DEVOIR DE CONTRÔLE ET AIDE INDIVIDUALISÉE

Claudine VERGNE
Irem de Montpellier

Quand quelque chose marche,
il faut le faire connaître.
Guy Brousseau
Séminaire IUFM /
Irem Montpellier mai 2002

Même dans le métier d'enseignant, il est des instants privilégiés ! J'ai connu un de ces instants avec une classe de 1èreSTT, lors d'une expérience menée en classe à la fin de l'année scolaire 2001-2002, dont je relate ci-dessous le déroulement.

1. Mise en place

Nous sommes au mois de mai. Il « faut » faire un devoir de contrôle. Une quinzaine de jours à l'avance, le professeur et les élèves se mettent d'accord sur le choix d'une date.

— *Professeur :* J'aimerais que nous fassions ensemble l'expérience d'un devoir de contrôle un peu inhabituel, qui, je pense, devrait présenter pour vous des avantages. Toutefois, nous ne pourrons le faire que si tous les élèves de la classe sont d'accord. Voilà ce que je vous propose :

- Les élèves font un devoir en classe en temps limité ; chacun travaille pour soi ; les élèves n'ont pas le droit de communiquer entre eux.
- Les copies seront relevées, notées et les notes compteront dans le calcul de la moyenne.
- Quand un élève a besoin d'aide, il peut appeler le professeur et lui poser une question. Le professeur répond de manière individuelle.

Avez-vous des questions ?

— *Céline :* Est-ce qu'on aura le droit de regarder le cours ou le livre ?

— *Professeur, s'adressant à toute la classe* : Qu'en pensez-vous ?

— *Un élève :* Ce serait logique qu'on ait le droit de le faire !

Les élèves acquiescent, le professeur rajoute donc la clause suivante :

- Les élèves ont le droit de consulter leur classeur ou leur livre.

2. Première expérimentation

Le jour fixé, le professeur distribue un sujet et les élèves se mettent au travail. Ils ont tous apporté leur classeur, ce qui est exceptionnel et certains, dont Céline, ont même apporté leur livre, ce qui l'est plus encore.

Le sujet, prévu pour deux heures, se veut un devoir de synthèse, il comporte deux exercices et un problème (cf. Annexe 1).

Le professeur est très sollicité. Les échanges se font à voix basse, pour ne pas gêner les autres élèves qui sont en train de travailler. Beaucoup de questions concernent la vérification de résultats, d'autres sont relatives à la compréhension de l'énoncé.

— Madame, avant de continuer, est ce que le tableau des effectifs est juste ? (Annexe 1/ Problème 1)
— Oui, c'est correct.

— Madame, est-ce que c'est bien ça qu'il faut trouver pour p_1, p_2, p_3 ? (Annexe 1/ Exercice 2.1)
— Oui, c'est juste, continue.

— Est-ce que « en 2012 «, ça veut dire que n égale 12 ? (Annexe I / Exercice 2.3)
— Non, quand n = 0, on est en 1997 ; quand n = 1, on est en 1998 ; quand n= 2, …

— Ah, alors, il faut compter !
— Oui, continue.

— Madame, est ce que le tableau de variation est juste ?
— Non, ce n'est pas ça. *Le professeur lit la copie*. L'expression de la dérivée est fausse ; reprends à partir de là.

— Qu'est ce que c'est, la nature d'une suite ?
— En fait, on te demande si la suite est arithmétique, géométrique ou ni l'un ni l'autre.
— Ah, c'est ça que ça veut dire, mais alors, je sais le faire !

— Déterminer la fonction dérivée B', ça veut dire calculer la dérivée ?
— Oui, tout à fait.

La deuxième partie du problème (Annexe 1 / Exercice 1 Partie B) concerne une question qu'il n'a jamais été possible d'aborder auparavant : un peu trop délicate pour être posée en devoir de contrôle classique, elle avait été proposée en devoir maison mais laissée de côté par les élèves.

« L'artisan vend les pièces fabriquées au prix unitaire de 247 francs. Quel est le prix de vente de x pièces ? » est très déroutant pour les élèves et tous ceux qui abordent la question appellent le professeur : pour certains ça paraît « idiot », c'est évident, d'autres ne comprennent pas du tout ce qui est attendu comme réponse. Jean a dressé un tableau où apparaissent des valeurs de x et les valeurs correspondantes des prix de vente ; en dialoguant avec le professeur, il découvre qu'il peut « faire beaucoup plus court» en écrivant $247x$ et que « x, ça sert à ça ! ».

La formule « bénéfice est égal à recette moins coût », étudiée en économie et gestion, a beaucoup de mal à sortir en mathématiques et le professeur est très souvent appelé pour la question 1 B 2, mais ceux qui arrivent à dépasser ce point s'aperçoivent que l'on retrouve la fonction étudiée à la première partie.

— *Yasmine :* Madame, c'est bizarre, je retrouve comme au début, je dois recommencer deux fois la même chose ?
— *Professeur :* L'énoncé de la question I B 2 t'annonce justement que tu dois trouver la même fonction, tu ne dois pas tout recommencer mais au contraire utiliser ce que tu sais déjà sur cette fonction.

Jean est très étonné lui aussi de découvrir que la partie A peut être réinvestie en B et qu'en se servant de ce que l'on a fait auparavant, on peut répondre très vite aux dernières questions du problème ; pour lui, « c'est super ! ».

A une exception près, les élèves sont très concentrés et s'impliquent dans leur travail. Seul, Pierre, adossé au mur, attend que « ça passe » ; c'est son attitude habituelle.

Quelques élèves ont du mal à comprendre qu'il s'agit d'un travail autonome et ont tendance à demander des informations au voisin. Les élèves en très grande difficulté ne posent aucune question.

Les copies sont relevées, corrigées par le professeur, notées. Le cours suivant, les élèves sont très étonnés de ne pas tous avoir 18 ! Le professeur a eu un peu plus d'exigences que d'habitude, certes, mais par ailleurs, certains n'ont pas traité la totalité des questions, d'autres ont fait des erreurs et, n'ayant pas appelé le professeur pour vérification, ont rendu des réponses fausses. On peut consulter en annexe 2 un tableau donnant les notes obtenues par les élèves à ce devoir, précédées, pour comparaison, des moyennes annuelles antérieures.

Une élève, très faible, n'a jamais appelé le professeur mais s'est informée auprès de ses voisins ; son devoir a reçu la note 10 ; il est clair que dans ce cas, le dispositif n'a pas engagé l'élève dans une réelle activité mathématique.

Deux autres élèves, ont travaillé ensemble comme ils le font d'habitude lors de recherche d'exercices ; l'un posait des questions au professeur lorsque cela s'avérait nécessaire et apparemment les réponses servaient aux deux ; ces deux élèves ont rendu des copies assez semblables avec un exercice de probabilité faux et ont perdu des points par rapport à leurs prestations habituelles.

Après correction du devoir, le professeur demande aux élèves de rédiger sur une feuille de papier, de manière anonyme, leur point de vue sur cette expérience. Voici les réponses de quelques élèves :

- *Cela permet d'aider les plus faibles.*
- *Cette forme de travail m'a plu car lorsque nous avions un problème, à la place de bloquer, on demandait et on trouvait plus facilement l'erreur.*
- *Ce serait bien de le faire plus souvent car il y a des choses qu'on comprend pas en cours, qu'on peut comprendre en faisant ce genre d'exercice.*
- *J'ai pu comprendre certains points que je n'arrivais pas à faire.*
- *Ça aide ceux qui n'ont pas réussi certain devoir à mieux comprendre puisqu'ils ne refont pas les mêmes erreurs qu'au devoir précédent.*
- *Ce devoir était intéressant car il permettait de savoir si nous avions bien compris les*

leçons ainsi que toutes les formules qui allaient avec.

- *Bonne manière de travailler, cela nous entraîne pour le bac.*
- *Cette méthode permet à la fois de réviser, d'apprendre, de s'évaluer, donc ce n'est pas mal.*
- *Cela permet de réviser tout en ayant une chance supplémentaire d'avoir de bonnes notes.*
- *Concentration plus facile. Plus captivant que deux heures de cours normaux.*
- *Cela restera une note qui reflète peu le niveau de l'élève puisqu'il est aidé.*
- *Pierre : Je n'ai pas aimé. Il fallait se replonger dans de vieux cours. J'ai eu du mal à voir quelle leçon allait avec quel exercice. De plus (ça c'est personnel) je préfère les contrôles classiques, une leçon, des exos sur cette leçon.*

Un des mots qui revient le plus souvent dans les réponses des élèves est le mot « *comprendre* ».

Les élèves et le professeur s'accordent pour renouveler l'expérience deux semaines plus tard.

3. Deuxième expérimentation

Dans la même classe, le professeur propose cette fois un sujet prévu pour une heure (cf. Annexe 3). Le dispositif est le même. Les élèves travaillent avec concentration.

Sachant qu'en cas de doute, les élèves pourront être épaulés, le professeur s'est permis de proposer un sujet qui présente une petite rupture de contrat : la dérivée de la fonction à étudier est de manière évidente positive et la fonction est strictement croissante sur l'intervalle d'étude. Les élèves sont de prime abord déstabilisés parce que ce n'est pas « comme d'habitude » mais, une fois rassurés, très étonnés aussi que se soit « si facile ».

A la fin de la séance, ça sonne, les élèves ne bougent pas.

— Professeur : mes enfants, c'est l'heure, vous devez aller au cours suivant.
— Plusieurs élèves : mais Madame, on n'a pas fini le devoir !
— Professeur : Et vous voulez **vraiment** le finir ?
— Plusieurs élèves : Oui !

Alors là, le professeur est sur un nuage ! Les élèves de 1èreSTT veulent terminer leur devoir de maths !

— Professeur : Bien ; dans ce cas, je ramasse les copies, au prochain cours, je vous les redonnerai et vous finirez le travail.

Le cours suivant, les élèves terminent le problème commencé. Les plus avancés dans la rédaction ont eu un deuxième exercice à chercher.

4. Troisième expérimentation

Le professeur propose le même dispositif dans une classe de Terminale S, fin mai. Le sujet proposé est un sujet de type bac, en quatre heures (cf. Annexe 4).

Les élèves travaillent de façon très concentrée, il y a beaucoup moins de questions qu'en 1èreSTT. Certaines portent sur la rédaction « est-ce que ça va bien si je rédige comme ça ? », d'autres sur le début de l'exercice de probabilités : « Est-ce que j'ai bien démarré ? ». Dans le problème, il y a une question que le professeur estime difficile (Annexe 4 / Problème

A 3a.). Ceux qui l'abordent et demandent de l'aide sont prévenus que les explications prendront quelques minutes, trois d'entre eux confirment leur demande et reçoivent des explications détaillées, les autres préfèrent sauter la question et gérer leur temps autrement.

Quand la sonnerie retentit au bout de quatre heures, les élèves sont toujours très concentrés, ils ne quittent la salle qu'après injonction du professeur.

Une élève, qui a beaucoup progressé dans l'année, avait décidé de ne pas profiter du dispositif et de se mettre dans des conditions d'examen. L'élève le plus en difficulté de la classe n'a posé aucune question et a obtenu une note très faible.

Après correction du devoir, le professeur demande aux élèves de rédiger sur une feuille de papier, de manière anonyme, leur point de vue sur cette expérience.

- *J'ai trouvé que c'était intéressant car on pouvait voir sur quels points on bloquait et avoir les renseignements pour nous permettre de continuer.*
- *Le fait d'avoir le cours et la possibilité de vous demander des renseignements permet de voir des choses dont on ne s'aperçoit pas forcément en temps normal.*
- *Il y avait des points non vus pendant l'année, ce qui nous a permis d'améliorer nos connaissances et notre savoir de réflexion, c'était cool !!!*
- *Très bonne idée même si je préfère travailler seule.*
- *Cette organisation est un bon moyen de révisions, ça aurait dû être fait plus tôt. Satisfait. (signé Samuel)*

5. Bilan et perspectives

A l'origine de cette expérience, il y avait le constat de la pauvreté des contenus et du temps perdu en évaluation dans les classes faibles et hétérogènes. En effet, pour que la distribution des notes soit à peu près acceptable, l'enseignant est souvent amener à poser des sujets stéréotypés : les bons élèves les traitent en quelques minutes et n'apprennent rien de neuf, les plus faibles ne les traitent pas, « sèchent » et n'apprennent rien non plus.

L'objectif du professeur était que chaque élève puisse progresser dans ses connaissances, à son rythme et à son niveau. L'amélioration des notes n'était pas un objectif du professeur mais cet aspect est très important pour les élèves et l'espoir d'obtenir une bonne note est très motivant pour la plupart d'entre eux.

L'aspect individuel et même confidentiel de l'aide apportée est évident : chaque élève peut poser ses questions, au moment où il en a besoin, et quelle qu'en soit la nature, sans craindre un jugement du groupe classe sur la nature des lacunes ou incompréhensions que ces questions révèlent. Pour le professeur, certaines sont inattendues et peuvent paraître naïves mais elles sont authentiques et de ce fait apportent des renseignements précieux sur la nature des difficultés des élèves.

La distance entre les questions que se posent les élèves en situation cruciale pour eux et les réponses apportées étant considérablement réduites, les outils mathématiques, éventuellement (re)découverts ou affinés, peuvent être utilisés à bon escient et prendre sens. Il semble par exemple que pour Jean, en 1èreSTT, un premier court dialogue ait permis une vraie « première rencontre » (au sens de Chevallard) avec les notions de fonction et de variable et un deuxième ait favorisé une prise de conscience de certains aspects du jeu mathématique scolaire. Pour lui comme pour d'autres, il est apparu que :

- ce que l'on apprend en cours va pouvoir être réutilisé comme outil pour répondre à de nouvelles questions
- dans un problème, les questions successives sont enchaînées et peuvent viser un objectif global (étudier un phénomène par exemple).

Ces éléments du contrat, implicites parce qu'évidents pour le professeur semblent avoir été inconnus ou oubliés par certains élèves.

Le dispositif permet d'éliminer de nombreux parasites de l'activité mathématique scolaire : incompréhension de l'énoncé, malentendus, faux contrats, résultats intermédiaires erronés, qui souvent contribuent au découragement et à la perte totale du sens de l'activité mathématique chez les élèves en difficulté.

La possibilité d'une aide individualisée permet de poser des sujets variés, non stéréotypés, plus difficiles, comportant des phases de recherches ou de découverte ce qui de fait confère un intérêt supplémentaire au travail proposé en évaluation et permet aux meilleurs élèves d'exprimer et d'exploiter leurs qualités.

Le professeur a été très surpris de devoir, lors des trois expérimentations, demander avec insistance aux élèves de quitter la salle à la fin du temps imparti alors que, dans ces mêmes classes, lors de contrôles classiques, certains élèves semblaient avoir pour seul souci de quitter la salle le plus tôt possible. Le temps consacré à l'évaluation, loin d'être gaspillé, semble être devenu du temps d'apprentissage effectif pour la plupart.

Le dispositif préserve l'autonomie et l'initiative des élèves : il n'est répondu qu'aux questions posées, l'aide consiste à relancer l'activité de l'élève et non pas à lui donner des réponses toutes faites. Il est à noter que les élèves les plus en difficulté ne posent pas de questions, cela confirme l'idée que, pour formuler des questions, il faut déjà avoir des connaissances et que (se) poser des questions fait partie de l'activité mathématique.

Dans l'apparent succès de l'expérience, on peut bien sûr se demander quelle est la part due à l'attrait de la nouveauté, au calendrier, à la relation établie entre professeur et élèves.

L'emploi trop systématique du dispositif engendrerait peut-être des effets tels que désaffection, moindre écoute en classe, etc.… non observés ici mais qui méritent d'être étudiés.

Toutefois, il semble que ce dispositif puisse constituer une alternative intéressante dans les classes faibles pour restaurer le sens de l'activité mathématique chez les élèves en grande difficulté, dans les classes hétérogènes pour gérer les différences de niveau tout en garantissant à chacun un minimum de réussite, dans les classes d'examen pour des révisions personnalisées.

Quelle place peut-on lui accorder dans les différentes formes de travaux proposés à une classe ? D'autres expérimentations et des échanges entre collègues intéressés permettraient d'apporter des éléments de réponse…

ANNEXE 1

Exercice 1

Le but de ce problème est d'étudier le bénéfice réalisé chaque jour par un artisan en fonction de la production

Soit (O ; i, j) un repère orthogonal du plan. On choisira sur l'axe des abscisses 1 cm pour 1 unité, en commençant la graduation à 10 cm. Sur l'axe des ordonnées 1 cm représente 100 francs.

Partie A

Soit B la fonction définie sur l'intervalle [10 ; 25] par :

$$B(x) = - x^3 + 30 x^2 - 153 x$$

1. Déterminer la fonction dérivée B' de la fonction B.

2. Etudier le signe de la fonction B' sur l'intervalle [10 ; 25]. En déduire le tableau de variation de la fonction B sur l'intervalle [10 ; 25].

3. Recopier et compléter le tableau suivant :

x	10	15	20	23	25
B(x)					

Placer dans le repère (O ; i, j) les points correspondant à ce tableau puis tracer la courbe représentative de la fonction B.

Partie B

Un artisan a observé que pour un produit donné le coût total C, en francs, de sa production varie en fonction de la quantité x de pièces produites chaque jour, de la façon suivante :

$$C(x) = x^3 - 30 x^2 + 400 x$$

x est un entier compris entre 10 et 25.

L'artisan vend les pièces fabriquées au prix unitaire de 247 francs.

1. Quel est le prix de vente de x pièces ?

2. Montrer que le bénéfice réalisé pour x pièces fabriquées et vendues est B(x), où B est la fonction étudiée dans la partie A

3. Pour combien de pièces fabriquées et vendues l'artisan réalise-t-il un bénéfice maximal ?

4. Quel est ce bénéfice maximum ? Quel est le bénéfice réalisé alors sur une pièce vendue ?

5. Par lecture graphique, déterminer le nombre de pièces que doit vendre l'artisan s'il veut gagner au moins 1 000 F.

Exercice 2

La population d'une ville augmente de 2 % chaque année.

En 1997 elle compte 180 000 habitants.

On note p_0 la population en 1997 et p_n la population n années après.

1 . Calculer p_1 , p_2 , et p_3 .

2 . Quelle est la nature de la suite (p_n) ? En déduire l'expression de p_n en fonction de p_0 et de n.

3 . Calculer la population de la ville en 2012.

4 . A l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien d'années la population de la ville aura doublé.

Problème

Une enquête vient d'être effectuée auprès des 1800 élèves d'un lycée (comportant 850 garçons) pour savoir comment ils prévoient de fêter le passage à l'an 2000 :
— Les garçons qui passeront le réveillon du 31 décembre 1999 chez leurs parents représentent 10% des élèves du lycée,
— 150 élèves, parmi lesquels 130 filles, iront au restaurant,
— Les 2/3 des élèves passeront le réveillon chez des amis.

1 . Recopier et compléter le tableau des effectifs suivant :

Sexe / *Réveillon*	Garçons	Filles	Total
Chez les parents			
Chez des amis			
Au restaurant		130	
Total			1 800

2 . Le 1er janvier 2 000, on croise dans la rue un élève de ce lycée. En supposant que les prévisions de l'enquête seront respectées et que chaque élève a la même probabilité d'être rencontré, calculer les probabilités des évènements suivants (arrondis au centième) /
A : « L'élève est une fille »,
B : « L'élève a passé le réveillon chez ses parents »,
C : « L'élève est une fille qui a passé le réveillon chez ses parents »,
D : « L'élève est une fille ou a passé le réveillon chez ses parents ».

3 . Ce même jour, on croise dans la rue un garçon de ce lycée. Calculer la probabilité pour qu'il ait passé le réveillon chez ses parents

ANNEXE 2

	Moyenne antérieure	Note au DCAI		Moyenne antérieure	Note au DCAI
élève 1	10	13	élève 17	10,6	9
élève 2	10	ABS	élève 18	5	9
élève 3	8,6	14	élève 19	10,8	14
élève 4	8,8	9	élève 20	5,8	6
élève 5	13	9	élève 21	15,6	19
élève 6	7,4	11	élève 22	13,6	13
élève 7	10,4	18	élève 23	8,2	11
élève 8	8,6	10	élève 24	3,8	10
élève 9	6	8	élève 25	6,8	6
élève 10	13,4	13	élève 26	9,2	ABS
élève 11	10,4	11	élève 27	15,4	18
élève 12	12,4	12	élève 28	13,2	19
élève 13	6,4	8	élève 29	9,4	12
élève 14	6,2	7	élève 30	11,8	10
élève 15	9,4	12	élève 31	11,8	11
élève 16	10,2	ABS	élève 32	10,8	9

ANNEXE 3

Une entreprise fabrique un produit d'entretien. Le coût global de production de x litres de ce produit est donné, en francs, par : $C(x) = \dfrac{50x}{x + 10}$; $0 \leq x \leq 50$.

1) Quel est le coût de production pour 10 litres ? Pour 40 litres ?
2) Calculer $C'(x)$
3) Etudier les variations de la fonction C. Dresser son tableau de variation.
4) Etudier la courbe représentative de C dans le plan muni d'un repère orthogonal ; en abscisse 1 cm pour 5 litres, en ordonnée 1 cm pour 5 Francs
5) On note V(x) le prix de vente de x litres. Sachant que le prix de vente d'un litre de pro duit est de 2F, donner l'expression de V(x). Construire la courbe représentative de V sur le graphique précédent.
6) L'entreprise vend toute sa production
   a) Déterminer graphiquement à partir de quelle production l'entreprise réalise un bénéfice.
   b) Quel est le bénéfice maximum qu'elle peut espérer ?
7) On note B(x) le bénéfice obtenu pour x litres de produit fabriqués et vendus. Donner l'ex pression de B(x).Retrouver par le calcul la réponse à la question 6a).

ANNEXE 4

Exercice 1 Polynésie – Juin 2000 – Série S 5 points

Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher :
4 jetons blancs marqués 0 ;
3 jetons rouges marqués 7 ;
2 jetons blancs marqués 2 ;
1 jeton rouge marqué 5.

1. On tire simultanément 4 jetons du sac.
Quel est le nombre de tirages possibles. (0,5 point)

2. On suppose que tous les tirages sont équiprobables, et on considère les événements suivants :
A : « Les quatre numéros sont identiques ».
B : « Avec les jetons tirés, on peut former le nombre 2000 ».
C : « Tous les jetons sont blancs ».
D : « Tous les jetons sont de la même couleur ».
E : « Au moins un jeton porte un numéro différent des autres ».

a) Montrer que la probabilité de l'événement B est 4/105. (0,5 point)

b) Calculez la probabilité des événements A, C, D, E. (1,5 point)

c) On suppose que l'événement C est réalisé, calculer alors la probabilité de l'événement B. (0,5 point)

3. On établit la règle de jeu suivante :
— Si le joueur peut former 5 000, il gagne 75 F.
— Si le joueur peut former le nombre 7 000, il gagne 50 F .
— Si le joueur peut former le nombre 2 000, il gagne 20 F.
— Si le joueur peur former le nombre 0000, il perd 25 F.
— Pour tous les autres tirages, il perd 5 F.

G est la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

Etablir la loi de probabilité de G et calculer l'espérance mathématique de G. (1,5+0,5 points)

Exercice 2 Bac national 2001 (Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthogonal direct (O ; i, j) [unité graphique : 6 cm].

On considère la suite (α_n) de nombres réels définie par $\alpha_0 = \pi/2$ et, pour tout entier naturel n, $\alpha_{n+1} = \alpha_n + 5\pi/6$. Pour tout entier naturel n, on appelle M_n le point du cercle C de centre

O de rayon 1 tel que l'angle (Ox , $\overrightarrow{OM_n}$) ait pour mesure α_n .

1. Placer les douze points M_0 , M_1 , M_2 , ... , M_{11} .
2. On appelle z_n l'affixe de M_n .

   Montrer que pour tout entier naturel n, on a l'égalité $z_n = e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6})}$.

3. *a*. Montrer pour tout entier nature *n,* les propriétés suivantes :
   — les points M_n et M_{n+6} sont diamétralement opposés ;
   — les points M_n et M_{n+12} sont confondus.

   b. Monter pour tout entier nature *n,* on a l'égalité $z_{n+4} = e^{-\frac{2i\pi}{3}} z_n$. En déduire que la distance M_nM_{n+4} vaut $\sqrt{3}$ puis que le triangle $M_nM_{n+4}M_{n+8}$ est équilatéral.

On admettra que tous les triangles équilatéraux ayant pour sommets des points M_n sont de la forme $M_nM_{n+4}M_{n+8}$.

4. Douze cartons indiscernables au toucher, marqués M_0 , M_1 , M_2 , ... , M_{11} sont disposés dans une urne. On tire au hasard et simultanément trois cartons de l'urne. Calculer la probabilité d'obtenir les trois sommets d'un triangle équilatéral.

Problème Asie – Juin 1999 – Série S 11 points

L'objet de ce problème est de résoudre une équation différentielle, d'en étudier une fonction solution et de calculer des aires.

A. Résolution de l'équation différentielle (E) : y' + y = x – 1

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_1^x e^t (t-1)\, dt$ (1point)

2. a) Soit z une fonction dérivable sur l'ensemble **R** des nombres réels. On pose :

$$f(x) = z(x)\, e^{-x}$$

   Montrer que la fonction f est solution de (E) si, et seulement si, pour tout x de **R** ,

$$z'(x) = e^x (x-1). \qquad \text{(1 point)}$$

   b) A l'aide de la première question, déterminer toutes les fonctions z vérifiant, pour tout x de **R** , $z'(x) = e^x (x-1)$. (0,5 point)

3. a) Déduire de la question précédente les solutions de (E). (0,5 point)
   b) Déterminer la solution de (E) pour laquelle l'image de 1 est 0. (0,5 point)

B. Etude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur **R** par $f(x) = x - 2 + e^{1-x}$. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(0 , i, j)$ (unité graphique : 1cm).

On désigne par (C_f) la courbe représentative de f..

1. a) Etudier le sens de variation de f. (1 point)

   b) Préciser $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ et m $\lim_{x \to \infty} f(x)$ (1 point)

2. a) Montrer que la droite (D) , d'équation $y = x - 2$, est asymptote à la courbe (C_f). (1 point)

   b) Préciser la position de (C_f) par rapport à (D). (0,5 point)

3. Tracer (D) et (C_f) (1 point)

C. Calcul d'aires.

Soit x_0 un nombre réel strictement positif.

1. On considère le domaine limité par la courbe (C_f), son asymptote (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = x_0$.
Exprimer, à l'aide de x_0 , l'aire S_1 , de ce domaine. (0,5 point)

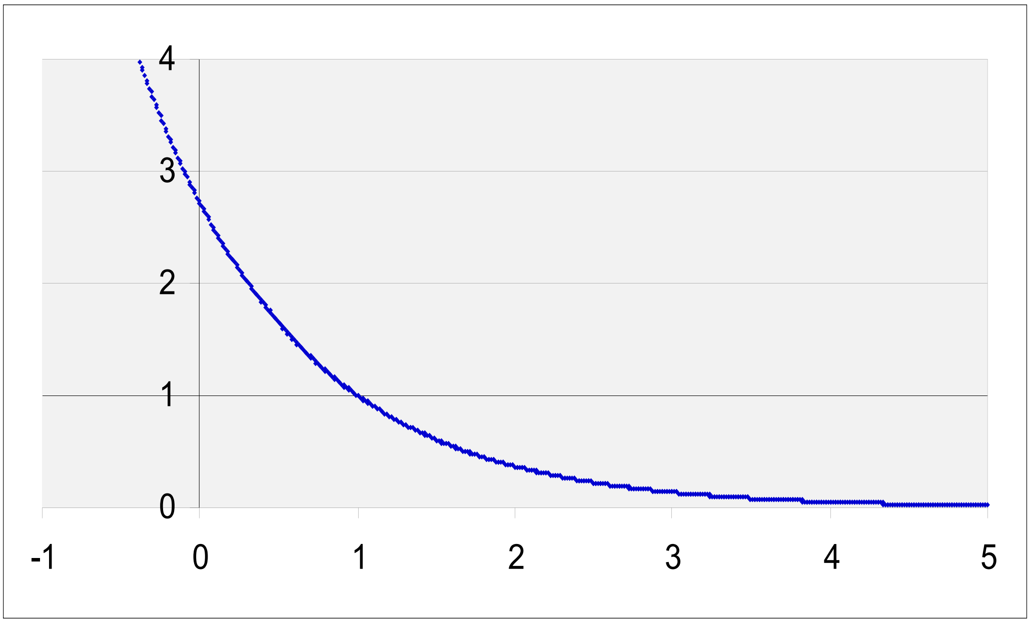
2. On considère la fonction g, définie sur **R** par $g(x) = e^{1-x}$ dont on trouvera la courbe représentative (C_g) en annexe. Donner une interprétation, en terme d'aire, de l'intégrale ayant servi au calcul de S_1 à l'aide de la courbe (C_g) . (0,5 point)

3. A est le point de coordonnées $(x_0 ; 0)$. B est le point de la courbe (C_g) d'abscisse x_0 .
Soit (T) la tangente à la courbe T au point d'abscisse x_0 . C est le point d'intersection de (C_g) et de l'axe des abscisses.
Déterminer les coordonnées de C. (1 point)

4. Calculer (en unités d'aire) l'aire S_2 du triangle ABC. (0,5 point)
Vérifier que $S_1 + 2 S_2 = 0$. (0,5 point)

Annexe page suivante

Courbe représentative (C_g) de la fonction g, définie sur **R** par $g(x) = e^{1-x}$



Bibliographie

BKOUCHE R., CHARLOT B., ROUCHE N.(1991) Faire des mathématiques: le plaisir du sens. A*rmand Colin.*

BROUSSEAU G. (1986) Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques,* Vol 7 n°2, La Pensée sauvage, Grenoble.

CHEVALLARD Y. (1998) Analyse des pratiques enseignantes et didactiques des mathématiques : l'approche anthropologique. *Actes de l'université d'été* de La Rochelle 4 au 11 juillet 1998. IREM de Clermont-Ferrand.

DOUADY R. (1984) Jeux de cadres et Dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques,* Vol 7 n°2, La Pensée sauvage, Grenoble.

MERCIER A. (1992) L'élève et les contraintes temporelles de l'enseignement, un cas en calcul algébrique. *Thèse*, Université de Bordeaux.