LE PROFESSEUR DE MATHEMATIQUES D'AUJOURD'HUI PEUT-IL ENCORE APPRENDRE QUELQUE CHOSE D'EUCLIDE ?

Jean-Pierre FRIEDELMEYER
Irem de Strasbourg

Durant les années 1960 – 70, au moment de la réforme dite des Mathématiques modernes, il était de bon ton de stigmatiser un enseignement archaïque basé pour une grande partie sur la géométrie, une géométrie elle-même archaïque dont le contenu remontait à Euclide, c'est-à-dire à quelqu'un qui avait vécu et diffusé son enseignement il y a plus de 2000 ans. Le slogan était alors : « **A bas Euclide, à bas le triangle.** »

Cette attitude pouvait s'expliquer par les obstacles que l'enseignement d'une géométrie bloquée dans une tradition millénaire opposait alors à une réforme des mathématiques qui cherchait à prendre en compte les acquis plus récents de cette science. Les arguments avancés s'organisaient autour de deux niveaux, l'un théorique, l'autre utilitaire :

1) les travaux axiomatiques issus des « Grundlagen der Geometrie » de Hilbert ont montré que « *Les Eléments* » d'Euclide n'avaient pas une rigueur suffisante, en accord avec les nouveaux critères exigés par les mathématiques actuelles, car elles faisaient trop appel à l'intuition et reposaient sur des données de la perception sensible. Par conséquent il était préférable de l'éviter en développant une théorie axiomatique basée sur l'algèbre et l'arithmétique ;

2) la géométrie euclidienne traditionnelle, centrée pour une grande part sur l'étude des propriétés du cercle et du triangle, est inutile et coupée de la réalité. Qui dans sa vie aura besoin de se servir de la droite de Simson ou du cercle de Feuerbach ?

Aujoud'hui, après plusieurs décennies d'expérimentations diverses et de nombreux travaux d'ordre didactique, la géométrie « traditionnelle » a retrouvé un certain intérêt : on s'est rendu compte combien elle était irremplaçable dans la formation au raisonnement et qu'il était important justement de laisser une place à l'intuition au commencement de cet apprentissage ; pour un élève de collège, une figure donne prise sur la réalité, plus facilement qu'un calcul algébrique ou numérique, qui en reste trop souvent à l'application d'un algorithme automatique. De plus, le raisonnement sur des figures nous semble la seule réponse au défi que posent les mathématiques d'aujourd'hui à leur enseignement à un niveau élémentaire comme le collège. En effet, dans la conception actuelle de la rigueur, une démonstration rigoureuse nécessite l'usage d'un langage extrêmement structuré et formalisé, ne s'appuyant sur aucun élément sensible. Cela n'est pas à la portée d'un élève de collège ni même de lycée. La réponse proposée par les méthodes et les programmes actuels tentent alors un compromis entre des théorèmes à contenu numérique précis mais non démontrés : théorème de Thalès, formules donnant les aires d'un rectangle, d'un triangle, d'un disque, ou la circonférence du cercle, et des techniques de démonstration géométrique consistant essentiellement dans la manipulation de ces formules. Précisons cela sur un exemple récent, le rallye mathématique d'Alsace (année 2002), et plus particulièrement le premier exercice pour les élèves de Première. Son énoncé est très simple, compréhensible par un élève de Collège ou même de l'Ecole Primaire.

I. Méthodes géométriques actuelles versus méthode euclidienne

Un exemple.

Soit ABC un triangle et I le milieu de [AC]. Soit M un point quelconque de [IC]. Où placer le point P sur [AB] pour que (MP) partage le triangle ABC en deux parties de même aire ?

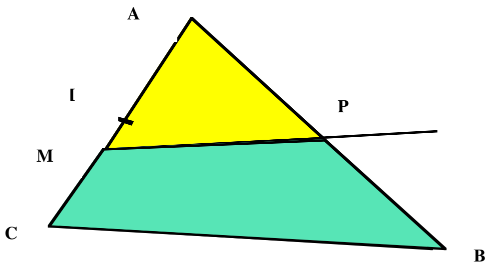


Figure 1

Et voici la solution de l'un des binômes primés :

Soient J le milieu de [AB], H le pied de la hauteur issue de C, G l'intersection de (AB) avec la hauteur issue de M.

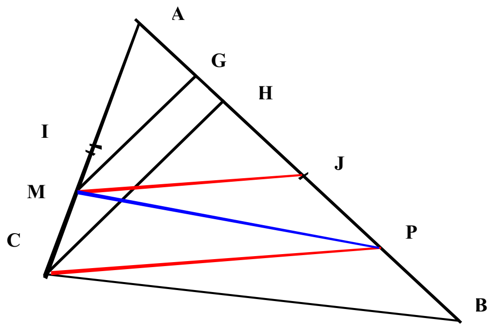


Figure 2

Alors (MG) est parallèle à CH ; donc[1] :

$$\frac{HC}{MG} = \frac{AC}{AM} \;;\; \mathbf{a}_{ABC} = \frac{HC \times AB}{2} \;;$$

$$\mathbf{a}_{AMP} = \frac{AP \times MG}{2}$$

(MP) divise le triangle en 2 parties égales,

1La lettre **a** désigne bien évidemment l'aire. Les élèves ne le précisent pas.

donc $\mathbf{a}_{AMP} = \mathbf{a}_{MPBC} = 1/2\ \mathbf{a}_{ABC}$

$$\frac{AP \times MG}{2} = 1/2\ \frac{HC \times AB}{2} ;$$

d'où $AP = \dfrac{HC \times AB}{2MG}$; or AB = 2AJ ; donc :

$$AP = \frac{AJ \times HC}{MG} \text{ ; or } \frac{HC}{MG} = \frac{AC}{AM}.$$

Dans les triangles AMJ et APC, selon la réciproque du théorème de Thalès : (CP) est parallèle à (MJ) ; **donc P est le point d'intersection de (AB) et de la parallèle à (MJ) passant par C.**

Commentaire.

Cette solution est effectivement tout à fait remarquable par son ingénuosité et le sens de la démonstration qu'elle révèle :

1) traduction de la position de M en termes numériques au moyen d'un rapport,
2) transport de cette relation sur l'autre côté par utilisation de Thalès,
3) injection dans la formule donnant l'aire d'un triangle, et transformation de l'hypothèse d'égalité des aires en égalité de rapports,
4) déduction de la position de P par la réciproque de Thalès.

Elle soulève cependant plusieurs questions d'ordre logique et pédagogique :

1) Alors que, comme nous l'avons signalé plus haut, l'énoncé est élémentaire, du niveau Collège voire Ecole Primaire, la solution proposée repose sur un théorème (Thalès) et une formule (l'aire d'un triangle) non démontrés à ce niveau (et même pas en Première, classe pour laquelle le problème a été posé). Ces deux supports sont de fait considérés comme des théorèmes alors qu'en réalité ce sont des axiomes très élaborés de l'enseignement secondaire.
2) Afin de mener à bien la solution, elle traduit en termes numériques des propriétés qui au départ sont purement géométriques. Elle manifeste cette tendance de l'enseignement à traiter toute question mathématique par le biais du numérique et du calcul, au détriment du raisonnement et de l'argumentation sur des concepts et des relations plus larges que l'égalité numérique.

Comparons cette solution à celle que que peut nous fournir Euclide, à l'aide de ses *Eléments*. Elle s'appuie sur un résultat très simple, (accessible à un élève de sixième), qui est la proposition 37 du Livre I *: Les triangles construits sur la même base et entre les mêmes parallèles sont égaux.*

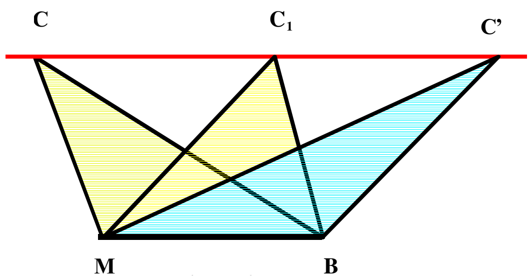


Figure 3

Une solution dans le style d'Euclide

Commençons par analyser la situation du problème. La difficulté vient du fait que nous avons à comparer d'un côté un triangle (AMP), de l'autre un quadrilatère quelconque (MCBP). Peut-on remplacer celui-ci par un triangle de même aire ? L'aire du quadrilatère ne change pas lorsque l'on déplaçe l'un de ses sommets parallèlement à une diagonale, d'après Euclide (I, 37) ci-dessus. Ainsi, les quadrilatères (MCBP), (MC_1BP) et (MC_2BP) de la figure 4 ont la même aire.

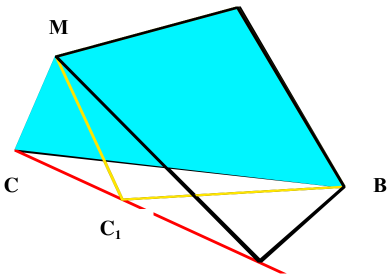


Figure 4

On aura un triangle si C_2 est aligné avec B et P. D'où la solution :

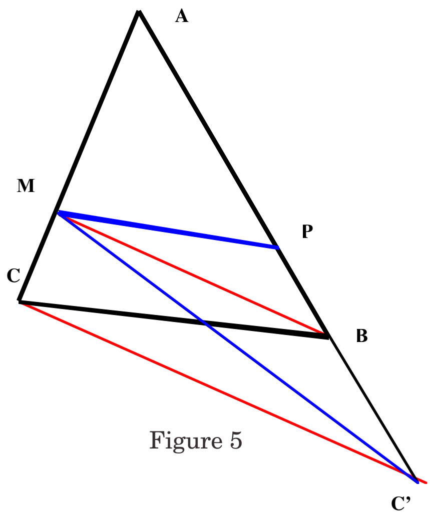


Figure 5

Soit C' l'intersection avec (AB) de la parallèle à (MB) passant par C.

Alors Aire (MCBP) = Aire (MC'P)

Donc Aire (MCBP) = Aire (AMP) si et seulement si P est au milieu de [AC'].

Discussion : Si [MC] est plus grand que [MA], [BC'] sera plus grand que [AB], et le milieu P de [AC'] tombera à l'extérieur de [AB]. C'est la raison pour laquelle l'énoncé choisissait M sur [CI], I milieu de [CA]. Si M se trouve sur [IA] la méthode reste valable, mais le partage se fera par un point situé sur [BC].

Les qualités de la démarche euclidienne : intuitive et organisée.

La proposition (I, 37) [2], support de cette solution, n'est pas évidente. Elle se démontre cependant aisément dans la logique euclidienne, basée sur une intuition spatiale des objets et des figures. Celle-ci fournit une axiomatique simple mais tout à fait performante, exprimant des vérités immédiates sur lesquelles tout un chacun peut être d'accord :

1. Les choses égales à une même chose sont égales entre elles.
2. Et si, à des choses égales, des choses égales sont ajoutées, les touts sont égaux.
3. Et si, à partir de choses égales, des choses égales sont retranchées, les restes sont égaux.
4. Et si, à des choses inégales, des choses égales sont ajoutées, les touts sont inégaux.
5. Et les doubles du même sont égaux entre eux.
6. Et les moitiés du même sont égales entre elles.
7. Et les choses qui s'ajustent les unes sur les autres sont égales entre elles.
8. Et le tout est plus grand que la partie.

Cette axiomatique suffit à démontrer la proposition (I, 35) par la considération de deux

2 Dans toute la suite, nous donnerons les références aux Eléments d'Euclide sous cette forme : le premier chiffre, romain, indique le numéro du livre, le second, en chiffres arabes, indique le numéro de la proposition.

triangles égaux (qui s'ajustent exactement par une translation, terme non utilisé par Euclide) : *Les parallélogrammes qui sont sur la même base et dans les mêmes parallèles sont égaux entre eux.*

La proposition (I, 37) s'en déduit par considération des demi-parallélogrammes : *Les triangles qui sont sur la même base et dans les mêmes parallèles sont égaux entre eux.*

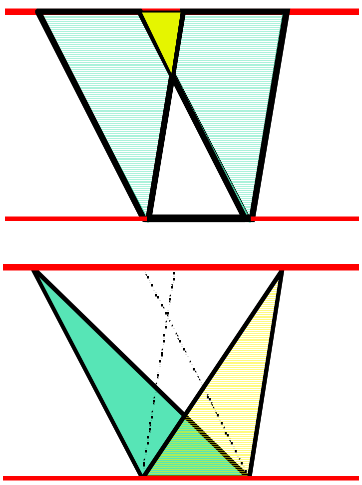


Figure 6

Généralisations.

L'exercice précédent peut s'étendre au cas d'un quadrilatère convexe quelconque ABCD (figure 7). Soit M un point de [AB]. Où faut-il placer un point P sur [CD] pour que la droite [MP] partage le quadrilatère en deux parties de même aire ?

En construisant la parallèle (AD') à (MD) et la parallèle (BC') à (MC) on met en évidence un triangle MD'C' de même aire que le quadrilatère ABCD. Le partage du triangle en deux parties de même aire est alors forcément réalisé par la médiane (MP). La construction de la droite (MP) partageant le quadrilatère en deux parties de même aire s'en déduit immédiatement. Bien sûr il y a à examiner le cas où P tombe en dehors du segment [DC].

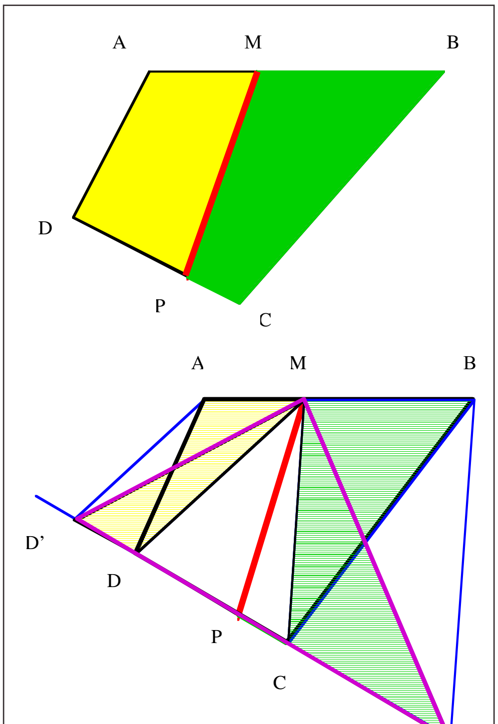


Figure 7

On peut encore proposer une autre généralisation[3] : le point M étant donné sur [AC], construire (n – 1) segments depuis M jusqu'aux autres côtés et partageant le triangle en n parties égales.

3 Proposée par Dominique Bénard.

Nous laissons au lecteur le plaisir de justifier sur la figure 8 ci-contre un tel partage en 5 parties égales.

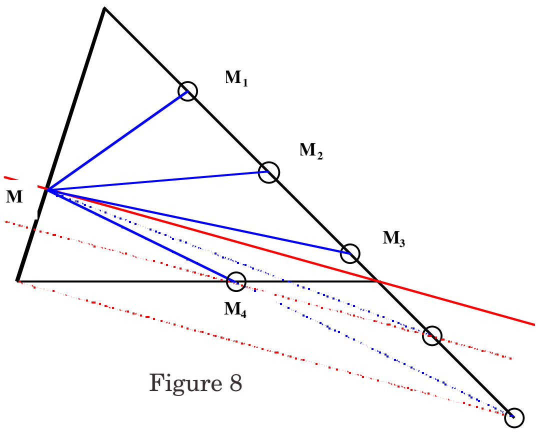


Figure 8

Sauf erreur, l'adaptation de la solution primée du rallye au cas du quadrilatère me paraît beaucoup plus difficile que l'utilisation des méthodes mises en place par Euclide. Auquel cas il y a lieu de s'interroger sur les raisons qui ont amené l'enseignement secondaire à privilégier les méthodes numériques et calculatoires. Ces raisons sont certainement multiples et trop complexes pour être analysées ici. Nous pouvons tout au plus en évoquer quelques-unes rapidement.

Quelques raisons expliquant l'abandon de cette démarche euclidienne.

La première concerne l'évolution historique même des mathématiques durant les deux derniers siècles. Au 18ème siècle le concept fondamental des mathématiques est celui de grandeur et de quantité, liant le nombre de façon irrémédiable au monde physique, et tout spécialement à l'espace physique par la géométrie. L'algèbre désignait alors simplement l'ensemble des méthodes de calcul symbolique, et était considéré essentiellement comme un langage permettant la représentation aisée et suggestive des relations entre nombres et quantités. Cette situation s'est précisément renversée au 19ème siècle. L'algèbre devenait la matière principale des recherches et l'arithmétique le support de l'algèbre et progressivement de la totalité des mathématiques, au moyen de laquelle tous les faits mathématiques devaient être exprimables. Ce processus d'arithmétisation culminait à la fin du 19ème siècle avec le fait que la consistance des mathématiques était réduite à la consistance de l'arithmétique, tirant celle-ci vers une position de science fondationnelle spécifique des mathématiques. Par ailleurs, la géométrie analytique avait donné une force toute nouvelle aux mathématiciens en leur fournissant le moyen de résoudre facilement et pour ainsi dire mécaniquement nombre de problèmes qui avaient résisté définitivement aux méthodes de la géométrie traditionelle.

Enfin la traduction numérique des propriétés géométriques a pris un intérêt et un essor renouvelés avec l'ordinateur et les logiciels de géométrie.

Il faut donc rester conscient de ces évolutions et de la relation nouvelle qui existe entre le numérique et le géométrique, sans pour autant passer aux oubliettes de l'histoire l'expérience pédagogique qu'a pu apporter durant des siècles l'enseignement de la géométrie traditionnelle. Il faut mettre Euclide et les méthodes « anciennes » à leur juste place : celle d'un apprentissage de la démonstration qui puisse s'appuyer sur une intuition sûre, en relation avec des objets sensibles et pourtant idéaux, à un moment de l'enseignement scolaire où la pensée de l'élève n'est pas encore accessible à une trop grande abstraction numérique et algébrique mais où il faut pourtant le former à une démarche logique et argumentée. L'exemple le plus parlant à ce sujet est le théorème de Pythagore. Celui-ci est tout à fait accessible à un élève de collège s'il est présenté en termes d'égalité d'aires, mais suppose l'introduction des radicaux (donc de l'irrationalité) dès qu'on veut le présenter dans sa version numérique comme relation entre les mesures des côtés. De plus, au-delà même de la présentation de propriétés et de théorèmes isolés, les *Eléments d'Euclide* nous apprennent à les organiser dans une suite déductive qui met en relief le caractère architectural de l'édifice mathématique. Montrons cela sur un exemple de progression où chaque maillon pris individuellement est quasi évident mais dont l'ensemble aboutit à des propriétés très élaborées puisqu'il nous permettra d'aller jusqu'à la construction d'un pentagone régulier.

II. Un exemple de progression déductive, à la manière d'Euclide

Afin de rendre le discours d'Euclide plus accessible au lecteur d'aujourd'hui, nous utiliserons dans toute la suite la notation AB×AC pour désigner l'aire du rectangle de côtés les segments [AB] et [AC] ; et AB^2 celle du carré de côté [AB], là où Euclide parle du rectangle contenu sous les deux droites AB et AC. Rappelons que ces aires sont des grandeurs que l'on peut figurer, et non pas des mesures. C'est cela justement qui rend le raisonnement plus accessible à l'intuition d'un collégien ; qui le prépare à la généralité sans nécessiter l'abstraction du numérique et de l'algébrique ; qui l'entraîne à la démonstration par l'enchaînement rigoureux de maillons simples aboutissant à une véritable théorie susceptible d'être réinvestie dans de nombreux problèmes et applications. L'exemple du théorème de Pythagore, énoncé et démontré au moyen des aires est maintenant bien connu et souvent pratiqué au collège. Nous le considérerons comme acquis.

Lemme I (II, 5)[4]**.** Soit M le milieu d'un segment [AB] et C un autre point quelconque de ce segment.

Alors : CA×CB + MC^2 = MB^2.

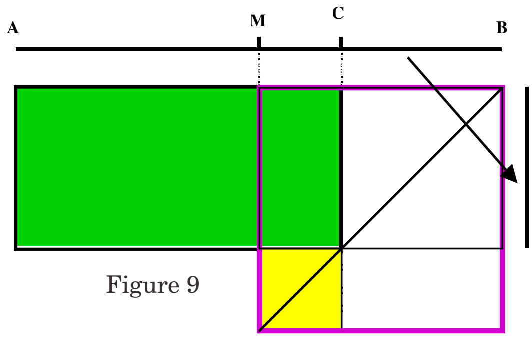


Figure 9

Lemme II (II, 6). Soit M le milieu d'un segment [AB] et C un point de la droite (AB), à l'extérieur du segment [AB].

Alors : CA×CB + MB^2 = MC^2.

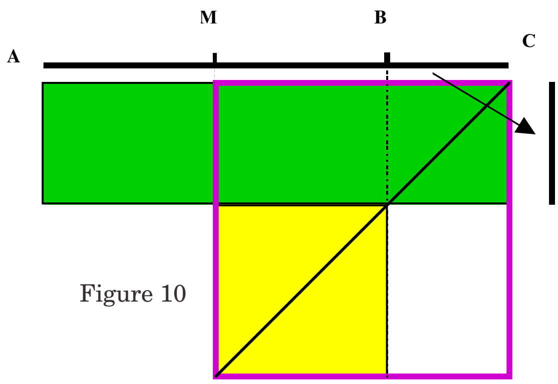


Figure 10

4 Nous rappelons que nous numérotons ainsi les propositions d'Euclide, en l'occurrence : Livre II, proposition 5.

Le lecteur démontrera aisément ces deux lemmes, par comparaison des différents rectangles et carrés.

Application (II, 11) : Sur un segment [AB] placer un point C de façon que

$$BC \times BA = CA^2$$

Construisons le carré ABDE et soit F le milieu de [AE].

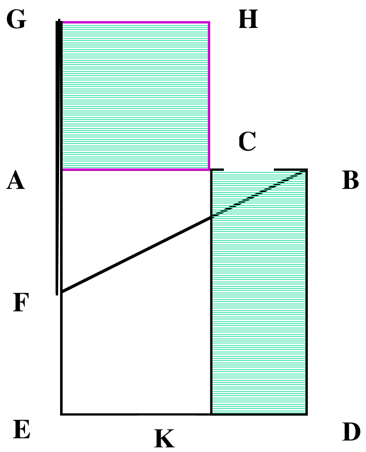


Figure 11

Construisons G tel que FB = FG sur le prolongement de (EA) et complétons le carré AGHC. Alors C est le point cherché.

En effet, soit K l'intersection de (HC) avec (ED) ; par la proposition (II,6), on a :

$$EG \times GH + AF^2 = FG^2 = FB^2.$$

Mais $FB^2 = AF^2 + AB^2$ par le théorème de Pythagore (proposition (I, 47) chez Euclide). Donc $EG \times GH = AB^2$. En soustrayant le rectangle $AC \times AE$ de chaque côté, nous obtenons l'égalité à démontrer :

$$BC \times BD = BC \times BA = CA^2.$$

Théorème I (III, 35) : Soient deux cordes [AB] et [CD] se coupant en un point E à l'intérieur d'un cercle de centre O.

Alors $EA \times EB = EC \times ED$.

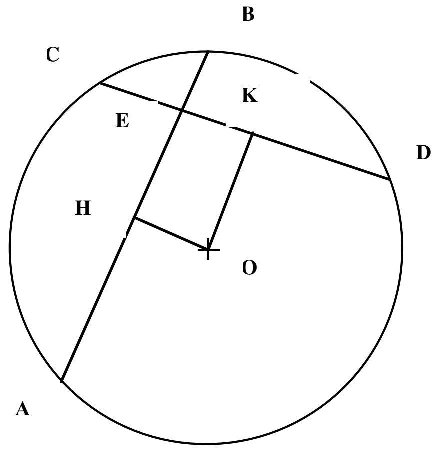


Figure 12

Démonstration : Soient H et K les milieux respectifs des cordes [AB] et [CD]. D'après le lemme 1, on a :

$$EA \times EB + HE^2 = HA^2$$

Ajoutons OH^2 aux deux membres de cette égalité

$$EA \times EB + HE^2 + OH^2 = HA^2 + OH^2$$

Ou encore (par Pythagore) :

$$EA \times EB + OE^2 = OA^2$$

De même, on démontre que :

$$EC \times ED + OE^2 = OD^2 = OA^2$$

L'égalité souhaitée s'en déduit :

$$EA \times EB = EC \times ED.$$

Le lecteur démontrera facilement de la même manière, et avec l'aide du lemme 2, le

Théorème II (III, 36) : Soit A un point extérieur à un cercle de centre O , (ABC) une droite passant par A et coupant le cercle en B et C, et AT une tangente au cercle.

Alors on a : $AB \times AC = AT^2$.

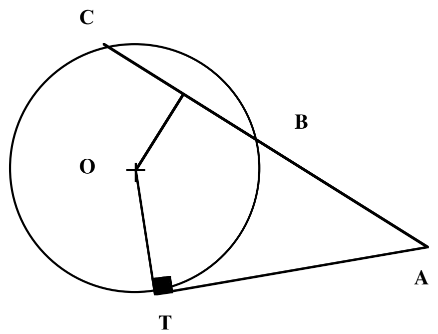


Figure 13

Et voici la réciproque :

Théorème III (III, 37) : Soit A un point extérieur à un cercle de centre O , (ABC) une droite passant par A et coupant le cercle en B et C , T un point du cercle tel que $AB \times AC = AT^2$, alors la droite (AT) est tangente au cercle en T.

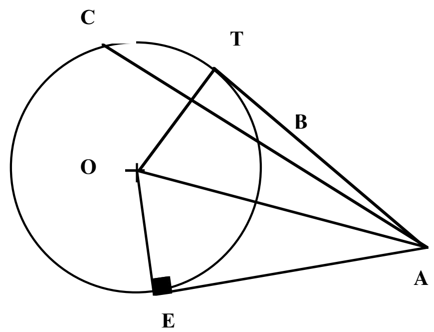


Figure 14

En effet : soit (AE) tangente au cercle en E. D'après le th. II, on a : $AB \times AC = AE^2 = AT^2$ par hypothèse. Donc AT = AE, et comme par ailleurs OT = OE et que OA est commun, les deux triangles (OEA) et (OTA) sont isométriques. Donc leurs angles sont respectivement égaux, en particulier les angles en E et en T. Comme celui en E est droit, celui en T l'est aussi, ce qui signifie bien que (AT) est tangente au cercle en T.

Application : la construction d'un pentagone régulier.

Si, aux résultats mis en place ci-dessus, nous ajoutons les propriétés des angles inscrits dans un cercle, nous pouvons aller avec Euclide jusqu'à la construction d'un pentagone régulier. C'est la *proposition (IV, 11)* : **Dans un cercle donné, inscrire un pentagone équilatéral et équiangle.**

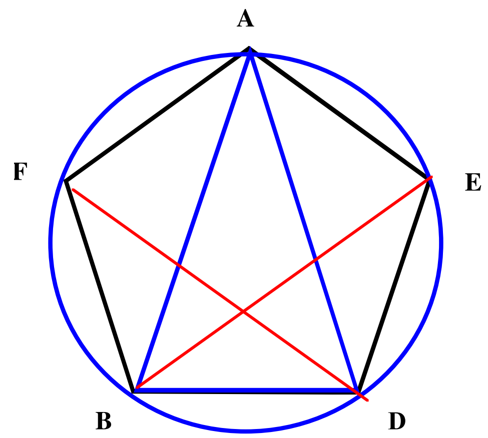


Figure 15

Par l'analyse de la figure, Euclide montre que ce problème se décompose en deux autres :

Problème 1 : *construire un triangle isocèle ayant chacun des angles à la base double de l'angle restant. (traité en(IV,10))*

Problème 2 : *Dans un cercle donné, inscri-*

re un triangle équiangle à un triangle donné. (traité en (IV,2))

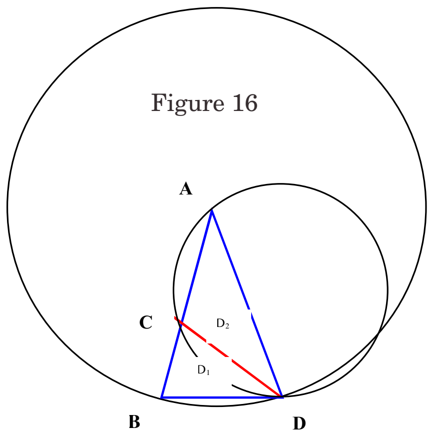
Remarquons que le deuxième problème sert uniquement à placer le pentagone dans le cercle donné. Si nous voulons seulement construire un pentagone régulier, d'une dimension non définie, la résolution du premier problème suffit. Traitons ce premier problème.

Résolution du problème 1.

Euclide montre que pour cela il suffit de savoir couper l'un des côtés égaux, par exemple [AB] en un point C tel que $AB \times BC = CA^2$.

Voici la justification donnée par Euclide : en construisant le cercle de centre A et de rayon AB et en traçant la corde BD égale à AC, l'égalité $AC^2 = BD^2 = BC \times BA$ implique que le cercle circonscrit au triangle ACD est tangent à (BD), d'après le théorème III .

Figure 16



Donc $\angle A = \angle D_1$;

$$\angle D_1 + \angle D_2 = \angle A + \angle D_2$$
$$= \angle BCD = \angle CBD \text{ ;}$$

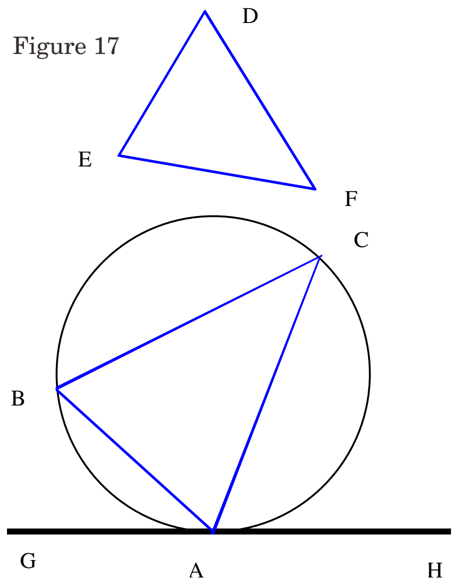
donc le triangle DBC est isocèle et on a DC = BD = AC ; donc le triangle ACD est aussi isocèle et $\angle A = \angle D_2$. Ce qui montre bien que les angles à la base du triangle ABD sont le double de l'angle au sommet.

Résolution du problème 2.

Dans un cercle donné, inscrire un triangle équiangle à un triangle donné.

Sur la tangente GHA en A au cercle, construisons l'angle HAC égal à l'angle DEF et l'angle GAB égal à l'angle DFE. Alors le triangle ABC est équiangle au triangle DEF, car

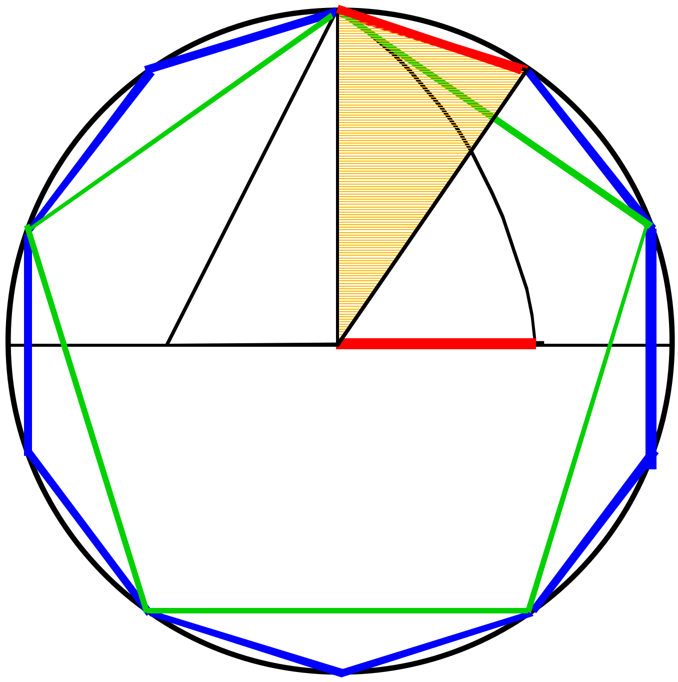
Figure 17



l'angle en B est égal à l'angle en E ; et l'angle en C est égal à celui en F, d'après (III, 32), qui traduit l'une des propriétés de l'angle inscrit.

Pour la construction effective, nous pour-

Figure 18



rions reprendre une à une les constructions successives. Mais nous pouvons aussi remarquer que le triangle de base qui sert à cette construction est aussi constitutif du dodécagone (angles de 36° et deux fois 72°), dont il suffit de prendre un côté sur deux pour avoir le pentagone. En effectuant la construction (II, 11), à partir d'un rayon du cercle circonscrit, puis la construction (IV, 10) nous mettons en évidence la base d'un tel triangle.

En conclusion de cet exemple.

L'enseignement élémentaire des mathématiques se heurte à une situation paradoxale :

— l'élève de collège est tout à fait capable de penser et de raisonner sur les figures géométriques simples telles que le triangle, certains polygones, le cercle. Cela signifie que l'apprentissage de la démonstration à partir de ces figures est pour lui un impératif qui, s'il est négligé au bon moment, risque de le faire passer à côté d'un apport essentiel des mathématiques : l'argumentation et l'initiation au discours rationnel,

— mais en même temps les relations numériques existant entre les mesures exactes des grandeurs impliquées dans ces figures ne lui sont en général pas accessibles, car pour la plupart irrationnelles.

Par exemple la figure 19 ci-après met en relation diverses grandeurs. Ainsi l'aire du carré

ABEF est manifestement le double de celle du carré ADBC.

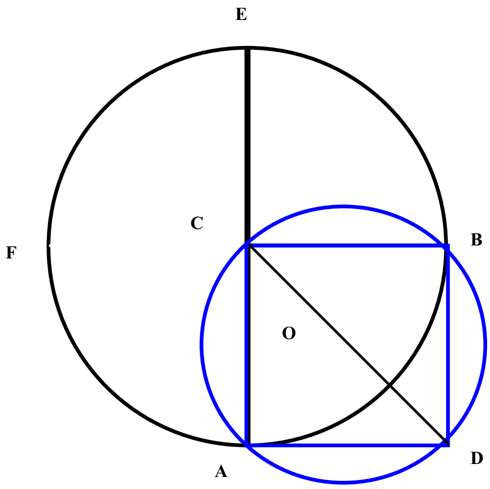


Figure 19

Mais qu'en est-il :
— des aires limitées par les cercles circonscrits ?
— du rapport entre l'aire d'un des disques et celle du carré inscrit ?
— du rapport entre les côtés des deux carrés ? des deux circonférences ?
— du rapport entre une des circonférences et le côté du carré correspondant inscrit ?

Le terme « irrationnel » devrait garder la mémoire de cette difficulté, mais il a été tellement galvaudé qu'il a totalement perdu son sens originel dans l'enseignement des mathématiques. Euclide avait, lui, une conscience aiguë de cette difficulté, et ses *Eléments* la prennent explicitement en compte dans les quatre premiers Livres. Ceux-ci développent tout ce qui peut se traiter de façon élémentaire, c'est-à-dire sans la théorie des proportions exposée au Livre V, théorie qui gère, entre autres, tout le problème des rapports irrationnels, et leur traitement mathématique. Le théorème de Thalès, la formule de l'aire du triangle, la mesure de l'aire du disque sont traités à l'aide de la théorie des proportions, au Livre VI ou XII, mais nullement dans les quatre premiers livres.

C'est pourquoi, dans ces livres là, Euclide parle de triangles équiangles et non pas semblables, notion plus élaborée et générale qui relève de la théorie des proportions. De même, la fameuse proposition (II,11), au centre de la construction du pentagone régulier, sera reprise au livre VI en termes de proportion, sous l'expression bien connue de *partage d'un segment en moyenne et extrême raison,* plus connu sous les termes de *divine proportion* ou encore *nombre d'or.* Il n'est pas question de présenter la théorie des proportions, exposée par Euclide dans le Livre V, tant elle est abstraite et étrangère à notre forme actuelle d'exposition d'une théorie. Le professeur de mathématiques peut néanmoins souhaiter faire comprendre à ses élèves l'existence de relations entre des grandeurs qui ne s'expriment pas par un rapport de nombres. Et à les préparer à l'élargissement du concept de nombre dont l'aboutissement sera le concept de nombre réel. Nous proposons dans la suite une autre progression qui tente de répondre à cet objectif, et qui est basé sur un autre apport essentiel de l'auteur des *Eléments :* l'algorithme d'Euclide. Mais celui-ci sera encore présenté dans un habillage géométrique, afin de conserver le support intuitif des figures.

III. Exemple de progression vers la notion de nombre irrationnel.

L'idée de base reprend ce que les Grecs appelaient *anthyphaïrésis* (littéralement *sous-*

traction réciproque) et consistant , pour deux grandeurs inégales données, *de retrancher la plus petite de la plus grande de façon réitérée et en alternance*, selon les termes utilisés par Euclide (propositions (VII, 1) et (X, 2) ; voir plus loin , la conclusion de cette partie). Le rectangle et le carré sont les deux figures idéales pour visualiser cette opération, sous la forme d'un pavage de rectangle par des carrés de la manière suivante.

1. Pavage d'un rectangle avec des dalles carrées.

A. Considérons un rectangle dont les dimensions par rapport à une unité fixée sont données par deux entiers, par exemple 133 et

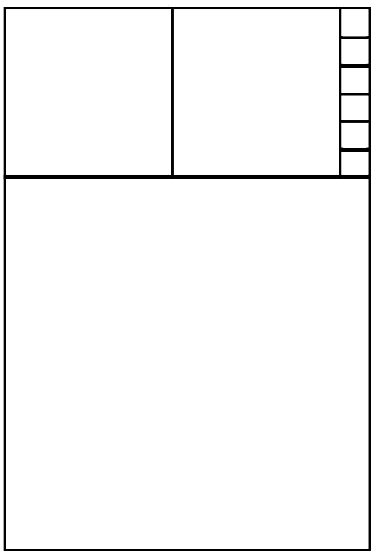


Figure 20

91. Il s'agit de paver ce rectangle au moyen de carrés à intérieurs disjoints les plus grands possibles, et aux côtés parallèles à ceux du rectangle.

Je peux inscrire un carré de côté 91 et il reste un rectangle 91×42 car ($133 = 91 + 42$). Dans ce rectangle je peux inscrire deux carrés de côté 42, qui laissent un rectangle 42×7 (car $91 = 42\times2 + 7$). Enfin dans le dernier rectangle je peux inscrire 6 carrés de côté 7 (puisque $42 = 7\times6$).

Récapitulons :

$133 = 91\times\mathbf{1} + 42$; $91 = 42\times\mathbf{2} + 7$; $42 = 7\times\mathbf{6}$

c'est exactement l'algorithme d'Euclide qui nous fournit :

1) le PGCD des nombres 133 et 91 à savoir 7, avec les relations : $133 = 19\times7$ et $91 = 13\times7$

2) un dallage uniforme avec des carrés tous égaux, les plus grands possibles, donc de côté 7 , au nombre de $19\times13 = 247$

3) le rapport simplifié des côtés du rectangle initial : $\frac{19}{13}$, que l'on retrouve également en écrivant les quotients successifs :

$$\frac{133}{91} = 1 + \frac{42}{91}\ ;\ \frac{91}{42} = 2 + \frac{7}{42}\ ;\ \frac{42}{7} = 6$$

d'où : $\frac{133}{91} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{6}} = \frac{19}{13}$.

Ce rapport donne en quelque sorte la **forme** du rectangle indépendamment des unités de mesure : pour les rectangles 133×91 et 19×13 ou $19u\times13u$, il existe toujours une homothétie transformant l'un en l'autre si les côtés sont pris respectivement parallèles.

La figure ci-contre met en évidence cette permanence de la forme et l'homothétie qui la sous-tend.

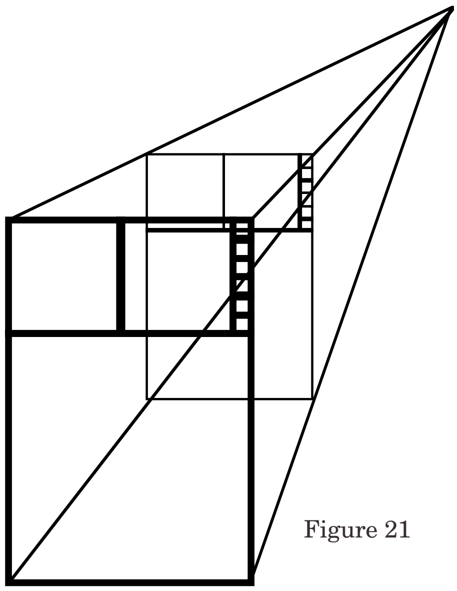


Figure 21

B. Plus généralement

Je dessine un rectangle quelconque (figure 22) dont je ne connais pas précisément les dimensions L et l. Puis- je néanmoins dire quelque chose sur le rapport de L à l ? Utilisons pour ce rectangle le même procédé que dans l'exemple ci-dessus. J'obtiens ainsi des carrés successifs de côtés l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 vérifiant les relations :

$$L = l + l_1 \; ; \; l = l_1 + l_2 \; ; \; l_1 = l_2 + l_3 \; ;$$
$$l_2 = 5\, l_3 + l_4 \; ; \; l_3 = l_4 + l_5 \; ; l_4 = 3\, l_5$$

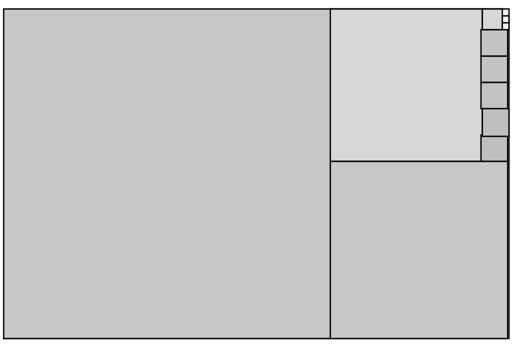
qui me donnent, en remontant les indices :

$$l_4 = 3\, l_5 \; ; l_3 = 4\, l_5 \; ; l_2 = 23\, l_5 \; ; l_1 = 27\, l_5 \; ;$$
$$l = 50\, l_5 \; ; \; L = 77\, l_5 \, .$$

J'obtiens ainsi finalement, le rapport **:**

$$\frac{L}{l} = \frac{77}{50} = 1{,}54$$

Figure 22



Conclusion : les côtés de ce rectangle sont comme 77 à 50 et j'ai pu trouver ce que l'on appelle une mesure commune à L et l, à savoir la longueur l_5. Ici nous avons eu en quelque sorte de la chance parce que le processus s'est terminé au bout de cinq étapes mais on imagine très bien qu'il pourrait être beaucoup plus long, voire qu'il ne se termine jamais. En fait, tant que je me fie à la simple observation, il arrivera toujours un moment où le pouvoir de résolution de mon œil sera inférieur à l'épaisseur du trait, et où le processus sera terminé.

C. Il en va tout autrement si, au-delà de la simple observation et de la mesure directe, j'introduis un raisonnement sur *un objet pensé, idéal,* donné non plus d'abord par une figure mais par une propriété abstraite, tel l'exemple suivant : le rectangle ABCD considéré a la propriété que si j'enlève le plus grand carré possible, EFCD, il reste un rectangle ABFE semblable (c'est à dire gardant le même rapport des côtés), sur lequel je peux recommencer la même opération, mettant ainsi en évidence un rectangle toujours semblable au rectangle initial, mais de plus en plus petit. Dans ce cas, je ne peux pas exprimer le rapport entre les deux côtés par un rapport de nombres, puisque le processus ne s'arrête pas.

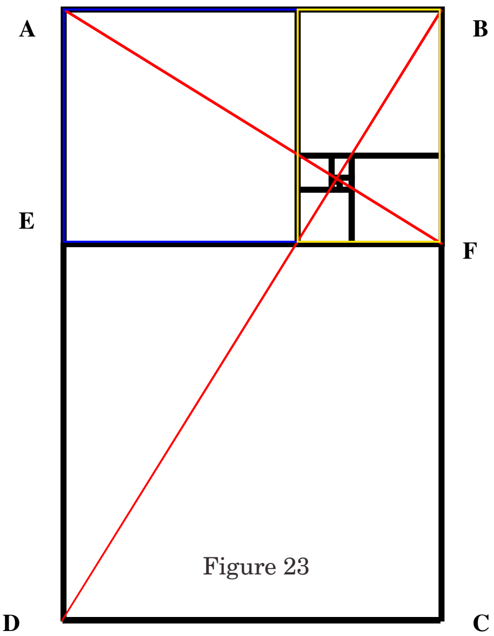


Figure 23

Nous avons déjà rencontré un tel rectangle dans l'application (II, 11), où il fallait placer un point C sur un segment [AB] de telle façon que $BC \times BA = CA^2$. La figure réalisant la construction est reprise ci-dessous et l'on a complété le rectangle DEGM. La relation $BC \times BA = CA^2$ peut aussi s'écrire :

$$\frac{BC}{CA} = \frac{CA}{BA} = \frac{BC + CA}{CA + BA} = \frac{BA}{EG}$$

Ce qui montre exactement la similitude (même forme) des rectangles BCHM, ABMG et DEGM.

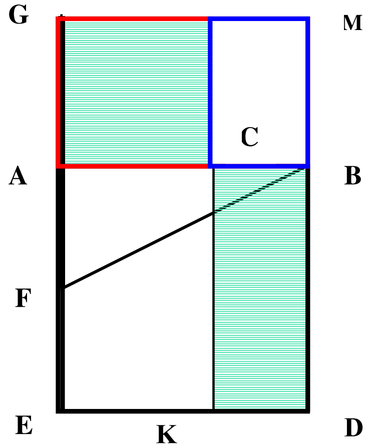


Figure 24

D. Un autre exemple[5] nous est donné par un rectangle qui a pour côtés respectivement le côté d'un carré et sa diagonale (cf. figure 25 de la page suivante). En restant sur une mesure des côtés des carrés successifs empirique (par exemple avec une règle graduée), j'arrive à la situation suivante :

$$L = l + l_1 \ ; l = 2\, l_1 + l_2 \ ; \ l_1 = 2\, l_2 \ ;$$

et en remontant les indices :

$$\boldsymbol{l = 5\, l_2 \ ; \ L = 7\, l_2}$$

ce qui me donne le rapport $\frac{L}{l} = \frac{7}{5} \cong 1{,}4$.

Par contre, si j'introduis (figure 26) dans la construction de mes différents carrés en même temps la considération du rapport des côtés du rectangle je constate qu'à chaque étape il y a « conservation de la forme du rectangle » et que le processus n'a aucune raison de s'arrê-

5 C'est exactement le format de la feuille de papier **A4**.

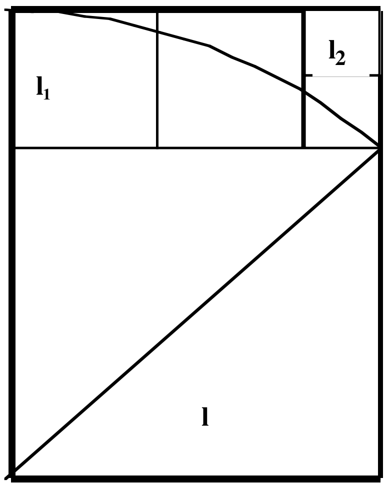


Figure 25

ter. En effet, si a, a_1, a_2, a_3, etc. et d, d_1, d_2, d_3, etc. désignent les côtés (respectivement les diagonales) des carrés successifs, et en tenant compte des relations :

$d^2 = 2\, a^2$;
$a_1 = d - a$;
$d_1 = a - a_1$;
etc.,

on a les rapports :

$$\frac{2a}{d} = \boxed{\frac{d}{a} = \frac{2a-d}{d-a}} = \boxed{\frac{d_1}{a_1} = \frac{2a_1-d_1}{d_1-a_1}} = \boxed{\frac{d_2}{a_2} = \frac{2a_2-d_2}{d_2-a_2}} = \frac{d_3}{a_3}, \text{ etc.}$$

Je pourrai inscrire indéfiniment des carrés certes de plus en plus petits, mais sans arriver jamais à épuiser le dernier rectangle restant par ces carrés.

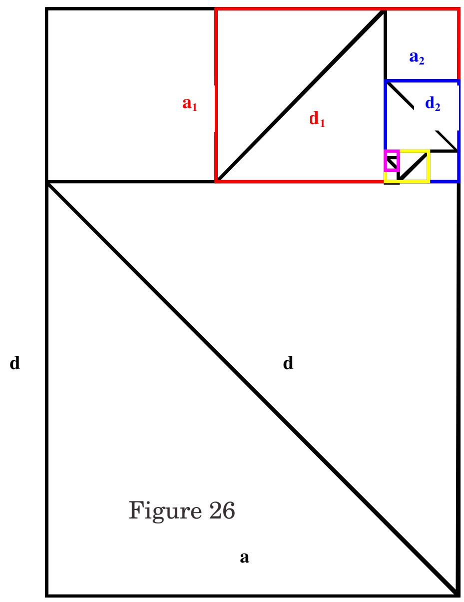


Figure 26

E. Conclusion de l'étude de ces différents exemples :

— ou bien le processus de pavage du rectangle s'arrête ou bout d'un nombre fini d'opérations. On pourra paver entièrement le rectangle au moyen de carrés tous de même dimension. Le côté commun de tous ces carrés est une mesure commune aux deux côtés du rectangle. On dit que ces deux côtés sont commensurables. Chaque côté du rectangle peut s'exprimer par un multiple p (respectivement q) de cette mesure commune, et le rapport des côtés est alors p/q.

— ou bien ce processus ne s'arrête pas, il n'y a pas de mesure commune et les deux côtés sont dites incommensurables ; le rapport des côtés ne peut pas s'exprimer au moyen d'une fraction.

Ces définitions se retrouvent exactement dans Euclide, lorsque l'on remarque que l'utilisation des carrés permet de relier directement les deux côtés du rectangle, qui jouent le rôle des grandeurs inégales proposées dans son texte et qui visualisent ce que les Grecs appelaient *anthyphérèse,* ou soustraction réciproque :

Euclide X 2
Si, de deux grandeurs inégales {proposées} la plus petite étant retranchée de la plus grande de façon réitérée et en alternance, le dernier reste ne mesure jamais le [reste] précédent, les grandeurs seront incommensurables.

Euclide X 3
Etant données deux grandeurs commensurables, trouver leur plus grande commune mesure.

Le parallélisme est flagrant entre ces deux propositions du livre X et les propositions 1 et 2 du livre VII concernant les nombres [6] :

Euclide VII 1 :
Deux nombres inégaux étant proposés et le plus petit étant retranché du plus grand de façon réitérée et en alternance, si le reste ne mesure jamais [le reste] précédent jusqu'à ce qu'il reste une unité, les nombres initiaux seront premiers entre eux.

Euclide VII 2 :
Etant donnés deux nombres non premiers entre eux, trouver leur plus grande commune mesure.

C'est pourquoi la méthode proposée n'est rien d'autre que ce qu'aujourd'hui nous appelons **algorithme d'Euclide**, à cette nuance près qu'ici il est appliqué aux grandeurs au lieu de l'être aux nombres.

6 Ibid. Vol. 2 p. 290 et 291.

Nous la présentons sous la forme modernisée suivante :

Soient G et g les deux grandeurs ; $G > g$

$G = gq_1 + R_1$ avec q_1 nombre entier et R_1 grandeur, $R_1 < g$
$g = R_1q_2 + R_2$ avec q_2 nombre entier et R_2 grandeur, $R_2 < R_1$
....
$R_{n-2} = R_{n-1}q_n + R_n$ avec q_n nombre entier et $R_n < R_{n-1}$

$G > g > R_1 > R_2 > ... > R_{n-1} > R_n$

- ou bien il existe n tel que R_n soit nul (et R_{n-1} non nul) ; alors G et g sont commensurables et R_{n-1} est une commune mesure.
- ou bien un tel n n'existe pas et alors G et g sont incommensurables.

2. Vers le concept de nombre réel.

Puisque dans le cas commensurable nous savons associer un nombre (rationnel) au rapport des deux longueurs qui mesurent les côtés du rectangle, pourquoi ne pas associer aussi un nombre aux rapports de côtés incommensurables ? Par exemple dans le cas du carré et de sa diagonale on a : $d^2 = 2a^2$ ou $\frac{2a}{d} = \frac{d}{a}$

Pourquoi ne pas représenter ce rapport par un symbole tel que $\sqrt{2}$, signifiant « le côté d'un carré mesurant deux fois un carré unité » ? Ou plus simplement encore : **nombre dont le carré vaut deux,** puisque l'existence d'un tel nombre peut être postulée par le fait qu'il mesure le côté d'un carré bien défini. Mais comme ce nombre ne peut être écrit par un rapport de deux entiers, nous le qualifierons

d'irrationnel, qui traduit le grec αλογον (alogon) lequel signifie qu'on ne peut ni l'écrire ni le penser comme un rapport de nombres (entiers). Le fait de considérer un tel rapport comme un nombre à part entière permet de lui appliquer les règles de calcul ordinaire sur les nombres. Montrons comment, en reprenant le problème de la construction d'un pentagone régulier, par une autre méthode inspirée des algébristes arabes, en particulier, Abu'l – Gùd au Xe/XIe siècle.

Le pentagone.

En reprenant la figure d'Euclide, pour construire un pentagone régulier, il suffit de savoir construire un triangle isocèle ABC dont les angles à la base sont le double de l'angle au sommet.

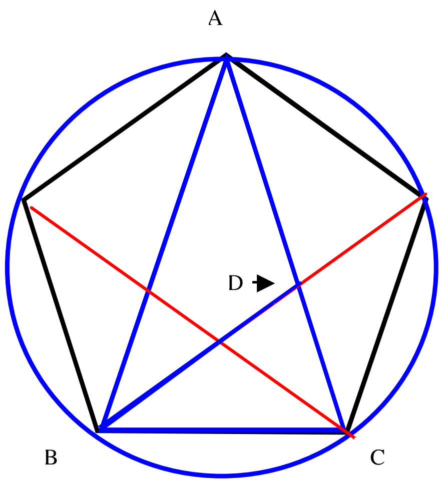


Figure 27

La bissectrice de l'angle B coupe le côté [AC] en D, et alors le triangle BDC est isocèle et semblable au triangle ABC. Désignons par x le rapport $\frac{BC}{AB}$.

Alors $\frac{BC}{AB} = \frac{CD}{BC}$, donc en faisant le produit des deux rapports, on obtient :

$$\frac{CD}{AB} = \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = x^2.$$

Mais comme

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AD + DC}{AB} = \frac{BC + DC}{AB} = 1,$$

cela se traduit par une équation que vérifie x : $\mathbf{x^2 + x = 1}$ dont l'unique solution positive est $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{BC}{AB} = \frac{CD}{BC}$.

Comme AD = BC, et AB = AC, la dernière égalité correspond à $CD \times CA = DA^2$ ce qui équivaut à la relation étudiée dans l'application au lemme 2, à la dénomination des points près : $BC \times BA = CA^2$.

Dans cette figure, si AB est pris pour

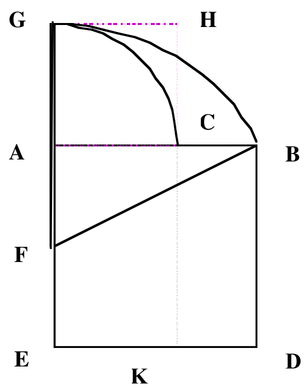


Figure 28

unité, alors $AC = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. On a ainsi pu construire un segment de longueur égale à ce nombre irrationnel, et donc lui donner une *réalité*. Le lecteur intéressé trouvera une étude approfondie sur la manière d'enseigner cette problèmatique au collège dans l'article de Dominique Bénard paru dans *Repères IREM* n° 47 : *Nombres et calculs au collège : instituer une cohérence.*

En conclusion.

Dans son article : *Les Mathématiques « modernes » : une erreur pédagogique et philosophique ?* René Thom faisait observer, — avec un sentiment de regret ? — que : *Peut-être la géométrie euclidienne est-elle, comme la version latine, un de ces exercices nobles et désuets, réservés à une élite, et incompatibles avec un enseignement de masse.* Il a sans doute raison pour ce qui concerne l'enseignement à dominante géométrique tel qu'il était pratiqué jusqu' au milieu des années 60. Depuis, le contexte de l'enseignement des mathématiques a été profondément bouleversé par le développement des outils électroniques de calcul. Ceux-ci permettent d'accompagner et d'expérimenter la numérisation et l'algébrisation théorique des mathématiques telles qu'elles s'étaient imposées au XIXème siècle et que nous avons évoquées plus haut, à la fin de la première partie. Le fait de disposer de ces outils a permis d'explorer sur le plan didactique des nouveaux chapitres plus proches des préoccupations pratiques, comme l'étude des fonctions, des suites numériques, de la statistique. L'analyse devenait la discipline reine dans l'enseignement, au moins à partir du lycée, comme elle était devenu la discipline dominante des mathématiques pures aussi bien qu'appliquées, à la fin du XIXème siècle. Mais avant de pouvoir faire de l'analyse, il faut disposer déjà d'une profonde connaissance du concept de nombre réel, ainsi que d'une solide capacité de raisonnement logique. Ces qualités ne sont pas innées ; comment l'élève les acquérera-t-il ? Nous avons tenté d'explorer deux pistes que nous pensons pouvoir être adaptées à l'enseignement élémentaire, au collège et au premières classes du lycée : l'une pour le raisonnement et la démonstration, l'autre pour une approche du concept de réel qui en manifeste la nécessité d'une compréhension et d'une appropriation en termes de processus infinitaires. Nous pensons que l'ancrage de ces explorations dans un donné géométrique et intuitif sous-jacent en permet l'acquisition par le plus grand nombre ; nous avons la naïveté de croire qu'elles préservent la possibilité d'un réel enseignement mathématique de masse. Euclide n'est alors plus qu'un prétexte à initialiser une réflexion, au même titre que les philosophes grecs tels Aristote ou Platon. Rappelons que contrairement à ce qui est donné d'habitude, le titre de son ouvrage majeur n'est pas *Les Éléments,* mais bien *L'Enseignement des Éléments.*

Bibliographie

Euclide, *Les Éléments,* traduction et commentaires par Bernard Vitrac, PUF, Bibliothèque d'histoire des sciences, particulièrement le volume I (Livres I à IV : Géométrie plane), 1990

Les Œuvres d'Euclide, traduites littéralement par F. Peyrard, nouveau tirage, Librairie Albert Blanchard, 1993

Dans Repères – Irem

— **n° 31**, *Les aires, outil heuristique, outil démonstratif,* par JP. Friedelmeyer, Irem de Strasbourg

— **n° 44**, *Des aires sans mesure à la mesure des aires,* par F. Chamontin, B. Cazier, M. Picot, Irem de Lille

Grandeurs et nombres, l'histoire édifiante d'un couple fécond, par JP. Friedelmeyer.

— **n° 47,** *Nombres et calculs au collège : instituer une cohérence,* par Dominique Bénard, Iem du Mans

Mathématiques au collège, les enjeux d'un enseignement pour tous ; Actes du colloque Inter-IREM Premier cycle (Lille, 21 – 23 juin 1999) – Irem de Lille éditeur ; Particulièrement les articles :

— *La mesure des grandeurs au collège : une préparation à l'apprentissage de l'analyse ;* JP Friedelmeyer.

— *Le geste géométrique, ou l'acte de démontrer ;* par JC. Duperret.

— *Du raisonnement à la démonstration ;* par R. Bkouche.

— *Marivaudage géométrique sans mesure ;* par M. Janvier