DES TACHES NOUVELLES POUR L'APPRENTISSAGE DE LA DÉMONSTRATION AU COLLEGE

Yves GIRMENS, Mirène LARQUIER, Sylvie PELLEQUER
Groupe Didactique, Irem de Montpellier(*)

Résumé : *Dans un premier temps, en partant du constat des difficultés des élèves dans l'apprentissage de la démonstration et en prenant appui sur les travaux de Raymond Duval, nous avons étudié des écrits de démonstration produits par des élèves de collège pour analyser leur validité. Dans un second temps, nous avons tenté d'identifier les enjeux de l'apprentissage du raisonnement déductif et d'élaborer des propositions d'enseignement adaptées à ces enjeux.*

I. Introduction

Nous considérons que la démonstration est un objet mathématique dont la forme finale s'exprime dans le registre de la langue naturelle [9] avec des lois spécifiques de conversion et de traitement, qui la démarquent de l'argumentation [8]. Nous nous sommes intéressés à des écrits de démonstration produits par des élèves pour analyser leur validité, élaborer des critères permettant de décider de cette validité et par-là même, en déduire des travaux appropriés pour l'apprentissage du raisonnement déductif au collège [4].

Ainsi, selon nous, analyser la validité d'un écrit d'un élève, en différenciant l'analyse du raisonnement déductif en lui-même, de sa complétude et enfin, de la qualité linguistique de l'écrit, permet de mieux se positionner sur les exigences à définir et à construire dans l'enseignement de la démonstration.

Notre projet serait d'amener l'élève à une connaissance et à une compréhension des critères d'une démonstration valide afin qu'il prenne en charge et qu'il contrôle le raisonnement du point de vue de la rigueur de l'écrit. Cela renvoie à la question suivante : « quelles exigences doit avoir le professeur concernant la démonstration ? ». Ces exigences sont alors traduites en critères et nous pensons que les élèves doivent les connaître et les utiliser comme des outils pour décider par eux-mêmes si une démonstration est ou non valide.

Cet article est paru initialement dans le Volume N° 8 de la Revue Annales de Didactique et de Sciences Cognitives.

II. Analyse de productions d'élèves

Un écrit peut être analysé à deux niveaux :

— Une évaluation objective et rigoureuse de sa validité mathématique en relation avec les seules indications données par l'écrit.

— Une analyse plus subjective sur la conception actuelle et personnelle de l'élève qui a produit la démonstration et sur son niveau d'apprentissage de la démonstration. Nous ne pouvons qu'élaborer des hypothèses vraisemblables pour rendre compte de ces conceptions.

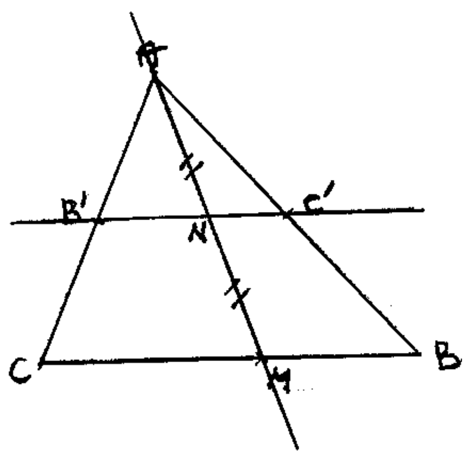
Dans la réalité, pour pouvoir formuler des hypothèses les plus réalistes possibles, il serait nécessaire d'analyser plusieurs productions d'un même élève, à différents moments de l'année, pour vérifier la stabilité de ses conceptions.

Nous avons donné l'exercice suivant en début de troisième. Il n'a pas été noté et il a été réalisé en temps non limité.

« ABC *est un triangle. Les points* B' *et* C' *sont les milieux respectifs des côtés* [AC] *et* [AB]. M *est un point quelconque du côté* [BC]. *La droite* (AM) *coupe la droite* (B'C') *au point* N.
Démontre que N *est le milieu du segment* [AM]. »

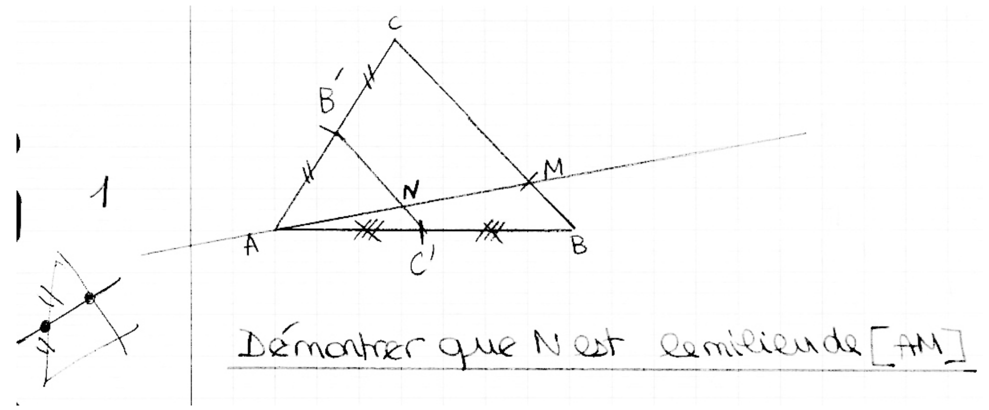
Les réponses des élèves Antoine et Mathilde ont été reproduites en respectant la forme donnée par les élèves concernant l'orthographe, les notations et la mise en page.

Réponse d'Antoine :



Dans le triangle ABC, B' coupe [AC] en son milieu et C' coupe [AB] en son milieu donc les droites (B'C') et (CB) sont parallèles. Puisque M est un point de la droite (CB) et N est un point de la droite (B'C') et A est un sommet du triangle, alors les droites (AN) et (NM) sont égaux, donc N est le milieu de [AM].

Réponse de Mathilde :



D'après le théorème de la droite et des milieux, vu en 4eme, si dans un triangle ABC une droite passant par le milieu de deux côtés est considérée, elle est alors parallèle à la 3eme droite donc ici :

B' est le milieu de AC

C' est le milieu de AB

alors (B'C')//(CB)

D'après la réciproque de la droite et des milieux, deux droites parallèles (NC') et (BM) (on le voit au-dessus) et une de ces droites parallèles passant par le milieu d'un côté alors la première droite passe par le milieu de la 3eme. N est le milieu de (AM).

On peut considérer ces deux écrits selon deux points de vue différents et selon deux tâches distinctes :

1) Evaluer chacun de ces deux écrits de démonstration pour répondre à la question : « Est-ce que cet écrit est celui d'une démonstration valide ou non ? »

2) Analyser chacun de ces deux écrits pour répondre à la question : « Quelles hypothèses pourrait-on faire sur la conception de l'élève concernant la démonstration ? »

Pour l'évaluation de ces deux écrits, il est intéressant d'utiliser un schéma de démonstration pour repérer les éléments de chacun des pas et leur enchaînement [11]. L'évaluation qui va être proposée se veut rigoureuse car elle a pour objectif de mettre en évidence des critères explicites de réalisation pour l'enseignant, comme pour l'élève. Cependant, le problème de l'évidence est un problème important en mathématiques, et tous les éléments d'un pas de démonstration ne devront pas, et ne pourront pas, être toujours explicitement présents.

En conséquence, dans l'hypothèse d'une évaluation, on tiendra compte du niveau de la classe dans laquelle se situe l'enseignement, et du degré de familiarité des élèves avec les théorèmes utilisés. Par exemple, notre choix d'enseignement au collège, est qu'un théorème qui vient d'être appris par les élèves doit être cité de manière décontextualisée.

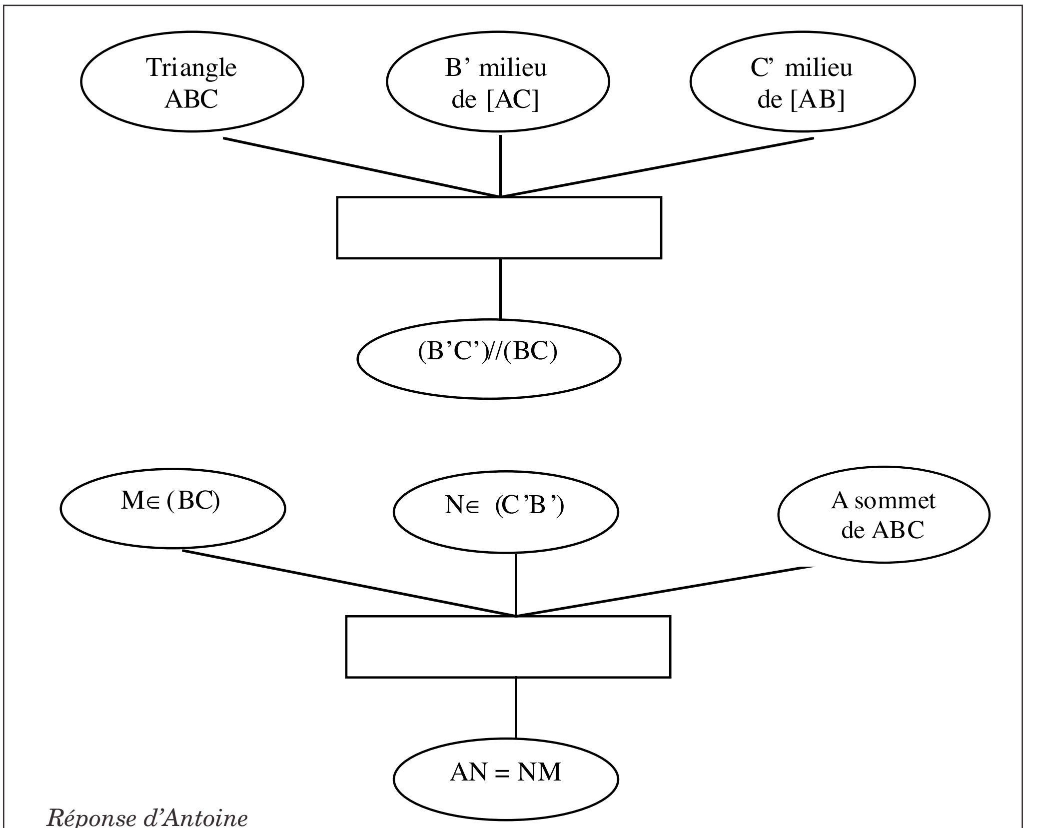
Analyse de la réponse d'Antoine

Il semble intéressant de juxtaposer les deux pas : le premier qui peut apparaître valide mais incomplet (il manque l'énoncé tiers qui est le théorème décontextualisé), le deuxième qui est invalide.

Le premier pas peut laisser penser que l'élève a utilisé un théorème sous sa forme contextualisée, et que la validité du pas est ainsi assurée.

Le deuxième pas semble s'appuyer sur l'évidence du dessin, et comme dans le premier pas, il n'y a pas de théorème décontextualisé. Nous pouvons alors nous demander si le statut des deux écrits n'est pas le même aux yeux de l'élève : à savoir un discours uniquement lié à la vision du dessin et qui serait un commentaire dicté par des indices de perception visuelle. Cet élève pourrait avoir uniquement une appréhension perceptive du dessin [12].

L'écrit objectif ne permet pas de décider



Réponse d'Antoine

que cet élève a compris le fonctionnement d'un pas déductif car, en l'absence du théorème décontextualisé qui est l'énoncé tiers du pas déductif, nous pouvons avoir un doute pour dire si cet élève a construit une conception adéquate de la démonstration et un rapport adéquat à l'objet théorème [16].

Nous pouvons constater que les deux pas de démonstration sont indépendants et que la conclusion du premier pas n'est pas du tout utilisée dans le deuxième. Le schéma révèle bien l'absence de recyclage de la première conclusion en tant que prémisse pour le deuxième pas.

Il est intéressant de remarquer l'aisance de l'élève dans le maniement de la langue naturelle, le texte est clair et l'utilisation des connecteurs est correcte au niveau de la syntaxe en français (deux fois donc, une fois puisque et une fois alors). Ce maniement correct du langage dans le contexte du français n'est pas une condition suffisante pour que l'élève comprenne les règles de la démonstration. Nous remarquons également que cet élève utilise le codage pour indiquer la conclusion, et qu'il ne code aucune donnée. Nous n'avons pas d'informations sur l'enseignement reçu par cet élève sur le codage des dessins, mais nous soulignons l'intérêt que pourrait représenter un usage pertinent du codage. En particulier, nous pensons que le codage des dessins peut devenir un outil au service de la phase heuristique et de l'appréhension discursive des figures [17].

Le maniement du vocabulaire mathématique ainsi que des notations est satisfaisant, sauf dans le cas des « droites égales », alors qu'il s'agit de « longueurs égales ». Mais le critère relatif à la justesse du langage mathématique apparaît ici secondaire par rapport à l'étude de la validité de la démonstration.

Analyse de la réponse de Mathilde

La démonstration produite par cette élève est globalement valide, mais elle est incomplète et certaines formulations sont incorrectes.

Nous pouvons observer (cf. diagramme de la page suivante) des expressions qui marquent le statut des éléments du raisonnement.

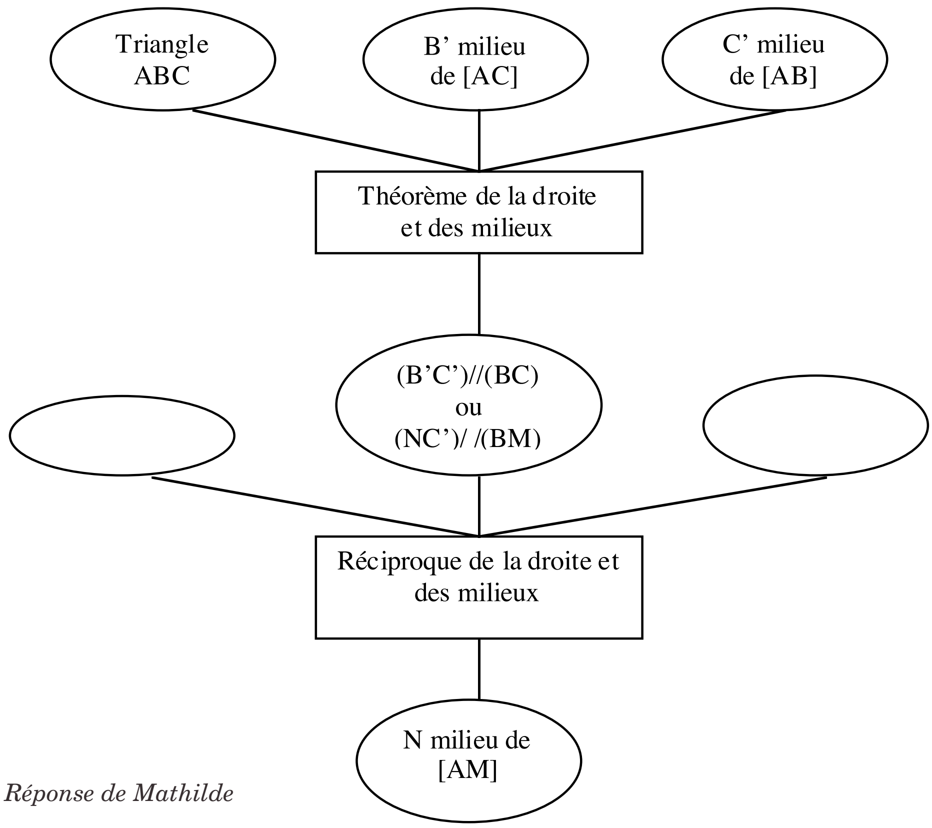
En effet, l'élève situe les théorèmes utilisés comme faisant partie du cours de 4ème, elle précise ainsi la nature officielle de ces énoncés. Elle se réfère aux éléments théoriques des mathématiques et utilise des énoncés institutionnalisés, et c'est bien là une règle du jeu spécifique de la démonstration. Ces énoncés sont d'ailleurs référencés à l'aide de dénominations particulières : « le théorème de la droite *et* des milieux » et « la réciproque de la droite *et* des milieux ». La conjonction « et » n'est pas usuellement employée par les enseignants. Cette élève a vraisemblablement ajouté cette conjonction pour mieux rendre compte de la configuration qui comprend les deux milieux ainsi que la droite qui passe par eux. D'autre part, elle passe du théorème décontextualisé à sa contextualisation en précisant « ici » ce qui met en évidence qu'elle a conscience de ce passage.

Pour le deuxième pas, elle montre qu'elle utilise la conclusion précédente en tant que prémisse par l'expression : « on le voit au-dessus » et là encore, une règle du jeu de la démonstration qui consiste à recycler une conclusion en prémisse pour un pas suivant semble maîtrisée. Dans ce passage, les dénominations des deux droites parallèles changent, ce qui laisse penser que l'élève a une appréhension opératoire du dessin et qu'elle s'autorise à changer de triangle et à ne considérer qu'une partie de la figure. En effet, dans le premier pas, elle utilise les droites (B'C') et (BC) du triangle ABC, qui deviennent les droites (NC') et (BM) du triangle ABM [12].

Le codage est utilisé comme un moyen pour visualiser les données, ce qui peut alors être un outil pertinent pour développer une appréhension discursive des figures.

Nous pouvons remarquer l'usage d'un dessin à main levée et faire des hypothèses sur le rôle joué par ce dessin. Est-ce un moyen pour mémoriser un théorème ? Est-ce la conversion dans le registre graphique du théorème dans le registre du langage naturel ? Est-ce le prélèvement de certaines données du problème qui permettent de déclencher l'évocation d'un théorème mémorisé [17]?

Quelques corrections sont à apporter cependant à cette rédaction : une prémisse du



Réponse de Mathilde

premier pas est insérée dans l'énoncé du théorème (le triangle ABC), et dans le deuxième pas, il manque deux prémisses, à savoir le triangle ABM, le milieu C' de [AB], et l'identification par leurs noms des droites utilisées (au lieu de dire la 1ère, la 2ème, la 3ème ce qui rend la rédaction très confuse).

Ce texte est intéressant car il montre un exemple d'élève qui écrit avec maladresse si l'on s'en tient à l'évaluation de son travail du point de vue du français ; mais du point de vue de la validité de la structure logique du raisonnement, ce texte a des qualités certaines.

Le texte produit par Mathilde est un exemple significatif de rédaction personnelle qui est cependant l'expression d'une démonstration valide.

Pour une démonstration donnée, il faut souligner la diversité des rédactions du point de vue des règles de la langue française. La validité de la démonstration est assurée par la structure du raisonnement qui est organisé en un enchaînement de pas déductifs rigoureux du point de vue de la logique mathématique. L'objectif essentiel à atteindre avec les élèves, est de leur donner les moyens d'élaborer et de reconnaître une démonstration valide, la mise en forme du point de vue de l'expression écrite autorise alors tous les degrés de liberté offerts par les possibilités syntaxiques de la langue naturelle.

Raymond Duval et Marie-Agnès Egret soulignent le rôle joué par les schémas de démonstration, qui permettent l'élaboration de la démonstration dans le registre graphique et dont la structure est conforme à la logique mathématique, avant la tâche d'écriture dans le registre du langage naturel dont la structure est conforme aux règles de syntaxe du français [10].

III. Première synthèse

Les deux exemples précédents nous amènent à nous poser des questions pour l'enseignement de la démonstration.

— Comment permettre à l'élève de construire un rapport adéquat au dessin ?
— Comment construire la différenciation dessin-figure ?
— Quelles règles mettre en place pour le codage des dessins ?
— Comment permettre à l'élève de construire un apprentissage du théorème en tant qu'objet et en tant qu'outil [6] ?
— Quelles tâches proposer aux élèves pour construire les règles du jeu de la démonstration ?
— Quelles exigences l'enseignant doit-il définir pour lever ses propres doutes quand il veut évaluer la validité d'une démonstration ?
— Quels sont les éléments d'une démonstration qui doivent être nécessairement explicités dans l'écrit pour offrir la garantie que la démonstration est valide au plan mathématique du côté de l'élève ?

Remarque à propos des deux questions précédentes : la réponse à la première question semble dépendre de la personnalité de l'enseignant mais en fait, les réponses à ces deux questions placent le problème du côté du savoir, ce qui est une position beaucoup plus juste pour permettre la construction d'un rapport adéquat de l'élève aux mathématiques.

IV. Nos positions sur l'apprentissage de la démonstration

Le dessin — la figure

L'enseignement doit permettre à l'élève de modifier son rapport au dessin, et de construire le concept de figure, comme cela est exprimé dans les documents d'accompagnement du programme de sixième où l'on relève la phrase suivante : « Entre une géométrie d'observation et une géométrie de déduction, il est nécessaire de développer des apprentissages qui initient les élèves à la démonstration ».

Nous proposons dans notre enseignement des tâches qui permettent aux élèves de développer des compétences au sujet des différentes appréhensions des dessins. Nous faisons l'hypothèse que ces compétences éviteraient certains échecs. Par exemple, dans l'exercice cité auparavant, l'étude d'un nombre significatif de productions d'élèves révèle que de nombreux élèves ne se sont pas autorisés à utiliser un autre triangle que le triangle ABC. C'est le seul triangle qui est cité dans l'énoncé, et de plus, c'est le contour extérieur du dessin qui peut être le signe prépondérant dans une appréhension perceptive. Ces élèves suivraient alors un critère implicite de congruence entre l'énoncé et leur réponse [7].

Le codage est un outil dont l'utilisation est souvent laissée à l'initiative des élèves, ce qui nous amène à proposer un enseignement explicite du codage des dessins avec en particulier la règle suivante « le dessin est codé avec toutes les données et elles seules ». A travers cela, nous visons l'objectif de développer chez l'élève une appréhension discursive de la figure.

Le pas déductif

Par ailleurs, dans la phase d'apprentissage de la démonstration, nous proposons les critères suivants pour évaluer la validité d'un écrit de démonstration :

— chaque pas comprend explicitement les trois éléments : prémisses, énoncé tiers et conclusion,

— l'enchaînement des pas est explicité.

Le fait de demander l'explicitation de l'énoncé tiers du pas déductif, nous a amenés à nous poser des questions sur les formes choisies pour institutionnaliser les théorèmes. Conformément au programme, la forme « si … alors » est la forme qui est la plus opérationnelle et qui exprime le mieux les statuts respectifs de données et de conclusion des deux propositions qui constituent le théorème. Par ailleurs, pour aider l'élève à différencier un théorème dans sa forme de loi universelle, de sa contextualisation dans un problème donné, la forme choisie pour l'institutionnalisation sera indépendante de toute dénomination.

Au collège, il est possible d'énoncer tous les théorèmes de cette façon là, exception faite de la réciproque du théorème de Thalès (pour le théorème de Thalès, il est intéressant de prendre le point de vue développé dans le programme de quatrième et qui est celui de la proportionnalité des côtés de deux triangles, le programme parle d'ailleurs de « situation fondamentale de proportionnalité »). De même, nous respecterons les programmes du collège en ne citant que quatre théorèmes par des dénominations, à savoir les théorèmes de Thalès et de Pythagore et leurs réciproques. Le théorème dit « des milieux » n'est pas une dénomination officielle, et nous avons fait le choix de ne pas l'employer. De plus, nous avons constaté que selon les livres, cette dénomination repère des théorèmes différents.

Le sens du théorème

Il y a trois aspects importants.

Le premier consiste à permettre à l'élève de construire la rationalité mathématique de manière à s'approprier les caractères d'universalité et de nécessité du théorème.

Le deuxième consiste à placer l'élève en situation de construction d'un théorème en tant qu'objet selon une démarche scientifique que l'on peut décrire ainsi : expérimentation, conjecture et validation. La validation peut se réaliser soit en faisant une démonstration soit en explicitant clairement l'acceptation définitive de ce théorème. L'aboutissement de cette démarche est la formulation du théorème qui doit être opérationnelle. La phase de formulation du théorème par les élèves est un moment important de leur apprentissage.

Le troisième consiste à proposer des situations aux élèves pour faire comprendre comment le théorème fonctionne en tant qu'outil, et pour le rendre opérationnel dans des problèmes [6].

La validité de la démonstration

En premier lieu, la démonstration est analysée pour décider de sa validité ou de sa non-validité mathématique.

Dans le cas d'une démonstration valide, chaque pas est analysé pour décider s'il est ou non complet, et ensuite s'il est correct ou pas du point de vue des règles du registre de la langue naturelle, et du point de vue des règles du registre du langage mathématique.

Ces critères répondent aux exigences du savoir mathématique, et ils permettent une évaluation par le professeur et un contrôle de la part des élèves. Il faut garder à l'esprit que le niveau d'exigence d'un écrit de démonstration est fonction des connaissances de la communauté scientifique qui doit le valider et par conséquent, il y a une évolution des exigences en fonction du niveau atteint par les élèves dans leur apprentissage de la démonstration. Par exemple, ce n'est pas la même démonstration qui est attendue d'un élève de quatrième et d'un élève de terminale concernant l'utilisation du théorème de Pythagore. En terminale, le théorème ne sera pas cité, seules les prémisses et la conclusion seront attendues. Nous prenons le parti de ne pas laisser dans l'implicite cette évolution des exigences et nous avons décidé de dire clairement aux élèves que nous attendrons une démonstration complète pendant au moins l'année de la découverte du théorème en classe.

Nous pensons qu'il serait d'ailleurs utile que les documents d'accompagnement des programmes évoquent de manière plus explicite ce caractère évolutif de la forme d'un écrit attendu d'une démonstration. En particulier, la présence explicite des trois éléments de la démonstration pour faciliter la différenciation avec l'argumentation qui est un processus de raisonnement binaire et non ternaire, pourrait être préconisée dans les textes officiels [8].

V. Propositions d'activités de classe

Principes

Nous avons essayé de construire des activités de classe en prenant en compte les travaux de R. Duval sur le pas déductif. Ces travaux nous ont permis d'une part d'identifier les moyens de développer un discours de démonstration chez les élèves et d'autre part de comprendre la nécessité de permettre aux élèves de construire un écrit personnel dans lequel les statuts des propositions sont identifiables.

Les élèves ont des difficultés à saisir le sens d'une démonstration et, en particulier, à comprendre comment se servir d'un théorème pour faire une déduction.

Dans la plupart des travaux proposés aux élèves en début d'apprentissage de la démonstration, il est en général demandé aux élèves de démontrer ou de prouver un résultat et cela, avant même qu'ils aient compris ce qu'est une démonstration, ce qu'est un théorème et comment s'en servir [16].

Nous considérons comme une priorité d'apprentissage la compréhension d'un théorème dans son statut opératoire, ce qui nous a amenés à concevoir des travaux visant à faire saisir l'articulation des propositions dans la mise en œuvre d'un pas déductif.

Il nous est apparu nécessaire de centrer le travail des élèves sur la mise en place du pas déductif, qui est l'unité de discours opératoire d'une démonstration, avant de leur demander l'écriture complète d'une démonstration.

Toutefois, nous avons choisi de ne pas morceler les difficultés et de conserver une certaine complexité dans les situations proposées. Les cinq situations qui sont présentées ci-dessous, montrent des types de tâches que nous avons ainsi identifiés comme étant pertinents.

1. Situation du parallélogramme

a) Enoncé proposé à des élèves de quatrième :

ABCD est un parallélogramme ; O est le point d'intersection des diagonales ; K est le milieu de [CD].
1. Faire une figure.
2. Citer au moins 6 triangles de cette figure.
3. Voici un théorème : « Si, dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés alors cette droite est parallèle au troisième côté. »
— Parmi les triangles cités au 2, indiquer un triangle pour lequel ce théorème peut s'utiliser. Expliquer pourquoi tu peux utiliser ce théorème et dire ce qu'il permet d'affirmer.
— Parmi les triangles cités au 2, indiquer un triangle pour lequel tu ne peux pas utiliser ce théorème. Expliquer pourquoi tu ne peux pas utiliser ce théorème dans le triangle que tu as choisi.

b) Commentaires

La deuxième question oblige les élèves à dépasser une appréhension perceptive du dessin qui peut être vu comme étant l'assemblage de quatre triangles (AOB, OBC, OCD, AOD). L'identification de six triangles exige une appréhension opératoire du dessin. C'est une compétence nécessaire au service de la démonstration. Elle peut, et pour nous, elle doit être développée chez les élèves dès la classe de 6ème.

Dans ce travail, contrairement à des exercices classiques où la question posée est : « Démontrer que… », la tâche consiste à étudier si les conditions d'application d'un théorème sont présentes dans une situation géométrique dont les données sont définies par un texte. Cette recherche amène l'élève, d'une part, à s'interroger sur ce qu'il doit considérer comme connu à partir des données, d'autre part, à identifier les prémisses du théorème et enfin, à examiner si ces prémisses correspondent bien à des données présentes dans le texte. Cela lui permet aussi d'identifier le domaine de validité de l'application d'un théorème en repérant des unités de figure présentant des données pour lesquelles le théorème ne s'applique pas.

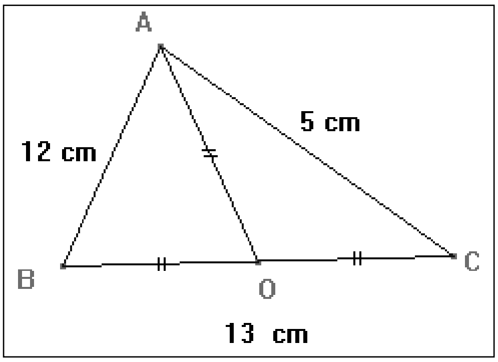
En effet, le fait que si une prémisse manque, le théorème ne peut pas s'appliquer, est une idée à construire pour les élèves et ne doit pas rester implicite, car pour eux, la présence de toutes les prémisses n'est pas une nécessité absolue.

Cette tâche conduit l'élève à mener l'opération de vérification, étape nécessaire pour élaborer un pas déductif. Dans le cas où l'application du théorème est possible, il est demandé à l'élève d'extraire la conclusion qu'elle fournit, c'est à dire de mener l'action de détachement de la conclusion dans le pas déductif. Le travail de l'élève est ainsi centré sur l'appréhension d'un théorème du point de vue des opérations qu'il permet de mener pour construire un pas déductif. En même temps, l'élève est amené, de façon indirecte, à produire, en la décomposant en deux phases, une unité de discours explicitant un pas déductif.

2. Situation triangle rectangle

a) Enoncé à proposer à des élèves de quatrième :

Voici une figure (voir ci-dessus). Voici une liste de théorèmes :



Théorème 1 : *Si un triangle est rectangle alors le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.*
Théorème 2 : *Si, dans un triangle, le carré du côté le plus long est égal à la somme des carrés des deux autres côtés alors ce triangle est rectangle et le plus grand côté est l'hypoténuse.*
Théorème 3 : *Si un triangle est rectangle alors la médiane relative à l'hypoténuse est égale à la moitié de l'hypoténuse.*
Théorème 4 : *Si on joint les extrémités d'un diamètre d'un cercle à un point de ce cercle alors le triangle est rectangle en ce point.*
Théorème 5 : *Si, dans un triangle, la médiane relative à un côté est égale à la moitié de ce côté alors le triangle est rectangle et a pour hypoténuse ce côté.*

En utilisant les informations de la figure, choisis un théorème que tu peux utiliser et justifie ton choix. Dis ce que ce théorème te permet d'obtenir comme nouvelle propriété de la figure.

b) Commentaires

Cette situation, par le fait qu'elle demande de choisir un théorème dans une liste, nécessite d'analyser les formulations de chacun des théorèmes d'une manière opératoire. Les élèves doivent déterminer a priori, en dehors de tout contexte d'application, les conditions d'application de chacun des théorèmes, puis détacher une conclusion quand l'application est possible, en la formulant dans le contexte de la situation.

Ici, les données de la situation géométrique sont à prélever sur une figure codée.

Nous avons fait le choix de :
— Donner des informations surabondantes, ainsi les élèves prennent conscience que ce ne sont pas toutes les données prises en bloc, qui sont intéressantes mais seulement celles qui « déclenchent » le théorème.
— Faire en sorte qu'il soit possible d'utiliser deux des théorèmes cités. Cela permet de rompre avec le contrat habituel qui consiste très souvent à trouver une seule réponse. Par ailleurs, cela donne aux élèves un exemple de figure pour laquelle il existe deux appréhensions discursives différentes.

Là encore, la tâche, lorsque l'application d'un théorème est possible, conduit les élèves à exprimer la conclusion du théorème dans le contexte de la situation et ainsi, les amène à construire un pas déductif en mettant l'accent sur le fait qu'une conclusion constitue une information nouvelle sur la situation géométrique. Les élèves rencontrent ainsi en acte, la différence à faire entre le contenu d'une proposition et son statut dans un pas déductif. Cette différenciation est fondamentale pour comprendre les règles du jeu de la démonstration.

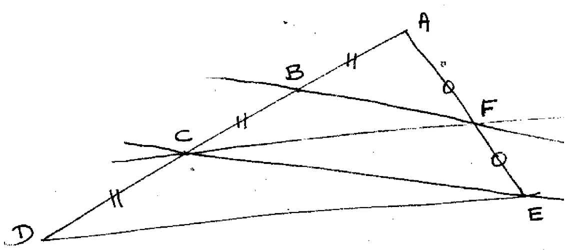
Le processus cognitif en œuvre dans ce type de travail, consiste à prélever dans la figure représentée par le dessin codé, des éléments du registre graphique qui sont des signes permettant l'évocation des conditions d'application d'un théorème.

C'est en référence à ce processus que nous avons parlé de **figure déclenchante** [15].

3. Situation « dessin à main levée »

a) Enoncé donné en classe de quatrième[20]:

Voici un dessin à main levée, il est demandé de ne pas le refaire avec les instruments.



Jules et Camille ne sont pas d'accord :
— Camille pense qu'on peut démontrer que les droites (CF) et (DE) sont parallèles
— Jules pense qu'on peut démontrer que les droites (BF) et (CE) sont parallèles.
Qui a raison ? Prouver votre réponse sous la forme d'un schéma de démonstration puis d'une rédaction.

b) Commentaires

Ce travail vise tout d'abord à tester chez les élèves, la robustesse de la connaissance des conditions d'application d'un théorème (« Si dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés alors cette droite est parallèle au troisième côté. ») dont l'apprentissage est bien avancé, par la présence d'une figure codée très troublante, qui donne à voir des longueurs égales (signifiées par le codage) et des droites que l'on peut estimer parallèles par la vue.

Cela permet aux élèves de saisir que la mise en action de ce théorème exige la présence de deux conditions : « un triangle » et « les milieux de deux côtés ».

Pour trancher le débat mis en scène entre deux élèves fictifs, il est demandé aux élèves de produire une preuve sous la forme d'un schéma qui explicite le pas de déduction complet, en mettant en évidence le statut des trois éléments (données - énoncé tiers - conclusion). Dans ce travail, le schéma est demandé aux élèves pour qu'ils l'utilisent comme un moyen de recherche et de contrôle de leur réflexion.

Enfin, les élèves doivent traduire ce schéma en un texte, bâti sans injonction de forme : cela les amène à construire un discours opératoire, c'est à dire un discours qui, dans une forme personnelle, exprime une déduction.

4. Exercice autour du sens du théorème

a) Enoncé donné en classe de cinquième :

Annette finit son exercice en disant : « Donc le quadrilatère ABCD est un parallélogramme parce que AB = CD et BC = AD.»

Voici deux théorèmes :
Théorème 1 : Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses côtés opposés ont la même longueur.
Théorème 2 : Si un quadrilatère non croisé a ses côtés opposés de même longueur alors c'est un parallélogramme.

Lequel de ces deux théorèmes Annette a-t-elle utilisé ? Explique ton choix.

b) Commentaires

L'exercice vise à faire associer une phrase qui constitue l'application d'un théorème dans un contexte particulier et le théorème correspondant énoncé dans sa forme générale.

Les élèves ont le choix entre deux théorèmes réciproques l'un de l'autre.

Tout d'abord, pour répondre à la question, l'élève doit faire le lien entre l'énoncé contextualisé et le théorème en repérant l'action de détachement de la conclusion dans le pas déductif.

De plus, l'élève se trouve dans une situation où il y a non congruence entre la réponse d'Annette et le théorème 2, ce qui va l'obliger à rechercher l'articulation des propositions du théorème indépendamment de la place qu'elles occupent. Nous cherchons à éviter que les élèves s'appuient sur le contenu des propositions ou sur des indices perceptifs, de façon à mobiliser vraiment leur compréhension du statut des propositions.

L'objectif de cet exercice est donc, pour l'enseignant, de repérer le niveau d'apprentissage dans la construction du sens d'un théorème et la capacité de savoir faire la différence entre un théorème et sa réciproque. Pour l'élève, l'objectif est de s'engager dans ce que R. Duval appelle le discours opératoire [14].

c) Réponses d'élèves

Les réponses d'élèves ont été reproduites intégralement avec leurs mots et leurs erreurs d'orthographe.

E1 « *Oui, c'est le même théorème car sa dit exactement la même chose et comme un parallelograme non croisés et un parallèlograme tous cours donc c'est le même théorème.* »

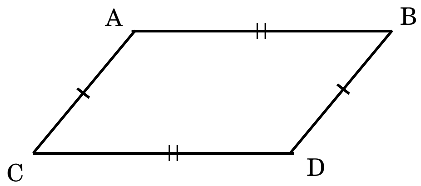
Cette réponse semble liée à la seule prise en compte du contenu des propositions, il n'y a aucune linéarité dans la lecture du théorème, ce qui amène à la confusion entre le théorème et sa réciproque. Il semble ne pas y avoir de compréhension globale des énoncés des théorèmes c'est à dire de l'articulation du sens des propositions qui le constituent, mais une compréhension en fonction des éléments du discours. Nous pouvons repérer le souci de l'élève de comparer précisément tous les éléments présents dans les deux énoncés, ce qui peut expliquer qu'il justifie la différence entre parallélogramme croisé ou non.

E2 : « *Théorème 2 car elle dit donc le quadrilatère est un parallelogramme ça veut dire quelle n'etait pas sur que c'etait un parallelogramme.* »

Il y a reformulation de la phrase d'Annette et différenciation entre le statut de conclusion et celui de conjecture. Le mot « donc » semble, pour cet élève établir que ce qui est dit après est certain mais aussi faciliter la reconnaissance du théorème adéquat.

Cet élève montre qu'il a compris l'aspect opérationnel du théorème, comme étant un outil qui fournit une information qui n'était pas assurée au départ. Il a également compris l'opération de détachement de la partie conclusion.

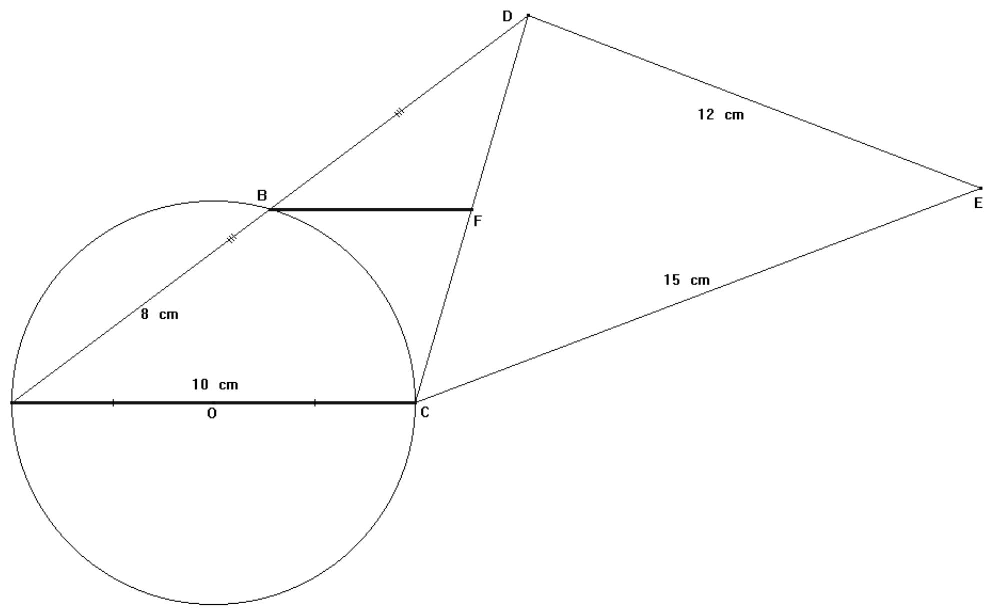
E3 : « *Annette a utiliser le théorème 2 car elle affirme que ABCD est un parallelogramme si elle le savait alors elle aurait dit : donc les côtes opposés d'un parallelogramme sont egaux. L'enoncé de l'exercice devrai être : Démontrer que ABCD est un parallelogramme.* »



L'élève argumente sa réponse en se fondant sur le statut de la proposition « ABCD est un parallélogramme ». Pour écarter le théorème 1, il raisonne par l'absurde : si cette proposition avait eu une valeur de certitude, il indique que la conclusion aurait été que les côtés opposés sont égaux, ce qui correspondrait à la mise en œuvre du premier théorème. Il accomplit ainsi la tâche de vérification pour ce théorème et réalise l'opération de détachement de la conclusion qu'il ne reconnaît pas dans ce que dit Annette. Pour cet élève, une phrase introduite par « donc » a clairement un statut de conclusion. Nous pouvons remarquer l'emploi pertinent des verbes qui marquent le statut de certitude : affirmer, savoir. Cet élève a montré qu'il connaît l'aspect opératoire du théorème en associant la réponse donnée à une question. Ainsi, pour lui, le théorème permet de savoir quelque chose qu'on ne savait pas avant. Il a eu besoin de faire une figure à main levée codée qui est porteuse de l'appréhension discursive. Nous pouvons faire l'hypothèse que ce dessin, a facilité la différenciation entre données et conclusion.

5. Travail de synthèse (voir l'énoncé proposé en troisième [5] page ci-contre)

a) Commentaires. Cette activité a plusieurs objectifs concernant l'apprentissage du raisonnement déductif.



Consignes

Phase 1 *: Travail individuel. Ecris toutes les informations que la figure te donne et dont tu es sûr.*

Phase 2 *: Travail de groupe. A partir des données de cette figure, imagine une question que tu pourrais poser à un autre groupe.*
Ecris à l'aide de quel(s) théorème(s) on peut y répondre. Ecris les informations utiles de la figure pour cette question. Cherche le plus de questions possibles.

Phase 3 *: Travail de groupe*
— Premier temps. Résoudre la question reçue et rédiger le plus soigneusement possible la solution choisie par le groupe. Cette solution sera retournée au groupe qui a posé la question pour correction.
— Deuxième temps. Elaborer les critères d'une bonne rédaction.
— Troisième temps. Construire un barème de 10 points en fonction de ces critères. Corriger la copie qui correspond à la question posée par le groupe.

Phase 4 *: Bilan classe entière.*

Pour le professeur, au début de la classe de troisième, et même en début de seconde, elle permet de repérer où en sont les élèves sur :

— Le sens d'un théorème,
— L'opérationalisation d'un théorème,
— Le pas déductif,
— L'enchaînement de pas déductifs,
— Le statut du dessin codé.

Pour les élèves, elle les amène à :

— Comprendre comment on construit un raisonnement déductif,
— Apprendre à utiliser un dessin codé,
— Apprendre à opérationaliser un théorème,
— Rechercher des critères relatifs à une «bonne» démonstration,
— Acquérir une exigence de rigueur dans le raisonnement et le vocabulaire,
— S'exercer à construire ce que R.Duval appelle le discours opératoire.

Les moyens pour y parvenir sont présents dans les différentes phases et dans le choix du dessin codé.

Le dessin codé : Il respecte les dimensions des différentes longueurs connues de façon à ce qu'il soit une aide pour la recherche des solutions. Il est codé dans le but de fournir une aide pour différencier ce que l'on sait (qui est codé) de ce que l'on voit. De plus, pour que le codage joue vraiment son rôle d'aide à la démonstration, nous avons décidé de convenir d'un codage des droites parallèles (soit elles sont tracées d'une même couleur, soit elles sont tracées en traits gras) de façon à ce que le dessin soit porteur d'un maximum de données certaines. Enfin, le dessin a été choisi suffisamment complexe : ainsi, il permet de mobiliser de nombreux théorèmes de la classe de quatrième et ceux des classes antérieures mais il permet aussi de mesurer les différents niveaux d'appréhension d'une figure des élèves (certains groupes n'ont pas réussi à «voir» autre chose que le cercle et le triangle ABC). Cette richesse du dessin favorise la gestion de l'hétérogénéité des élèves car il peut y avoir des questions très simples pour mettre en confiance des élèves en difficulté (par exemple, quelle est la longueur de OA ?) et des questions nettement plus complexes pour motiver la recherche de bons élèves (par exemple, démontrer que OBFC est un losange).

La phase 1 : On demande l'analyse d'un dessin codé de façon à différencier ce qui est sûr de ce qui relève de la conjecture. Le bilan des données sures est fait avant la deuxième phase.

La phase 2 : La demande de création d'une question conduit à faire émerger un problème à résoudre à partir du dessin codé. Les différentes questions posées lors de cette phase visent à faire rencontrer aux élèves les éléments d'un pas déductif, les amenant à utiliser en acte un ou plusieurs théorèmes déjà rencontrés dans les classes précédentes. L'enjeu de la dernière question est double, le groupe cherche à poser un problème suffisamment complexe et se prépare à répondre à celui de l'autre groupe. Cet enjeu est rendu possible par la richesse du dessin et par la quantité de théorèmes à leur disposition grâce au répertoire des classes antérieures.

La phase 3 : Il est demandé dans un premier temps, l'élaboration d'un écrit de démonstration qui, dans un deuxième temps, est utilisé, par une prise de distance, pour essayer d'élaborer des critères généraux concernant un «bon» écrit de démonstration. Il nous semble que la pertinence de ces critères est favorisée par le fait que les élèves viennent de rédiger une démonstration commune au groupe (ils ont déjà du se distancier de leur écrit personnel) mais aussi par le fait qu'ils ont comme objectif une correction, commune au groupe, de la question qu'ils ont posée à un autre groupe (deuxième distanciation, ils ne sont plus producteurs d'un écrit mais correcteurs d'un écrit). La deuxième partie consiste à mettre à l'épreuve la pertinence de ces critères en corrigeant la démonstration d'un autre groupe.

La phase 4 : C'est un bilan qui permet de mutualiser les différents critères trouvés par les groupes de façon à se mettre d'accord sur des critères communs à la classe, puis de les opérationnaliser en analysant certaines des démonstrations écrites par les groupes.

En conclusion, par l'intermédiaire de ce travail, on centre la tâche d'écriture d'une démonstration non sur la recherche d'une conformité par l'emploi de certains connecteurs ou de certaines formes mais sur la production d'un discours qui se préoccupe du statut des propositions et du sens du théorème. L'appropriation des critères d'une bonne démonstration par les élèves nous semble plus consistante quand elle résulte d'une réflexion qu'ils ont eux-mêmes menée à partir d'une démonstration qu'ils ont produite avec leur propre discours. Mais, il nous semble que cette appropriation n'est possible que si les élèves ont acquis une certaine familiarité avec le raisonnement déductif. C'est pourquoi, c'est en troisième et même en seconde, qu'il nous paraît souhaitable de présenter cette activité.

c) Réponses d'élèves

Voici quelques-unes des questions trouvées par différents groupes :

Calculer l'angle BCA
Calculer l'aire de ADC
Calculer l'aire de BFCO
Calculer la longueur de [DC]
Prouver que ABC est rectangle en B
Démontrer que (OF) est parallèle à (AB)
Prouver que ADC est un triangle isocèle
Démonter que BFCO est un losange
Est-ce que le triangle DCE est rectangle ?
Trouver le périmètre de DCE.

Voici les critères relatifs à une démonstration qui ont été produits par quelques groupes d'élèves, en début de classe de troisième. Les réponses ont été recopiées intégralement sans rien changer ni à la syntaxe, ni à l'orthographe.

Groupe 1 :
Pour rédiger une réponse
Il faut :
— *Préciser de quelle figure on parle*
— *Préciser le théorème ou la règle utilisée*
— *Argumenter ce qui nous permet de conclure*
— *Développer les calculs*
— *Se servir des autres figures s'il y a besoin*
— *Toujours prouver ce qu'on affirme*
— *Ecrire au moins une fois la règle ou le théorème qu'on applique*
— *Faire les demonstrations dans un ordre logique*
Il ne faut pas :
— *Arriver au résultat sans rédiger*
— *Inventer une règle même si elle nous semble logique*
— *Faire de conclusion sans être sur de tous les points.*

Groupe 2 :
— *Au debut il faut donner des éléments que l'on connaît, la phrase doit commencer par « on sait que »*
— *Ensuite il faut donner un théorème la phrase doit*

commencer par «Si»
— Pour finir, on conclut ce qu'on voulait chercher.
connaissance ⟶ théorème ⟶ conclusion

Groupe 3 :
— *Il faut qu'elle soit claire brève et précise*
— *Donner les bonnes propriétés*

Groupe 4 :
— Marquer les théorèmes de quelles droite ou triangle
— Avoir une conclusion
— Que ce soit lisible et clair
— Marquer les données
— Détail de calculs pas de faute d'orthographe pas écrire trop vite la réponse

VI. Conclusion

Le temps d'apprentissage et d'assimilation concernant le raisonnement déductif et la démonstration est très long, si on se réfère aux programmes des différentes classes, il court et s'enrichit sur toutes les années de collège et de lycée. L'élève est tenu d'assimiler le raisonnement déductif mais aussi, d'autres formes de raisonnements comme le raisonnement par l'absurde, par disjonction des cas, la démonstration par récurrence.

Les seules informations objectives dont on dispose sur la manière dont l'élève construit cette pensée sont les productions écrites qu'il fournit et, pour cette raison, il nous semble essentiel de leur redonner une place centrale.

Il peut être tentant pour un enseignant de collège ou de lycée de s'attacher à des critères de forme, ce qui conduit certains enseignants à présenter à l'élève, avec l'intention de l'aider, des écrits souvent stéréotypés dont il doit reproduire la forme, en utilisant des connecteurs logiques bien marqués.

Si, prenant en compte les travaux de R.Duval, on considère que le discours écrit est le moyen de construire effectivement le raisonnement, n'est-il pas nécessaire de donner aux élèves la responsabilité de ce travail d'écriture, en tant que processus opératoire ? Dans cette hypothèse, l'apprentissage ne doit-il pas être recentré non sur la forme, mais sur le fond, c'est à dire la conduite du raisonnement, par des travaux appropriés ?

Cependant, les propositions que nous avons faites ne constituent qu'un aspect d'un projet d'enseignement plus complet dont l'objectif est le développement de toutes les compétences nécessaires à la réussite des élèves dans le cadre de la géométrie.

En effet, les élèves devront parallèlement faire évoluer leurs conceptions concernant les objets que sont le dessin et la figure, et construire les règles du jeu de la rationalité mathématique [1] en la différenciant de la rationalité du quotidien.

Bibliographie

[1] Arsac G., Chapiron G, Colonna A., Germain G., Guichard Y., Mante M, «Initiation au raisonnement déductif au collège « IREM de Lyon. PUL
[2] Arsac G., 1990 «Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France», RDM n°9 (3)

[3] Balacheff N., 1982, «Preuve et démonstration en mathématiques au collège», RDM n°3.3
[4] Barbin E., Duval R., Giorgutti I., Houdebine J., Laborde C., .2001, «Produire et lire des textes de démonstration», Ellipses édition Marketing S.A
[5] Bronner A., Pellequer S., 1995, « Une activité de géométrie, pour démarrer en classe de troisième.» Petit X n° 40
[6] Douady R., 1986, « Jeux de cadre et dialectique outil-objet », Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 7.2 La pensée sauvage Grenoble.
[7] Duval R., 1988, «Pour une approche cognitive des problèmes de géométrie en terme de congruence», Annales de didactiques et de sciences cognitives, Vol.1.
[8] Duval R., 1992, « argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive ? » Petit x n° 31
[9] Duval R., 1993 « Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée», Annales de didactiques et de sciences cognitives, Vol.5.
[10] Duval R, Egret M.A., 1989, «L'organisation déductive du discours», Annales de didactiques et de sciences cognitives Vol. 2.
[11] Duval R., Egret M.A., 1993, « Introduction à la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif », Repères n°12.
[12] Duval R., 1994, «Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. Repère n°17
[13] Duval R., 1995, « Sémiosis et pensée humaine », Peter Lang
[14] Duval R., 2000, « Ecriture, raisonnement et découverte de la démonstration en mathématiques », Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 20 n°2, La pensée sauvage.
[15] Girmens Y., Larguier M., Pellequer S., 1996, « Le codage des figures. Comment ? Quand ? Pourquoi ? », Actes du colloque Inter-IREM de géométrie de Bayonne, IREM d'Aquitaine.
[16] Girmens Y., Pellequer S., Seco M. «L'appropriation des théorèmes de géométrie plane et l'apprentissage de leur utilisation» actes ducolloque international EM 2000, Grenoble
[17] Groupe didactique, 1998, «Le codage : Quand, Comment, Pourquoi ?», IREM de Montpellier
[18] Legrand M., 1990, Rationalité et démonstration mathématiques, le rapport de la classe à la communauté scientifique.» RDM Vol.9.3
[19] Laborde C., 1982, «Langue naturelle et écriture symbolique, deux codes en interaction dans l'enseignement des mathématiques» Thèse.
[20] Larguier M., 2001, « Evolution du regard porté sur les objets de la géométrie du primaire à la fin du secondaire » Actes de la coopération IREM de Montpellier - IREMPT de Dakar, IREM de Montpellier
[21] Mesquita A.L., 1989, «L'influence des aspects figuratifs dans l'argumentation des élèves en géométrie : éléments pour une typologie», Thèse.
[22] Noirfalise R., 1993, « Contribution à l'étude didactique de la démonstration» RDM n°13(3).
[23] Padilla V., 1992, «L'influence d'une acquisition de traitements purement figuraux pour l'apprentissage des mathématiques» Thèse.