous égaux en le disque qui a été la plus difficile à voir au stage !). L'inégalité s'écrit donc :

$$\begin{aligned} & \text{Figure encadrante inférieure} < \\ & \frac{1}{3} \text{ Disque de première révolution} \\ & < \text{Figure encadrante supérieure} \end{aligned}$$

Il y a alors deux figures fixes, A = le tiers du disque (supposée connue, pour le dire vite) et B = la spirale (cherchée) toutes deux coincées entre deux figures encadrantes dont la différence peut être prise inférieure à toute mesure donnée. Archimède choisit comme mesure donnée celle de $B - A$, si B est supérieure à A , et celle de $A - B$, si A est supérieure à B . Puis il montre que dans les deux cas c'est impossible, d'où le nom de « double réduction à l'absurde » donné à la méthode (prenons

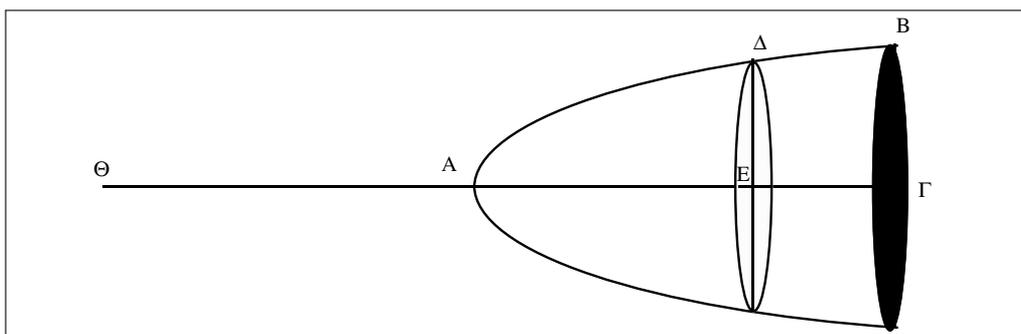
le premier cas : la figure encadrante supérieure S est à droite de B , la figure encadrante inférieure I est donc à droite de A :



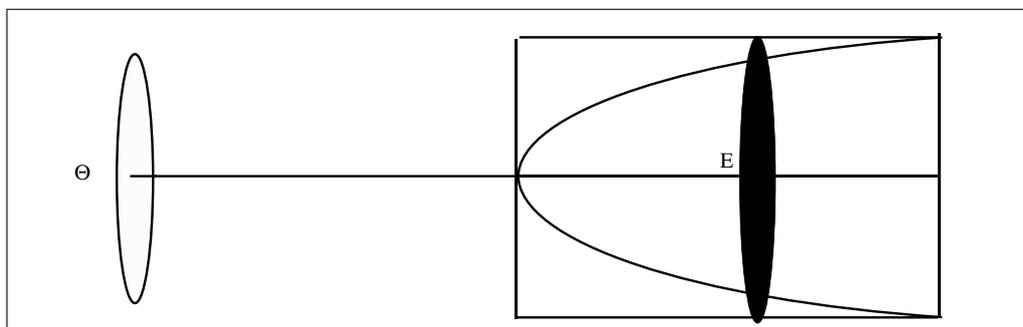
à cause de leur différence qui doit être inférieure à la mesure donnée $B - A$, or c'est absurde).

La démonstration nous cloue sur place par sa rigueur, mais comment Archimède en a-t-il eu l'idée ? En général, pour Archimède mesurer un objet, ce n'est pas trouver un nombre, mais un autre objet connu, dont le carré est l'exemple par excellence, auquel il rapporte la mesure de l'objet inconnu. Le cas de la spirale, rapportée à un disque est plus compliqué, l'aire du disque ne se ramenant pas à celle d'un carré. Dans ce dernier cas, Archimède ramène un problème à un autre, équivalent.

Nous avons aussi regardé une autre démonstration par cette méthode rigoureuse de double réduction à l'absurde : celle du volume du segment droit de parabolode de révolution, dont Archimède montre qu'il est égal à la moitié du cylindre circonscrit². Puis nous sommes passés à une toute autre preuve de ce même résultat. Parabolode et cylindre sont découpés en disques, d'aires A_1 et A_2 respectivement. A_1 (en blanc) varie avec le point



² Vous pouvez encore voir la brochure de B. Bettinelli pour une interprétation visuelle particulièrement éclairante de cette démonstration difficile d'Archimède.



E, tandis que A_2 (en noir) est constante tout le long de $A\Gamma$. A_1 et A_2 vérifient la proportion :

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{AE}{A\Gamma}$$

(ceci n'est rien d'autre que la manière antique d'écrire l'équation de la parabole. Trois siècles avant J.C., on n'égalait pas une longueur à un carré, mais on peut dire qu'une ligne est à une ligne comme une surface est à une surface).

Archimède laisse tous les A_2 en place et transporte tous les A_1 au même point Θ symétrique de Γ par rapport à A (ainsi les A_2 sont constants mais leur place est variable, tandis que les A_1 sont variables avec E , mais leur nouvelle place est constante). Le cylindre reste en place et le parabolôïde se retrouve massé en Θ .

Comme $A_1 \times A\Theta = A_1 \times A\Gamma = A_2 \times AE$, chaque tranche A_2 du cylindre équilibre la tranche A_1 du parabolôïde qui était placée au même endroit avant de déménager en Θ , il y a équilibre entre les tranches correspondantes, et par conséquent entre les volumes complets. Or le centre de gravité du cylindre est en son milieu, pour que l'équilibre se réalise, il est nécessaire que le parabolôïde « pèse » deux

fois moins. La preuve mécanique est beaucoup plus rapide que la démonstration rigoureuse.

Le livre « La méthode relative aux théorèmes mécaniques » dans lequel figure cette démonstration fondée sur la loi du levier a été retrouvé en 1906 à Jérusalem. A propos de la démonstration de l'aire du segment de parabole qui repose sur les mêmes ressorts, Archimède dit :

ce que nous venons de dire ne démontre sans doute pas ce qui précède, mais donne jusqu'à un certain point l'idée que la conclusion est juste. C'est pourquoi, reconnaissant nous-mêmes que la conclusion n'est pas démontrée, mais ayant dans l'idée qu'elle est exacte, nous donnerons en son lieu la démonstration géométrique [...]

Il est vrai que si une tranche est un disque, elle ne pèse rien, et que si elle a la moindre épaisseur l'équilibre n'est plus rigoureux. Archimède dit dans la lettre à Eratosthène, qui est une préface à ce livre :

[...] je mettrai d'abord par écrit ce qui m'a aussi été révélé en premier lieu par la mécanique ; notamment que tout segment de parabole vaut une fois et un tiers le triangle [...]

ce par quoi nous voyons qu'il accorde une grande valeur à ce procédé mécanique d'invention.

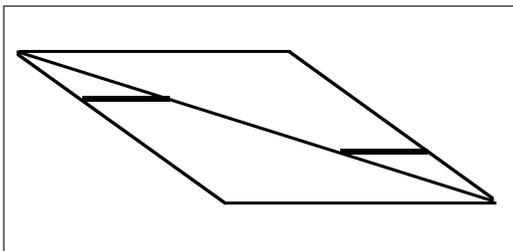
Cavalieri, Torricelli, les paradoxes et ce que chacun en fait

1) Cavalieri fait paraître, entre 1620 et 1635 sept volumes très difficiles à lire, à ce que l'on dit (même à l'époque), la *Géométrie par les indivisibles*. Une règle découpe dans une figure plane une ligne, qui en est un indivisible, en faisant varier la règle parallèlement à elle-même, il peut parler de « toutes les lignes » de la figure. De même il parlera de « tous les plans d'un volume » ; les indivisibles ont toujours une dimension de moins que le continu dans lequel ils sont découpés et que l'on cherche à mesurer.

Cavalieri affirme et veut justifier le principe suivant : lorsqu'on a deux figures telles que tous les indivisibles de l'une ont un rapport constant à ceux de l'autre, alors les aires de ces deux figures sont dans le même rapport : « Les continus suivent les proportions de leurs indivisibles (*continua sequi indivisibiliorum proportionem*) », ou « de même que un à un, ainsi de tous à tous (*ut unum ad unum, ita omnes ad omnes*) »

2) Cavalieri a une démarche intellectuelle : la méthode l'intéresse plus que le résultat. Ces derniers servent à corroborer la méthode.

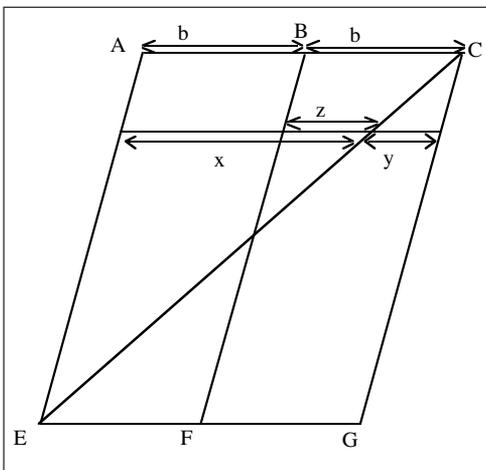
Par exemple, Cavalieri coupe un parallélogramme en deux triangles (figure en haut à droite), découpe des indivisibles égaux chacun à chacun dans les deux triangles et retrouve bien ce que l'on savait d'avance, les aires sont dans le rapport un, comme leurs indivisibles.

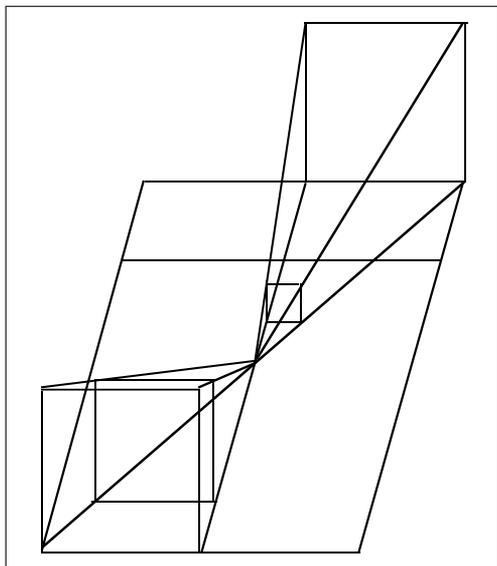


Il teste le principe sur un exemple moins simple, le volume d'une pyramide à base carrée... Comme au stage, vous pouvez essayer.

Prenez un parallélogramme comme ci-dessous, élevez des carrés perpendiculairement à son plan sur (toutes) les lignes notées b, x, y, z (sur le schéma de la page suivante, c'est fait seulement pour z) et calculez ainsi le volume de la pyramide élevée sur le carré de côté AC , et ayant E pour sommet.

Avec tous ces carrés vous obtenez des indivisibles de volumes, d'une dimension de moins, comme il se doit. La relation entre ces indi-





visibles : $x^2 + y^2 = 2b^2 + 2z^2$, se traduit en une relation entre les continus. On trouve que la pyramide a même mesure que le tiers du parallélépipède, chose déjà connue depuis l'antiquité. Mais bien que la pyramide n'ait rien de courbe, la démonstration requiert de l'infini, du calcul intégral, dirait-on aujourd'hui³.

3) Cavalieri veut être rigoureux. Il justifie sa démarche par l'égalité du *Livre des proportions* d'Euclide, c'est-à-dire (en langage modernisé) : *Si des grandeurs sont telles que*

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n},$$

alors elles vérifient aussi l'égalité

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}.$$

³ Comme la mesure des objets droits n'est pas spécialement notre propos, nous avons mis en annexe les détails du calcul pour les lecteurs que cela intéresserait.

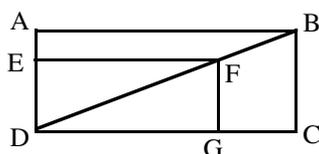
Les a_i et les b_i sont les indivisibles, la première série d'égalités ne pose pas de problème, mais dire que les continus sont les sommes de leurs indivisibles n'est en tous cas plus du tout dans la manière euclidienne, Euclide ne considère pas des sommes infinies !

De plus on retrouve le même problème qu'avec les pesées archimédiennes, chaque ligne est de mesure nulle (en tant qu'aire) et une somme de zéros fait toujours zéro. Comme les indivisibles sont hétérogènes à la grandeur qui les produit, Cavalieri refuse de dire que le continu est composé d'indivisibles, il refuse d'ailleurs aussi de dire le contraire, il préfère dire qu'il ne prend pas parti. Mais alors comment s'appuyer sur une théorie des proportions, même étendue à l'infini ?

Le plus juste est de dire qu'il raisonne sur des agrégats d'indivisibles (« *omnes lineae* »), êtres mathématiques abstraits, et qu'il transfère ce qu'il a trouvé aux continus sensibles. D'ailleurs il cherche à montrer que les agrégats ont la propriété euclidienne de grandeurs (en additionnant suffisamment de fois l'une, on arrive à dépasser l'autre). Cependant la question reste toujours celle-ci : peut-on légitimement transférer aux continus sensibles ce qu'on a démontré (et encore, c'est à vérifier) sur ces objets déspatialisés que sont les agrégats d'indivisibles ?

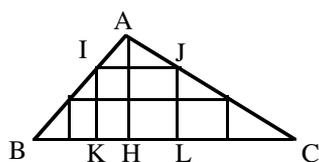
4) Torricelli est plus connu pour avoir fait, avec du mercure, une expérience décisive qui attribue à la pesanteur de l'air la prétendue horreur de la nature pour le vide. Pourtant sa contribution à la *méthode des indivisibles* est fondamentale. Torricelli a dix ans de moins que Cavalieri. Il veut rendre accessibles les découvertes de son aîné. Il débusque et étudie des paradoxes.

Les indivisibles EF (découpés dans le continu ABD selon la règle AB), et FG (découpés dans BCD selon la règle BC) ont une proportion constante, différente de 1 et les deux continus ABD et BDC ont même aire.



Donc, ici, les continus ne suivent pas les proportions de leurs indivisibles !

Cavalieri attribue la responsabilité du paradoxe au fait que la direction de découpage n'est pas la même ; il impose donc comme remède la direction du découpage. Mais Cavalieri lui-même présente cet autre situation où les continus sont les triangles inégaux AHB et AHC :

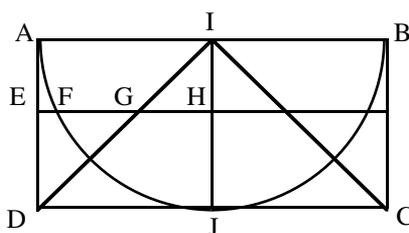


avec les indivisibles parallèles IK et JL, égaux.

Pas plus que dans l'exemple précédent, les continus ne suivent les proportions de leurs indivisibles. Cavalieri résout la difficulté en disant que les transits obliques AB et AC n'étant pas les mêmes, le principe n'est pas applicable (il revient d'ailleurs au même de dire que les transits droits HB et HC ne sont pas les mêmes).

Pour voir la manière dont Cavalieri trouve toujours une raison particulière, regardons le paradoxe du bol, plus ancien. Faisons

tourner la figure ci-dessous autour de l'axe IJ. On obtient un cylindre, un cône, un « bol » qui est ce qui reste du cylindre lorsqu'on enlève la demi-sphère engendrée par le demi-cercle AJB. Il n'y a pas besoin de la *méthode des indivisibles* pour voir que le bol a même volume que le cône.



Mais elle fournit une belle démonstration, plus un paradoxe énoncé par Galilée. On coupe les solides par des plans parallèles à la base. Comme $GH^2 = HE^2 - HF^2$, tous les indivisibles du cône (« tous les plans » du cône) sont égaux à tous les indivisibles du bol (le découpage induit sur le bol est une couronne de rayons HE et HF).

A chaque instant les deux solides que sont le cône IGH et la portion de bol au-dessus de la droite EH sont égaux. Galilée trouve paradoxal que tout à la fin, le cône (et sa base) se réduise à un point, tandis que la portion ultime de bol (et sa base) est un cercle. Nous ne sommes pas entrés — au cours de ce stage — dans le détail de ce que dit Galilée, car ce qui nous importe est la manière, assez constante, dont Cavalieri répond aux problèmes soulevés.

Remarquons préalablement que le résultat est juste, le bol et le cône ont même volume, la *méthode* est appliquée avec une seule règle balayant les deux volumes d'un même mou-

vement pour créer des indivisibles égaux⁴. Il n'y a jamais de résultat faux dans ce cas. Une telle application de la *méthode des indivisibles* sera qualifiée de *stricto sensu* dans la suite.

Quant au paradoxe soulevé par Galilée, la parade de Cavalieri est la suivante :

Dans ma conception de toutes les lignes d'une figure plane, ou de tous les plans d'un corps, on ne doit pas, selon mes définitions, comprendre les extrêmes bien qu'ils paraissent de même genre ; les sections communes du plan qui coupe la figure dans un mouvement d'un extrême à l'autre, ou d'une tangente à la tangente opposée, dès lors parce que le principe et le terme du mouvement ne sont pas mouvement, pour cela on ne doit pas compter les tangentes extrêmes parmi toutes les lignes [...] Lettre de Cavalieri à Galilée 16 décembre 1634

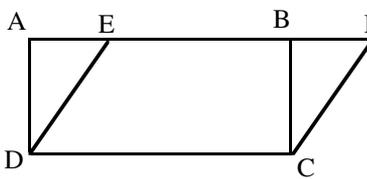
Là, Cavalieri fait appel à une conception des anciens ayant trait au mouvement pour exclure, par analogie, les deux indivisibles extrêmes. mais pourquoi n'a-t-il pas dit *avant*

qu'on ne pouvait, selon ses définitions, comprendre les extrêmes ?

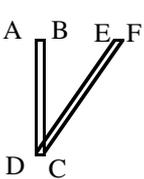
Le problème, c'est qu'il ne dit jamais rien avant, les paradoxes transgressent toujours une loi qui n'a pas été énoncée. Un nouveau paradoxe est toujours susceptible de se produire, imprévisible, engendrant une nouvelle défense fortifiée. En physique, le phlogistique ou l'éther ont pareillement été créés exprès pour sauver les phénomènes, mais sans faire avancer d'un millimètre la compréhension des choses.

Pendant que Cavalieri, qui ne veut pas se contenter de la méthode *stricto sensu*, érige des défenses renouvelées, Torricelli réfléchit sur un exemple particulier, celui du rectangle et du parallélogramme de mêmes base et hauteur. Les continus ne suivent pas les proportions de leurs indivisibles (cf. l'encadré ci-dessous)...

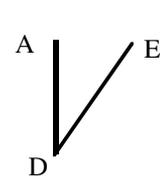
Ainsi, après avoir médité sur le parallélogramme qui rétrécit, Torricelli renverse le principe de Cavalieri, ce ne sont plus les conti-



Le rectangle ABCD et le parallélogramme EFCD ont même aire. Le rectangle est un agrégat d'indivisibles parallèles à AD. Le parallélogramme est un agrégat d'indivisibles parallèles à ED



En rétrécissant CD voici ce que cela donne. Des parallélogrammes très fins d'aire égales, et d'épaisseurs inégales.



Au stade ultime il faut admettre que les indivisibles AD et ED sont d'épaisseur inégale, par souvenir, si l'on peut dire.

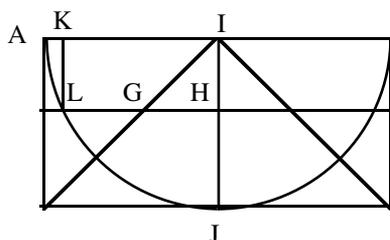
⁴ Même les extrêmes sont égaux, puisque la mesure est l'aire : une ligne n'a pas une aire moins nulle qu'un point.

nus qui suivent les proportions de leurs indivisibles, mais les indivisibles, nantis d'une épaisseur, qui suivent les proportions des continus dans lesquels ils sont découpsés.

Les indivisibles ont une épaisseur « infinitésimale », ils sont homogènes au continu, ils peuvent donc le composer. Finalement la conception est moins abstraite que celle de Cavalieri, on n'a pas besoin pour se la représenter d'imaginer des objets déspatialisés, comme ces « *omnes lineae* » pour éviter la diabolique question de la composition du continu.

Remarquons que dans cette nouvelle méthode des indivisibles, les indivisibles sont divisibles, une parallélogramme très mince peut l'être encore deux fois plus... .

5) Voici un autre paradoxe, subtil. La question a été posée aux stagiaires, de le résoudre. Il s'agit toujours du bol :



Voici le raisonnement captieux : $GH = KL$, donc [tous les KL^2] = [tous les GH^2] (K décrivant AI pendant que H décrit IJ), donc [tous les disques de rayon KL] = [tous les disques de rayon GH], et en définitive, la demi-sphère devrait être égale au cône, ce qui est faux.

Bien sûr les indivisibles « plans » (qui sont ici des disques) sont décrits avec des règles non parallèles et contreviennent ainsi

au premier interdit de Cavalieri, mais il semble bien que cet interdit soit édicté uniquement pour interdire les transits inégaux. Ici les transits AI et IJ sont égaux, alors ?

Temps de réflexion...

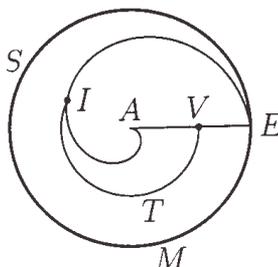
Un stagiaire dit que la variation de H sur IJ n'est pas reliée affinement à celle de K sur AI.

C'est effectivement là que se situe l'explication du paradoxe : quand H partant de I arrive au milieu de IJ, K a à peine décollé de A! Que les transits globaux soient égaux ne garantit pas qu'ils le soient à chaque instant.

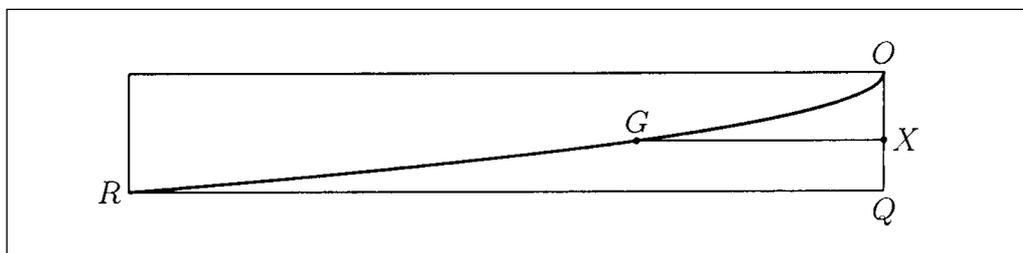
Mises en œuvre sur la spirale de deux méthodes des indivisibles déjà très évoluées

L'aire de première révolution de spirale par Cavalieri

Cavalieri donne au livre VI (son traité en comporte sept) une méthode de quadrature de la spirale vraiment directe et visuelle.



Il pense être le premier à utiliser des indivisibles courbes (en fait ce n'est pas vrai, Torricelli l'avait déjà fait).



Pour chaque point V du rayon AE, le cercle de centre A et de rayon AV est dessiné jusqu'au point I où il rencontre la spirale, puis l'arc ainsi tracé est déplié sur un autre dessin de sorte que :

$$OQ = AE \quad OX = AV \quad \text{Arc VTI} = XG$$

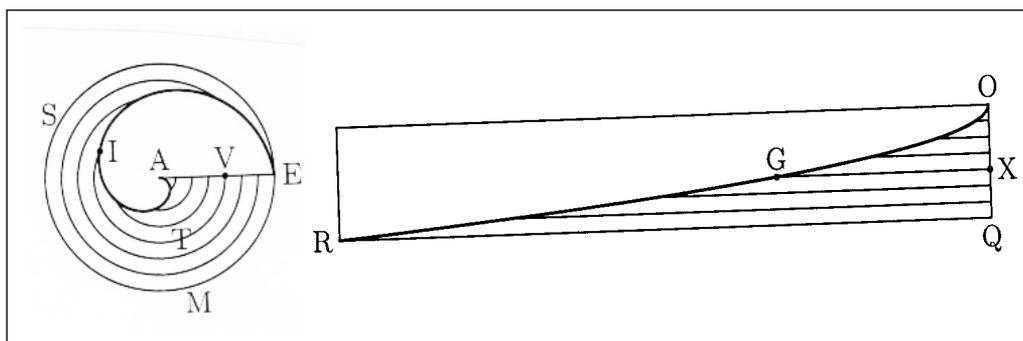
Les points G dessinent une parabole. Au XVII^e siècle on ne peut pas voir ce fait en caractérisant la spirale par $r = \theta$. En revanche, on vit toujours sous l'égide du livre des proportions d'Euclide qui permet d'écrire qu'un rapport de grandeurs de même nature est égal à un autre, et d'agir avec ces rapports de grandeur comme si c'étaient des nombres.

$$\frac{\text{grand cercle complet}}{\text{petit cercle incomplet}} =$$

$$\frac{\text{grand cercle complet}}{\text{petit cercle complet}} \times \frac{\text{petit cercle complet}}{\text{petit cercle incomplet}}$$

Le premier terme du produit est AE/AV, et le deuxième aussi car il est le rapport des « rotations », mais ce dernier est, de par la nature de la spirale, le rapport des rayons des cercles se terminant sur la spirale. Pour la rotation « tour complet », c'est AE, tandis que pour la rotation du petit cercle incomplet, c'est AI = AV. Ainsi l'arc VTI est proportionnel au carré de AV. Une fois dépliés en XG les arcs remplissent l'espace sous la parabole, dont Cavalieri sait (la démonstration est d'Archimède, encore!) qu'il est le tiers du rectangle.

Un stagiaire demande où est représenté dans le rectangle le disque entier EMS. Hésitations, on ne sait pas comment s'y prendre. Puis la lumière point : il faut remplir le disque d'indivisibles-cercles (nous devenons cavalieresques !) et la question devient : où sont les G' tels que XG' représente le cercle entier? XG' doit prolonger XG, qui est le cercle incomplet. Et de plus les longueurs des cercles



varient uniformément avec le transit, donc les G' se déplacent forcément sur la droite OR . Le disque déplié devient le demi-rectangle ; cela simplifie la fin du calcul, le tiers du double du disque cela fait les deux tiers du disque, il reste le tiers du disque pour l'aire de la première révolution de spirale, c'est bien la valeur que trouvait Archimède. C'est audacieux de déplier les arcs de cercle comme cela, mais au fond Cavalieri n'est pas si loin de la méthode *stricto sensu*, puisque les transits sont les mêmes à chaque instant. Cavalieri ne donne cette démonstration qu'au livre VI de son pavé. Elle est simple, naturelle, immédiatement compréhensible, in-oubliable quand on l'a vue une fois et on sent qu'il n'y a guère de distance entre la découverte et la preuve.

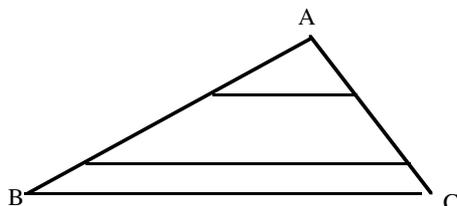
**La longueur de l'arc de spirale
égale à la longueur de l'arc de
parabole par Torricelli**

Les indivisibles hétérogènes de Cavalieri ne permettent pas de comparer des lignes. On compare des volumes en comparant des aires, des aires en comparant des longueurs, mais on comparera des longueurs en comparant quoi ? Si toutes les mesures d'une ligne ne sont pas nulles (son volume, son aire le sont, mais pas sa longueur), un point, lui, est toujours de mesure nulle, et comment comparer des zéros ?

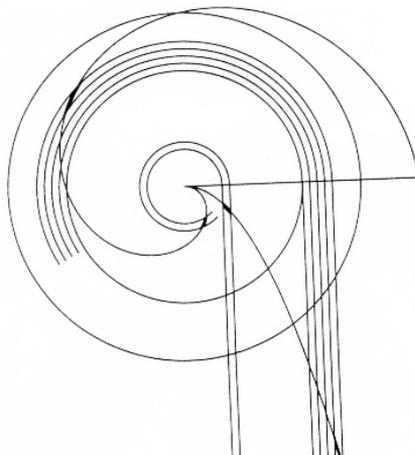
Pour Torricelli, les indivisibles sont de même nature que la grandeur qu'ils composent, donc un indivisible de ligne est un point ayant une certaine taille :

« Si dans le triangle ABC dont le côté AB est plus grand que AC , nous imaginons que sont tirées l'infinité des lignes parallèles à la base BC , il y aura autant de points marqués par

le segment sur la droite AB que sur la droite AC ; donc un point de celle-ci est à un point de celle-là comme toute la ligne à toute la ligne » :

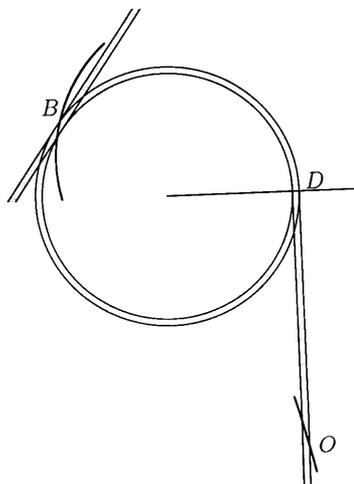


Avec cette nouvelle notion de taille des points, Torricelli peut évaluer la longueur de deux courbes. Il montre l'égalité de la ligne spirale à la ligne parabole. Pour cela, il dessine un réseau de cercles équidistants (infiniment proches) pour emprisonner la spirale, et le réseau de lignes verticales de même équidistance, pour emprisonner la spirale, comme sur le dessin.



Les propriétés de la tangente à la spirale et à la parabole sont connues et disent que les inclinaisons des deux courbes sur leurs tangentes (en des points homologues) sont les

mêmes, par conséquent les points ont même taille deux à deux et les lignes sont égales.



Nous ne faisons pas le détail concernant les tangentes au stage (Torricelli obtient la tangente à la spirale en un point en composant deux mouvements prolongeant dans le temps les mouvements qui créent instantanément la spirale, par une pensée que nous dirions vectorielle aujourd'hui).

Torricelli a eu la conviction que les anciens avaient une méthode de découverte qu'ils cachaient :

Que cette géométrie des indivisibles soit une découverte entièrement nouvelle, je n'oserais l'affirmer. Je croirais plus volontiers que les anciens géomètres se sont servis de cette méthode dans la découverte des théorèmes les plus difficiles, bien qu'ils aient préféré une autre voie dans les démonstrations, soit pour cacher les secrets de l'art, soit pour ôter à des détracteurs jaloux l'occasion de les contredire. Quoiqu'il en soit, il est certain que cette géométrie est un merveilleux abrégé pour la

découverte, et qu'elle permet d'établir d'innombrables théorèmes presque impénétrables par des démonstrations brèves, directes et positives, ce qui ne peut se faire par la théorie des anciens. C'est là en effet la voie vraiment Royale dans les broussailles mathématiques, et le premier qui l'ouvrit et l'aplanit pour le profit de tous, c'est l'artisan des découvertes admirables : Cavalieri.

Le XXe siècle lui a donné raison, puisqu'en 1906 a été retrouvé le livre sur la méthode mécanique, dans lequel Archimède reconnaît la valeur heuristique de la loi du levier pour les mesures d'aires.

Présentation d'une courbe du XVIIe siècle, la roulette ou cycloïde.

La roulette et une ligne si commune, qu'après la droite et la circulaire, il n'y en a point de si fréquente ; et elle se décrit si souvent aux yeux de tout le monde qu'il y a lieu de s'étonner qu'elle n'ait point été considérée par les anciens, dans lesquels on n'en trouve rien : car elle n'est autre chose que le chemin que fait en l'air le clou d'une roue, quand elle roule de son mouvement ordinaire, depuis que ce clou commence à s'élever de terre, jusqu'à ce que le mouvement continu de la roue l'ait rapporté à terre, après un tour entier achevé : supposant que la roue soit un cercle parfait, le clou un point dans sa circonférence, et la terre parfaitement plane.

Le feu P. Mersenne, minime, fut le premier qui la remarqua environ l'an 1615, en considérant le roulement des roues, ce fut pourquoi il l'appela la Roulette. Il voulut ensuite en reconnaître la nature et les propriétés mais il n'y put pénétrer.

Blaise Pascal Histoire de la roulette 1658

Les mathématiciens se sont demandés si cette courbe n'était pas par hasard une courbe déjà connue, une ellipse, par exemple. On raconte que Galilée l'aurait pesée, peut-être est-ce là une des tentatives dont il parle :

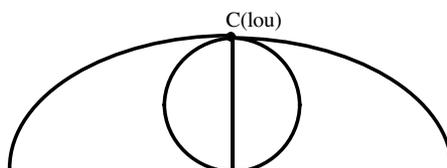
« Cette ligne arquée, il y a plus de cinquante ans qu'il me vient à l'idée de la décrire, et je l'admire pour sa courbure très gracieuse, pour l'adapter aux arches d'un pont. Je fis sur elle et sur l'espace qui est compris entre elle et ses cordes, différentes tentatives pour démontrer quelque propriété, et au début, il me parût que cet espace pût être triple du cercle qui la décrit; mais il n'en fut pas ainsi, bien que la différence ne soit pas grande.

Tiré d'une lettre de Galilée à Bonaventura Cavalieri. 24 février 1640

Si la roulette était une ellipse, son espace devrait être π (et non pas trois) fois celle de son cercle. Est-ce que Galilée espérait trouver π , plus conforme à la nature de la roulette que trois ?

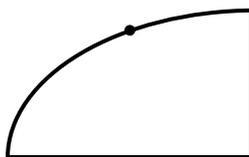
En tous cas Roberval a démontré que c'était 3, avant 1637. Visiblement Galilée ne le savait pas, qui en était encore à peser la roulette plusieurs années après. Et Pascal a lancé un défi aux mathématiciens de toute l'Europe, en 1658, pour résoudre dix-huit problèmes sur la roulette. Personne n'ayant bien répondu, à ses yeux, Pascal publia un *Traité de la roulette*, composé de sept petits traités fournissant au lecteur toutes les méthodes pour résoudre les dix-huit problèmes, sans jamais effectuer un seul calcul, juste en disant comment il faudrait faire. Ce *Traité*, d'une beauté architecturale, a marqué la fin de la méthode des indivisibles, qui est d'ailleurs à ce stade complètement méconnaissable.

Si vous essayez de dessiner une cycloïde (roulette), vous allez trouver quelque chose comme cette arche :

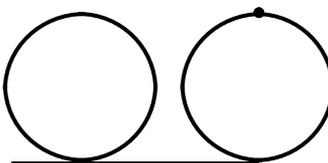


la base étant égale à la circonférence de la roue, car ceci exprime le roulement sans glissement (le mouvement ordinaire dont parle Pascal).

Quelques questions pour nous familiariser géométriquement avec cette courbe :

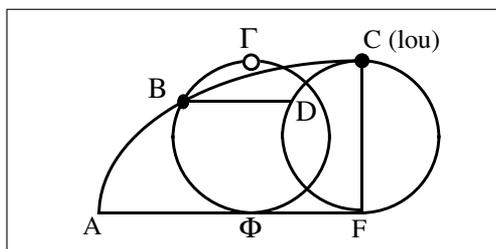


— Étant donné un point de la roulette, où est la roue ? (donner son point de contact avec la base)



— Étant donné la position de la roue, où est le clou ?

Les réponses sont contenues dans la figure de la page suivante, où sont figurées en noir deux positions du clou : C (à la verticale) et B, correspondant aux points de contact F et Φ .



Quadrature de la roulette par Roberval

Roberval a été le premier à quarrer la cycloïde, Descartes a accueilli froidement la découverte, en disant qu'il n'y avait pas à faire tant de bruit à ce sujet. Il n'empêche que l'on cherchait la solution depuis longtemps et que personne ne l'avait trouvée. Descartes a aussitôt trouvé une autre méthode pour la quadrature, ce à quoi Roberval a rétorqué que quand on connaissait le résultat, c'était plus facile. Histoire de montrer sa supériorité absolue, Descartes a alors fourni une très belle démonstration de la position de la tangente, que Roberval cherchait depuis longtemps...

* De par la nature de la roulette (la roue ne patine ni ne glisse), le clou tourne comme le point F avance

$$\text{Arc } \Gamma B = F\Phi$$

* Comme le deuxième cercle est translaté du premier

$$\Gamma C = BD = F\Phi \quad \text{et} \quad \text{Arc } CD = \text{Arc } \Gamma B$$

Voici donc les relations géométriques fondamentales de la roulette

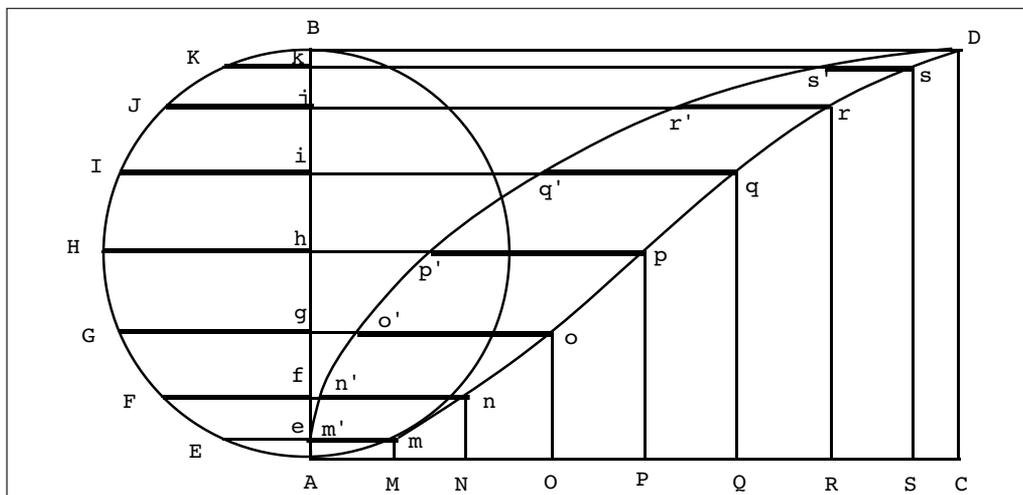
$$\text{Arc } CD = BD$$

BDFΦ est un *parallélogramme*

CDBΓ est un *losange curviligne*

La première relation est mise à profit par Pascal (voir ci-dessous).

Montucla dans son *Histoire des mathématiques*, consacre vingt pages à la cycloïde qu'il qualifie d'« Hélène des géomètres », vu toutes les querelles de priorité, d'honneur, de rivalités, qu'elle a déclenchées. Repor-tions-nous maintenant à la figure ci-dessous, pour la quadrature de Roberval. Le clou est en A au départ, la roue roule sans glisser vers la droite. AC est donc égal à la demi-circonférence.



La circonférence est divisée en un nombre indéfini de parties égales qui sont reproduites sur la base AC ($AM = \text{arc } AE$, $AN = \text{arc } AF$, etc.), représentant le roulement sans glissement de la roue. Roberval fait alors apparaître une autre courbe, $Amnop \dots sD$, « compagne de la roulette », qui partage le rectangle en deux moitiés symétriques.

Quand la roue est tangente en O (en P, en Q, etc.) à AC, le point dessiné sur la cycloïde est o' (p' , q' , etc.). Le cercle s'est translaté de Go' , donc aussi de go . Le segment Gg est donc égal au segment $o'o$. Il en est de même pour tous les autres segments analogues Hh et $p'p'$, etc.

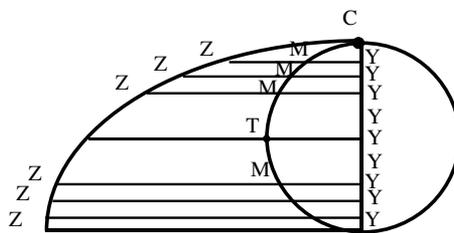
La méthode des indivisibles *stricto sensu* dit que l'espace entre la cycloïde et sa compagne est égal à l'espace du demi-cercle, on rajoute la moitié de l'espace du rectangle ABDC et on trouve trois fois l'espace de la demi-roue pour la demi-roulette. C'est rare que la méthode *stricto sensu* démontre un résultat nouveau, et ici, elle le fait.

En réalité, ce n'est pas cette méthode des indivisibles là que Roberval applique, mais la méthode homogène, car il parle des petits trapèzes comme $o'opp'$, etc.

Quadrature de la roulette par Pascal.
Aperçu du *Traité de la roulette*

Beaucoup plus tard, en 1658, Pascal donne une méthode qui conduit à écrire la quadrature comme ceci : l'axe de la demi-roulette est découpé en « un nombre indéfini ⁵ de divisions égales » aux points Y. $\Sigma ZY \times YY$ est

l'aire cherchée ⁶. Mais, de par la nature de la roulette



$$ZY = \text{arc } CM + MY$$

Le calcul se ramène alors à celui des deux sommes $\Sigma \text{arc } CM \times YY$ et $\Sigma MY \times YY$, qui sont des sommes d'éléments du cercle-roue. La deuxième somme est l'aire de la demi-roue. Pour calculer la première, remarquons que pour deux points M symétriques par rapport à T, milieu de l'arc CA, la somme des deux arcs CM est $2 \times \text{arc } CT = \text{arc } CA$. A cause du regroupement deux par deux, Y ne décrit plus que le rayon, donc cette somme est $R \times \text{arc } CA =$ l'aire de la roue. L'aire de la demi-roulette est donc trois fois celle de la demi-roue. Aucune quadrature de la roulette n'est plus rapide. Bien sûr, il y a eu une mise à profit d'une situation particulière : la symétrie des arcs par rapport à l'arc central CT, mais nous verrons plus bas que les méthodes pascaliennes auraient pu s'en passer.

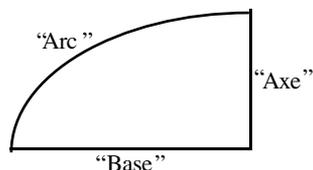
L'idée de considérer des sommes d'arcs multipliés par des petites portions découpées sur l'axe n'est pas chez Pascal une idée isolée. Le *Traité de la roulette* est un véritable traité de calcul intégral, qui expose des méthodes très générales. Comme ces méthodes à la fois constituent le dernier stade de la Méthode des indivisibles, et une rupture avec

5 Le mot « indéfini » peut signifier que Pascal réserve le mot « infini » à Dieu. mais aussi que le nombre de divisions égales n'est jamais fixé, qu'il est toujours au delà, dans ce cas « indéfini » évoquerait un infini potentiel. Nous avouons n'être pas capable de choisir, d'autant que les deux significations

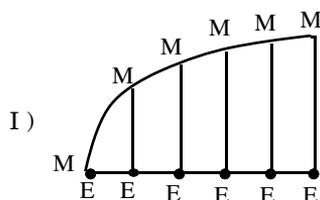
sont en résonance, qu'est Dieu sinon un infini achevé ?

6 Pascal n'emploie pas cette notation pour la somme, il dit la chose avec des mots « la somme des ordonnées à l'axe, multipliées chacune par les petites portions de l'axe ».

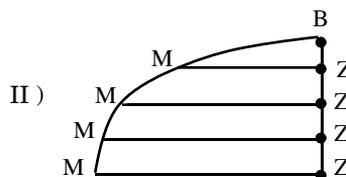
les précédentes *méthodes des indivisibles*, de par leur aspect général justement, nous allons en dire quelques mots :



Au départ il y a la *triligne quelconque*, sorte de triangle rectangle à hypoténuse courbe, "fonctionnel" dans le sens qu'il n'est jamais coupé deux fois par une parallèle à son axe. Les trois côtés sont destinés à être tour à tour « divisés en un nombre indéfini de divisions égales », pour fabriquer un grand nombre de sommes.

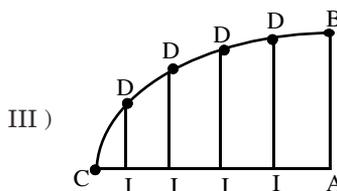


Les ordonnées à la base, ME « naissent de divisions égales sur la base » (les EE). Elles servent à fabriquer la somme $\Sigma ME \times EE$, la somme des ordonnées à la base, en langage abrégé pascalien (les abréviations de Pascal consistent à sous-entendre les petites portions). Cette somme représente l'aire du triligne.



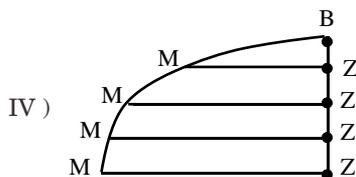
Les ordonnées à l'axe, MZ "naissent de divisions égales sur l'axe" (les ZZ). Elles servent

à fabriquer la somme $\Sigma MZ \times ZZ$, la "somme des ordonnées à l'axe", en langage abrégé pascalien. C'est le mot *ordonnée à l'axe* qui indique que les petites portions sous-entendues sont sur l'axe.



Les sinus sur la base, DI "naissent de divisions égales sur l'arc" (les DD). "la somme des sinus" est un abrégé du discours pour dire "la somme des sinus DI multipliés chacun par DD" ($\Sigma DI \times DD$).

Sauf si le triligne est un quart de cercle, les sinus pascalien ne sont pas nos actuels sinus.



Les arcs BM "naissent de divisions égales sur l'axe" (les ZZ). "La somme des arcs BM" est un abrégé du discours pour dire "La somme des arcs BM multipliés chacun par ZZ".

Parler d'une ordonnée ou d'un sinus isolé n'a pas de sens, car il faut regarder ceux d'à côté pour voir où sont les divisions égales qui leur donnent naissance. Le langage est très précis, il y a toujours des petites portions sous-entendues, et pour savoir lesquelles il faut se reporter à la définition.

Pascal remarque (voir les deux premières sommes ci-dessus) que :

$$\Sigma ME \times EE = \Sigma MZ \times ZZ \quad (1)$$

la somme des ordonnées à la base est égale à la somme des ordonnées à l'axe « car l'une et l'autre est égale à l'espace du triligne ». Ce qui nous importe dans cette égalité très simple, c'est que, en écrivant cela, Pascal a changé la place des éléments différentiels : les EE, petites portions de la base se sont changées en les ZZ, petites portions de l'axe.

Il démontre ensuite, et c'est nettement plus compliqué, que :

$$\Sigma ME^2 \times EE = 2 \Sigma AZ \times MZ \times ZZ \quad (2)$$

« la somme des carrés des ordonnées à la base est égale à la somme des ordonnées à l'axe, multipliées chacune par sa distance à la base ». Cette fois encore, les éléments différentiels (les petites portions) ont déménagé de l'axe sur la base.

Si, pour nous, cette formule n'est au fond pas si mystérieuse, pour Pascal c'est une aventure géométrique. Il est obligé de construire au dessus du triligne un solide qu'il découpe de deux manières différentes en volumes évanouissants (des indivisibles torricelliens), pour finalement montrer que l'égalité ne dit rien d'autre que ceci : le volume est toujours le même, indépendamment des deux manières de le calculer.

Au fond, en plus compliqué, c'est la même chose que d'écrire :

$$\Sigma ME \times EE = \Sigma MZ \times ZZ,$$

l'espace du triligne est le même qu'on le cal-

cule par indivisibles horizontaux ou par indivisibles verticaux.

Venons en à ces sommes d'arcs que Pascal a utilisées pour calculer la surface du triligne-roulette. Il a montré la formule générale

$$\Sigma BM \times ZZ = \Sigma DI \times DD \quad (3)$$

encore un déménagement des petites portions, de l'axe à l'arc, cette fois. Pour montrer cela, Pascal est obligé de fabriquer une figure qui rectifie les arcs CM pour montrer cette formule. Celle-ci, pour un lecteur moderne aurait beaucoup d'affinités avec l'égalité (1), puisque le lecteur moderne pense "nombre" là où Pascal pense "géométrie" et remplace instantanément s (l'arc) par x (l'abscisse), les nombres se moquant pas mal de savoir si la ligne à mesurer est courbée ou pas.

Avec cette *méthode des indivisibles* systématisée en théorèmes Pascal est capable de faire ce que ne pouvaient pas faire ses prédécesseurs : quarrer la partie de la roulette qui est au dessus de T (plus bas, quand on déborde du quart de cercle, on n'a plus un triligne). Il lui suffit pour cela de remplacer la somme des arcs par une somme de sinus $\Sigma DI \times DD$, pour le quart de cercle, ce qu'il sait très bien faire, c'est même la clé de tout son traité (on trouve R^2).

Sans qu'il soit possible de rentrer ici dans les détails, signalons juste que les méthodes de Pascal permettent de calculer l'aire de n'importe quelle portion de la roulette, en jonglant avec la linéarité des sommes diverses.

De plus l'aire de la roulette n'est jamais qu'un des dix-huit problèmes dont le *Traité de la roulette* donne les clés générales de résolution.

Pascal qualifie de *méthode des indivisibles* la méthode à l'œuvre dans son traité, dont il est évident qu'elle n'est pas celle de Cavalieri. Est-elle celle de Torricelli et Roberval ? Nous ne le pensons pas, bien que leurs "indivisibles", à tous trois, soient des trapèzes rectangles évanouissants. En effet, il faut se poser la question : quel est l'objet mathématique, c'est-à-dire l'instrument du calcul, pour chacun ? Pour Cavalieri, il n'y a même pas de trapèze, il n'y a que sa longueur. Pour les méthodes à indivisibles homogènes de Torricelli ou Roberval, c'est l'aire du trapèze évanouissant qui compte. Remarquons que le côté oblique du trapèze ne compte absolument pas dans leur calcul, un rectangle ferait aussi bien l'affaire. Chez Pascal une lecture attentive révèle que les véritables objets du calcul sont les deux côtés évanouissants du trapèze, le côté droit — qui intervient dans les calculs d'aires —, et le côté oblique — pour calculer ce que l'on repèrera après lui comme des « intégrales curvilignes » —.

Ce sont ces *petites portions*, comme les appelle Pascal, qui rentrent dans un système d'échange très élaboré (il y a quinze propositions générales de tels échanges, dans le *traité des trilignes*), et les petites portions les plus importantes sont les obliques, car Pascal réduit les problèmes de roulette en problèmes de cercle (la roue), et en général métamorphose les problèmes de cercle — non déjà résolus par les anciens — en problèmes curvilignes (l'exemple de la quadrature de la portion de roulette au dessus de T est paradigmatique).

Ce chant du cygne de la méthode des indivisibles est, comme l'a dit Emile Picard, le premier traité de calcul intégral. Son architecture est impressionnante. Sans les profondes réflexions de Pascal sur la nature de

la définition, sans la maîtrise d'une langue littéraire rare (unique ?) chez un mathématicien, il n'aurait pas pu voir le jour. Il ne ressemble pas à ce qui le précède, ni à ce qui va très bientôt le suivre, le Nouveau Calcul de Newton et Leibniz, qui dégage un algorithme, et qui se libère de la géométrie.

Conclusion

Une certaine dose de rupture avec la rigueur que l'on a coutume d'attribuer aux mathématiques se manifeste dans la méthode des indivisibles.

Cependant, il faut préciser que cette méthode n'a jamais rien démontré de faux (les paradoxes étaient immédiatement repérés comme tels), qu'elle privilégie la démarche par rapport au résultat, la construction par rapport à l'aboutissement et qu'elle est par là proche du fonctionnement de l'esprit humain.

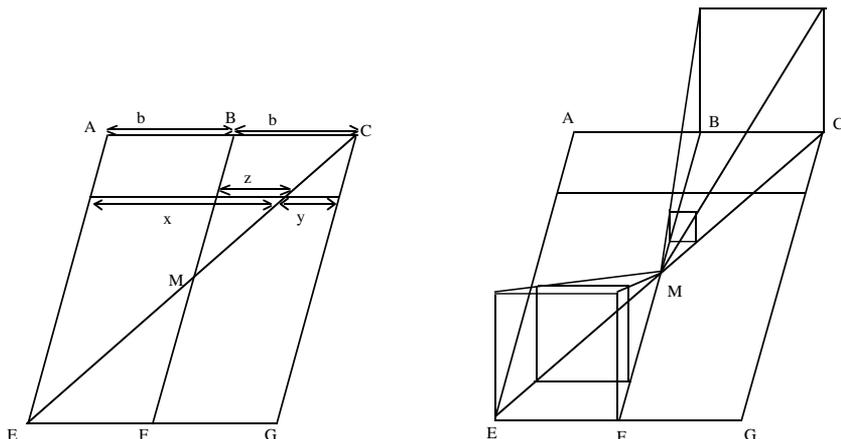
Plus que la rigueur elle-même, c'est la recherche de la rigueur, les discussions auxquelles elle donne lieu qui font la vraie compréhension. Comme dit Pascal — dans un contexte différent, certes — le peuple a les opinions très saines de préférer la chasse à la prise. Nous terminons le stage sur une parole épistolaire de Wallis, artisan de la méthode des indivisibles lui aussi, très honnête, et souvent malmené par ses contemporains :

J'aurais certes plutôt attendu des remerciements qu'une accusation, pour avoir indiqué ouvertement et loyalement, non seulement où j'étais arrivé, mais encore quelle route j'avais suivie : pour ne pas avoir été rompre le pont sur lequel j'avais passé le fleuve ; d'autres peuvent le faire, mais on s'en plaint assez.

ANNEXE

Calcul du volume de la pyramide à la manière de Cavalieri avec « tous les plans » de différents solides

La pyramide est construite à partir du parallélogramme ci-dessous à gauche. Sur le côté AC est élevé un carré dont le plan est perpendiculaire à celui du parallélogramme. On a ainsi une pyramide de base ce carré et de sommet E, dont le volume sera noté [EAC] (la première lettre est le sommet, les deux autres désignent le côté du carré). Par exemple, sur le dessin de droite, on a représenté [MBC] et [MEF]. De manière analogue, on notera [ACGE] le volume du parallélépipède de base le même carré de côté AC et dont l'autre limite est le carré de côté EG.



Il s'agit de voir que la méthode des indivisibles prouve bien que [EAC] est le tiers de [ACGE]. Des relations évidentes $x = b + z$, $y = b - z$, on tire $x^2 + y^2 = 2b^2 + 2z^2$. Cette relation a lieu entre des indivisibles de divers volumes — d'une dimension de moins, comme il se doit —, en effet chaque pyramide ou parallélogramme est coupé par un plan variable parallèle à sa base (une « règle ») et la section est bien un indivisible carré. Les x^2 sont les indivisibles de la pyramide [EAC], les y^2 ceux de [CEG], les b^2 ceux du parallélépipède [ABFE]... (en confondant dans la notation les objets géométriques et leur mesure).

Comme « Les continus suivent les proportions de leurs indivisibles », la relation entre les indivisibles « carrés » $x^2 + y^2 = 2b^2 + 2z^2$, se traduit sur les volumes en

$$[EAC] + [CEG] = 2 [ABFE] + 2([MBC] + [MEF])$$

soit, en tenant compte des égalités géométriques évidentes

$$[EAC] = [ABFE] + 2 [MBC]$$

Mais $[ABFE] = [ACEG] / 4$ (les carrés indivisibles de [ABFE] sont quatre fois plus petits), tandis que $[MBC] = [ACE] / 8$ (toutes les dimensions de [ACE] sont divisées par deux).

Donc $[ACE] = [ACEG]/4 + [ACE]/8$, et finalement : $[EAC] = [ACEG] / 3$.

On trouve bien que la pyramide a même mesure que le tiers du parallélépipède. Le résultat n'est pas nouveau, mais il corrobore la méthode, et la traduction d'une égalité algébrique en termes d'indivisibles de volumes n'est pas sans beauté.

**Sources du stage, de cette narration, de pas mal de ses dessins
et même de ses citations :**

- BERNARD BETTINELLI *Le trésor d'Archimède* IREM de Besançon 1988.
- JEAN PIERRE CLÉRO et EVELYNE BARBIN *La naissance du calcul infinitésimal au XVIIe Siècle* Centre de Documentation des Sciences Humaines Paris 1980.
- EVELYNE BARBIN *Heuristique et démonstration en mathématiques : la méthode des indivisibles au XVIIe siècle. Fragments d'histoire des mathématiques* Brochure APMEP n°65 1987.
- FRANÇOIS DE GANDT *Naissance et métamorphose d'une théorie mathématique : la géométrie des indivisibles en Italie. Fragments d'histoire des mathématiques* Brochure APMEP n°65 1987.
- ETTORE BORTOLOTTI *L'œuvre géométrique d'Evangelista Torricelli . Cahiers du Séminaire d'Epistémologie et d'Histoire des Sciences, n°17* 1983 Université de Nice.
- François DE GANDT *Les indivisibles de Torricelli. Cahiers du Séminaire d'Epistémologie et d'Histoire des Sciences, n°17* 1983 Université de Nice.
- CLAUDE MERKER *Le chant du cygne des indivisibles. Le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal.* PUFC (Presses Universitaires Franc-Comtoises) 2001. CiD Paris.
- AGNES FOUGEROUX, AURÉLIE GIRARD, STÉPHANIE LAUBIER *La méthode des indivisibles au XVIIe siècle* Mémoire de licence Besançon 1998.

Des articles de Repères-Irem en ligne sur le Portail des Irem.

Sur le portail des Irem (<http://www.univ-irem.fr/>), le site de "Repères-Irem" offre un nouveau service : un des articles de chaque numéro de la revue est consultable (et téléchargeable) en ligne. Dans la rubrique "consulter", les numéros concernés sont en rouge (le service se met en place). En cliquant sur ces numéros, on accède au sommaire. L'article en ligne est accompagné de la mention (en rouge) "consulter l'article". Un simple clic et le texte complet de l'article s'affiche.

Pour mémoire :

- en cliquant sur un article d'un sommaire, on accède à sa fiche Publimath (résumé et mots-clés, entre autres).
- un bulletin d'abonnement (à imprimer) est en ligne dans la rubrique "s'abonner".
- la rubrique "nous écrire" donne une adresse électronique qui facilite le contact avec l'équipe de rédaction.