MATHEMATIQUES ET ECONOMIE : JE T'AIME, MOI NON PLUS

Louis-Marie BONNEVAL
Irem de Poitiers

Les programmes de mathématiques en filière ES [1] s'intitulaient en 1993-1994 : « Mathématiques appliquées aux sciences économiques et sociales ». Ce libellé témoignait d'une triple volonté, novatrice et progressiste à l'époque :

— concevoir pour les élèves de cette filière un programme de mathématiques spécifique qui ne soit pas un simple extrait du programme de S ;

— éviter l'abstraction gratuite en répondant à des problèmes qu'étaient censés se poser les utilisateurs, en l'occurrence les économistes ;

— mieux armer les bacheliers ES en vue d'études de sciences économiques auxquelles les destinait a priori leur profil de formation.

L'intitulé du programme est désormais redevenu sobrement « Mathématiques ». C'est à mon sens une bonne chose, car réduire les mathématiques à un seul de leurs domaines d'application minimise leur portée, réduit leur aspect formateur, et peut susciter des effets pervers [2]. Cependant les excellentes intentions évoquées ci-dessus subsistent : en témoigne par exemple l'apparition en spécialité des matrices ou des graphes, notions qui ne sont pas abordées en S, dont on préconise l'introduction à partir de problèmes, et qui ont des applications importantes en sciences économiques.

1 Je me limiterai dans cet article à la filière ES, mais il faudrait étudier le cas de la filière STT, où se posent des problèmes spécifiques : élèves souvent en difficulté face aux mathématiques, horaire de mathématiques réduit, profil particulier des enseignants d'économie-gestion …

2 Voir dans Repères-IREM n° 36 (juillet 99) l'article de Martin Zerner «Les sujets de math du bac ES : le jour du bac, tu fais le con».

Mais ces louables intentions ne peuvent masquer la réalité du terrain. Cette réalité recèle un malentendu, voire un malaise, entre les deux disciplines. Cela tient à mon sens à deux raisons principales :

— un débat de fond sur le rôle des mathématiques dans la théorie économique, débat qui s'exprime surtout dans l'enseignement supérieur ;

— une méconnaissance mutuelle des objectifs de chaque discipline, méconnaissance qui apparaît principalement au lycée.

Dans le Supérieur

Les sciences économiques enseignées après le baccalauréat font appel à des notions mathématiques élaborées, que les étudiants ont beaucoup de difficultés à maîtriser lorsqu'ils n'ont pas construit au lycée un ensemble d'images mentales adéquates. Par exemple les problèmes d'optimisation de fonctions de plusieurs variables nécessitent à la fois une fréquentation minimale de la géométrie dans l'espace, une familiarisation avec les matrices, et une bonne maîtrise du calcul différentiel.

Ce qui précède peut être relativisé en observant que peu de bacheliers ES suivent des études de sciences économiques. Mais l'argument est fallacieux, puisque précisément c'est leur niveau mathématique qui pose problème et les détourne de ce type d'études ! On peut penser qu'en améliorant leur formation en mathématiques, et en élevant son niveau, on augmenterait le flux de bacheliers ES s'orientant dans cette voie.

Quoi qu'il en soit, la formation mathématique au lycée ne peut que gagner à une prise de conscience de ses applications ultérieures.

Cependant il faut avoir conscience de ce qu'au niveau de la théorie économique elle-même (des théories, devrait-on dire), le rôle des mathématiques pose problème. En témoigne la polémique qui a agité les milieux universitaires au printemps 2001, et qui reste latente, entre partisans et adversaires de la mathématisation de l'économie. A l'initiative des étudiants de l'ENS, une pétition a circulé dans les facultés de sciences économiques de toute la France, réclamant une rénovation de l'enseignement, qui réduise le rôle des mathématiques au profit des sciences humaines. Cette pétition a suscité un texte de soutien d'un nombre important d'universitaires, texte qui a lui-même engendré un contre-appel d'autres universitaires. On trouvera en annexe de larges extraits de ces deux derniers textes [3].

Pour comprendre ce débat, il est bon de situer les différentes disciplines qui interviennent dans les formations post-bac de sciences économiques et sociales (universités, classes préparatoires, écoles de commerce …) : à côté des enseignement à caractère «littéraire» (économie politique, histoire économique, géographie économique, histoire de la pensée économique, droit, sociologie…), et des enseignements de mathématiques dites «pures», il y a les enseignements où les mathématiques sont fortement présentes : statistiques, micro-économie, macro-économie (cette dernière incluant l'économétrie).

1) Les statistiques

Elles donnent lieu en général à un enseignement séparé du cours de mathématiques,

3 Voir aussi le dossier de Tangente n° 78 (décembre 2001) «L'économie malade des mathématiques».

assuré par des économistes. Il s'agit essentiellement de statistiques inférentielles. Cette branche des statistiques, dont on peut faire remonter les racines à *l'Art de conjecturer* de Jakob Bernoulli (1713), s'est développée aux 18ème et 19ème siècles avec l'apparition de la **loi normale** (de Moivre, Laplace, Gauss), et au 20ème siècle avec l'introduction de l'**estimation** et des **tests** (F. Galton, K. Pearson, W. Gosset, R. Fisher, E. Pearson, J. Neyman …), puis de l'**analyse factorielle**. La maîtrise de ces théories implique des connaissances poussées en théorie de la mesure et de l'intégration. Aussi est il courant d'apprendre à les utiliser en admettant les résultats théoriques. Que cette utilisation soit intelligente exige néanmoins une réflexion rigoureuse que la pratique mathématique devrait permettre d'acquérir. Au lycée, les nouveaux programmes de mathématiques proposent une sensibilisation à ces notions (fluctuation d'échantillonnage, simulation …), ce qui me paraît très utile, à condition que les professeurs de mathématiques en mesurent bien l'enjeu [4]. Il s'agit en effet non pas de développer de fastidieuses techniques de calcul, mais de se donner des instruments pour interpréter des observations et modéliser des situations [5].

2) La micro-économie

C'est la théorie qui utilise le plus d'outils mathématiques élaborés. Issue du courant néo-classique [6], apparu à la fin du 19ème siècle (Walras, Jevons, Menger, Pareto, Cournot …), elle considère l'économie comme la rencontre, sur un marché, de producteurs et de consommateurs, chacun cherchant à maximiser ses intérêts économiques compte tenu de ses contraintes. Il en résulte une demande des consommateurs et une offre des producteurs, qui doivent s'équilibrer. La valeur d'un produit s'identifie alors au prix d'équilibre de ce produit.

Dans cette théorie, le travail apparaît comme un service, autrement dit un bien immatériel. Le travailleur est donc un producteur, qui vend son travail à d'autres producteurs, pour qui c'est un facteur de production, au même titre que les machines qui constituent le capital technique.

Cette base de départ a été considérablement enrichie depuis plus d'un siècle, intégrant des théories mathématiques de plus en plus sophistiquées : théorie des jeux, théorie du chaos, théorie des anticipations rationnelles, théorie des contrats …

A la micro-économie se rattachent par exemple les fonctions d'utilité, les fonctions de production, les fonctions d'offre et de demande, les fonctions de coût.

La polémique évoquée plus haut concerne essentiellement cette théorie : beaucoup lui reprochent d'utiliser des mathématiques absconses comme un écran de fumée pour justifier l'idéologie libérale. Celle-ci, dans sa version extrême, consiste à laisser faire les marchés sans intervention des pouvoirs publics, au motif qu'il aurait été mathématiquement démontré que «la main invisible du marché» [7] conduit à l'optimum.

Je serais tenté de dire que les mathématiques ne méritent ni cet excès d'honneur

4 A ce sujet, je me permets de renvoyer à mes deux articles du bulletin de l'APMEP : «Intervalle : de confiance ?» (n° 427) et «Test d'équirépartition : qui a dit khi-deux ?» (n° 441).

5 Voir notamment ci-après l'analyse des tableaux de contingence.

6 Comme son nom l'indique, elle renouvelle l'approche «classique» du début du 19e siècle (Smith, Ricardo, Malthus, Say, Stuart Mill …).

7 L'expression est d'Adam Smith (Recherche sur la nature et les causes de la richesse des nations, 1776).

ni cette indignité. On sait bien que les conclusions d'une théorie découlent de ses prémisses : c'est donc sur ces dernières qu'il faut s'interroger, par exemple la rationalité des agents économiques [8], l'information complète, l'atomicité et la fluidité du marché, l'homogénéité des produits, la concurrence parfaite, les rendements décroissants etc. Et sur la pertinence des modélisations : celles du *travail* et de la *valeur* évoquées ci-dessus ont été fortement critiquées, autant par les marxistes [9] que par les keynésiens.

3) La macro-économie

Issue des travaux de Keynes dans les années 1930, la macro-économie a d'emblée un point de vue global, à l'échelle d'un vaste ensemble tel qu'un pays. Elle définit des *agrégats*, comme la production totale, la consommation globale, l'investissement global, la masse monétaire, le crédit.

Elle préconise une intervention de l'Etat pour corriger l'incapacité des marchés réels à déterminer des équilibres «optimum» (par exemple l'équilibre du marché de l'emploi se réalise, mais avec des chômeurs).

Typiquement, sa problématique est la suivante : sur quelle(s) variable(s) faut-il agir (par exemple les taux d'intérêt), et de combien, pour faire évoluer telle autre variable (par exemple, l'emploi) ? C'est pourquoi elle sert de base aux politiques économiques dans les pays développés depuis une cinquantaine d'années. En France, elle s'appuie sur les études de l'INSEE, notamment la Comptabilité Nationale.

Ses modèles sont constitués d'équations linéaires reliant les différents agrégats, les principales hypothèses consistant à préciser ce qui peut être considéré comme constant sur le moyen terme. Les techniques associées à ces modèles constituent l'*économétrie*, qui utilise essentiellement l'algèbre linéaire et les statistiques inférentielles.

A la macro-économie se rattachent par exemple les notions de propension à consommer ou à épargner, d'élasticité de la consommation par rapport au revenu ou au prix, de multiplicateur d'investissement ou de crédit, d'accélérateur.

On notera que les termes de micro-économie et macro-économie sont calqués sur les termes utilisés en physique, où l'on parle d'approche microscopique et macroscopique. De fait les théoriciens de l'économie, surtout les néoclassiques, ont longtemps rêvé d'une théorie «physique» de l'économie, qui énonce des lois intangibles. Beaucoup s'accordent à penser aujourd'hui que ce rêve est quelque peu chimérique : les groupes humains ne se laissent guère enfermer dans des «lois» de type physique, ne serait-ce que parce que leur connaissance de telles lois les amène à modifier leur comportement de façon à les mettre en défaut. Mais aussi parce que ces comportements varient selon les époques, les lieux, les cultures, les catégories sociales …

Cela n'empêche nullement une approche scientifique, mais celle-ci a sans doute autant à prendre du côté des sciences humaines que du côté des sciences de la Nature [10].

Rappelons à ce sujet que les mathématiques proposent des outils de modélisation qui ne

8 selon laquelle tout consommateur serait solitaire, égoïste et calculateur …

9 A propos de Marx, on peut s'étonner, quel que soit le jugement qu'on porte sur sa pensée, de la place très réduite, voire inexistante, qu'elle tient dans les formations supérieures d'économie.

10 Ainsi D. Kahneman, prix Nobel d'économie 2002 (avec V. Smith), a étudié les mécanismes de décision à la lumière de la psychologie cognitive.

sont pas seulement des outils de calcul [11] (par exemple les structures utilisées par Claude Lévi-Strauss pour modéliser les relations de parenté, ou les graphes décrivant les réseaux sociaux).

Au lycée

Les professeurs de mathématiques désireux de proposer à leurs élèves des ouvertures sur les sciences humaines manquent souvent de la formation nécessaire. Certains sujets de «mathématiques appliquées à l'économie» dans les manuels ou au baccalauréat ES montrent que la bonne volonté ne suffit pas, et qu'on a vite fait de dire des bêtises dans un domaine qu'on ne maîtrise pas [12].

De leur côté, les professeurs qui enseignent les sciences économiques et sociales au lycée n'ont pas tous, loin s'en faut, une formation mathématique consistante : c'est le cas pour ceux qui sont passés par une faculté de sciences économiques ; en revanche ceux qui ont une formation de sociologie, d'histoire ou de droit, sont souvent mal à l'aise avec les mathématiques et ont tendance à s'en méfier.

Il en résulte que l'indispensable travail interdisciplinaire mathématiques-économie est difficile. Je connais néanmoins des lycées où il est pratiqué avec enthousiasme et efficacité, au grand bénéfice des élèves.

Puisque cet article s'adresse à des professeurs de mathématiques, une façon d'aborder la question est de regarder dans les programmes de sciences économiques et sociales quels sont les besoins exprimés vis-à-vis de notre discipline.

On lit ainsi en annexe du programme en Terminale ES [13] applicable à compter de l'année scolaire 2002-2003 :

Savoir-faire applicables à des données quantitatives, exigibles à l'épreuve de sciences économiques et sociales du baccalauréat de la série ES
Préalables
1 - La maîtrise de ces savoir-faire implique à la fois calcul et lecture (c'est-à-dire interprétation) des résultats.
2 - Les calculs ne sont jamais demandés pour eux-mêmes : ils ont pour fonction de prouver, à l'occasion de l'exploitation du dossier documentaire servant de support à l'épreuve, l'acquisition d'une compétence plus générale.
3 - Ces calculs, toujours simples, sont appliqués à des données réelles fournies dans le dossier.
Savoir-faire
(Le niveau de correspondance avec les programmes de mathématiques est indiqué en italique) [14].
- Indices, calculs de proportions et pourcentages de répartition (toutes les classes à partir de la sixième) (notamment pour transformer une table de mobilité en table de destinée et table de recrutement).
- Moyenne arithmétique simple (à partir de la classe de quatrième) et pondérée, médiane (à partir de la classe de troisième).
- Lecture de représentations graphiques : his-

11 contrairement aux caricatures véhiculées par certains hommes publics comme Claude Allègre, pourtant physicien !
12 Voir note 2.

13 (www.education.gouv.fr/botexte/bo980910/MENE9801883A.HTM). Le programme de Première ES comporte une annexe analogue.
14 Ces parenthèses ne sont pas de moi, mais bien du programme officiel de SES. Elles témoignent d'un effort bienvenu d'interdisciplinarité au niveau du CNP.

togrammes, diagrammes de répartition (toutes les classes à partir de la sixième), représentations de séries chronologiques y compris le graphique semi-logarithmique (en terminale ES).
- Écarts inter-quantiles (à partir de la classe de seconde).
- Lecture de tableaux à double entrée, éventuellement avec subdivisions (à partir de la classe de première ES).
- Lecture de courbes de Lorenz.
- Variation absolue et variation relative (en terminale ES).
- Taux de variation ou de croissance (en classe de première ES).
- Taux de croissance annuel moyen à partir d'un taux de croissance pluriannuel ou d'une série de croissances annuelles (en terminale ES).
- Coefficient multiplicateur (à partir de la classe de cinquième).
- Évolutions en volume, évolutions en valeur (en terminale ES).
- Notion d'élasticité comme rapport d'accroissements relatifs (en terminale ES).
- Coût marginal, productivité marginale, propension marginale. Ces notions pourront être reliées à la notion mathématique de dérivée, sans que ce lien puisse donner lieu à une évaluation au baccalauréat (en terminale ES).

On constate que ces notions concernent principalement ce que les programme de mathématiques de ES appellent «information chiffrée», et qui inclut les statistiques. Mais d'autres chapitres sont également concernés : dérivation (coût marginal, productivité marginale, propension marginale, élasticité) ; probabilités (tableaux de contingence) ; exposants non entiers (taux de croissance annuel moyen) …

Quant aux autres chapitres, le fait qu'ils ne trouvent pas une application immédiate en économie ne justifierait pas nécessairement leur abandon [15]. Comme on l'a vu plus haut, la fréquentation de diverses branches des mathématiques est indispensable à la compréhension des méthodes et à la maîtrise des outils (c'est pourquoi notamment il est bon, y compris en ES, de faire de la géométrie).

De toutes façons, il y a matière à un travail commun riche et nécessaire.

Un premier domaine concerne le *langage* : les habitudes ne sont pas les mêmes dans les deux disciplines, et les élèves ont souvent du mal à opérer les transferts indispensables.

Il me semble par exemple qu'il y a une difficulté autour de la notion de **fonction** : alors qu'en mathématiques on éprouve le besoin de nommer le lien qui existe entre deux grandeurs, il est très rare qu'on le fasse en économie (pas plus d'ailleurs en physique ou plus généralement dans les sciences appliquées). Ainsi l'économiste dira «la consommation est fonction du revenu», mais n'éprouvera pas le besoin d'écrire $C = f(R)$. Ou alors il écrira $C = C(R)$: c'est plus économique (!), puisqu'on n'a pas besoin de la lettre f ; mais cela confond la fonction et son résultat, ce qui peut générer chez nos élèves de graves incompréhensions. Ainsi, beaucoup d'élèves ne se rendent pas compte que les fonctions sont omniprésentes dans les sciences appliquées, tout simplement parce qu'*ils ne les voient pas écrites* ! De là à penser que ce qu'ils font en mathématiques avec les fonctions ne sert à rien en économie (ni ailleurs …), il n'y a qu'un pas, que beaucoup n'hésitent pas à franchir...

Ce malentendu est renforcé par la différence de notation pour le nombre dérivé : là

15 sinon en regard de l'horaire notoirement insuffisant (du moins en partie obligatoire)

où le mathématicien écrit $f'(\mathrm{R})$, l'économiste écrit $\frac{\mathrm{dC}}{\mathrm{dR}}$. Ces deux notations ont chacune leur histoire et leur mérite, il n'est pas question d'imposer l'une contre l'autre [16]. Mais il est indispensable d'établir des ponts pour permettre aux élèves de franchir l'obstacle. En l'occurrence, il me semblerait très utile que le professeur de mathématiques introduise et commente la notation $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$ pour le nombre dérivé. En contrepartie, j'aimerais bien que les collègues non mathématiciens adoptent l'expression «nombre dérivé» ; en effet, dire — comme on l'entend souvent — «la pente de la tangente, c'est la dérivée» favorise toutes les confusions sur la nature des objets dont on parle : la pente serait-elle une fonction ? la dérivée serait-elle un nombre ? Ces à-peu-près de langage ne facilitent pas la compréhension du concept de fonction, ni de celui de nombre dérivé.

Quelques thèmes sensibles

Je développe ci-dessous, avec mon langage de mathématicien, quelques thèmes qui me paraissent mériter un travail interdisciplinaire en ES, et qui montrent la variété autant des outils mathématiques que des contenus économiques ou sociaux concernés.

1) Pourcentages, indices, croissance

Nous savons tous la difficulté que présente pour les élèves (et pour la majorité des adultes) une pratique intelligente des pourcentages. Pourquoi un tel pathos autour d'une notion très simple, qui a été étudiée au collège ? Je risque un diagnostic : c'est que nous l'enseignons mal.

Les pourcentages ne sont rien d'autre qu'une façon d'écrire les nombres ($z\ \% = \frac{z}{100}$), et ne méritent pas au lycée d'être étudiés pour eux-mêmes. Certes, ils sont utilisés couramment pour écrire les fréquences et les taux d'évolution [17]. Mais ce sont les propriétés des fréquences et des taux d'évolution qui doivent être explicitées. Traiter ensemble ces deux notions très différentes, sous prétexte qu'elles s'écrivent toutes deux sous forme de pourcentage, conduit à des acrobaties de langage qui ne font qu'entretenir la confusion.

- La **fréquence** (ou **proportion**) d'une sous-population A dans une population E est le rapport de l'effectif de A à l'effectif de E. Elle peut s'exprimer sous forme fractionnaire, ou décimale, ou de pourcentage :

$$1/4 = 0{,}25 = 25\ \%.$$

Elle a des propriétés simples, notamment :

(1) si p est la proportion de A dans E, et p' la proportion de B dans E, et si A et B sont disjoints, alors p+p' est la proportion de $A \cup B$ dans E.

(2) si p est la proportion de A dans E, et p' la proportion de E dans F, alors pp' est la proportion de A dans F.

Ces deux propriétés n'ont rien à voir avec les pourcentages, elles restent vraies

16 En revanche il faudrait abandonner en mathématiques la notation y', qui laisse croire qu'on dérive un nombre, et non une fonction (ce qui est désastreux notamment lors des changements de variable). Mais bien sûr, si on confond la fonction avec son résultat, on ne ressent pas l'incohérence de la notation y'.

17 Et bien d'autres choses, notamment les multiples ratios de l'analyse économique (taux d'épargne, taux d'autofinancement, taux d'imposition, taux de couverture des importations par les exportations …), ou encore les probabilités.

si p et p' sont écrits sous forme décimale ou fractionnaire. C'est pourtant elles qui sont évoquées par le programme de mathématiques de Première ES sous le libellé «addition de pourcentages» ou «pourcentages de pourcentages».

- Le **taux d'évolution** de y_1 à y_2 est le nombre $\frac{y_2 - y_1}{y_1}$. Les économistes l'appellent souvent **taux de croissance** (voir plus haut le programme de SES), ce qui peut déconcerter nos élèves dans le cas où sa valeur est négative [18].

On l'appelle aussi **variation relative** (par opposition à la *variation absolue* $y_2 - y_1$). On peut l'exprimer sous forme décimale, ou de fraction, ou de pourcentage.

Il a quelques propriétés importantes, notamment :

(3) si t est le taux d'évolution de y_1 à y_2, alors $y_2 = y_1 (1+t)$;

(4) si t est le taux d'évolution de y_1 à y_2, et t' le taux d'évolution de y_2 à y_3, alors le taux d'évolution de y_1 à y_3 est $t + t' + tt'$.

(5) si t est le taux d'évolution de y_1 à y_2, alors le taux d'évolution de y_2 à y_1 est $\frac{-t}{1+t}$

Ces propriétés n'ont rien à voir avec les pourcentages, elles restent vraies si t et t' sont écrits sous forme décimale ou fractionnaire. C'est pourtant sous la rubrique «pourcentages» qu'apparaît dans le programme de mathématiques de Première ES le libellé «Augmentations et baisses successives».

On remarque que si t et t' sont petits devant 1, les propriétés (4) et (5) induisent les approximations classiques, respectivement $t + t'$ et $-t$. Ces approximations méritent en Première ES un commentaire soigné, car on peut les rapprocher du nombre dérivé en 1 des fonctions carré et inverse.

Il me semble indispensable qu'un travail commun entre le professeur de mathématiques et le professeur de SES dégonfle la baudruche «pourcentages», et sécurise nos malheureux élèves par l'adoption d'un langage commun simple et clair.

En particulier, il faut bannir ce fatras inutile de règles de trois ou de multiplications par 100 : quand on a écrit quelques égalités du style 0,02 = 2 %, on sait convertir les écritures ! Malheureusement, pour des raisons que j'ignore, certains professeurs répugnent à écrire de telles égalités …

Certains pièges du langage courant sont facilement déjoués avec le vocabulaire adéquat : si une fréquence passe de 1% à 2%, sa *variation relative* est +100%, alors que sa *variation absolue* est +1% (et le «point de pourcentage» devient superflu). Un travail très utile est d'ailleurs de débusquer l'implicite dans les expressions courantes : une augmentation de 10% est une augmentation relative, une augmentation de 0,1 est une augmentation absolue, une augmentation d'un dixième peut être absolue ou relative selon le contexte …

Quant à la notion d'**indice** (simple), elle ne pose pas de problème si on la définit clairement : l'indice de y_2 par rapport à y_1 est le

18 Je propose d'éviter l'expression «taux de variation», utilisée en économie pour désigner $(y_2 - y_1)/y_1$, et en mathématiques pour désigner $(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$. Cette tradition mathématique n'est d'ailleurs pas très heureuse, le mot «taux» étant dans tous ses autres usages réservé à un rapport de grandeurs de même nature (donc «sans dimension»).

nombre $\frac{y_2}{y_1} \times 100$. Souhaitons seulement que les journalistes économiques évitent les raccourcis sommaires du genre «1995 = 100», pour dire que l'année de référence est 1995.

La notion d'**indice synthétique** (comme **l'indice des prix)** est plus difficile puisqu'il s'agit d'une moyenne pondérée d'indices simples : une question délicate est de savoir avec quels coefficients on pondère. Signalons au sujet de l'indice des prix que le calcul du taux moyen annuel d'inflation à partir d'un taux pluriannuel permet une illustration de la notion d'exposant fractionnaire.

2) Fonction de coût, coût marginal

La fonction de coût est un bel exemple de ce qu'est un *modèle*, en économie comme ailleurs : c'est une abstraction mathématique, fondée sur des hypothèses explicites de simplification de la réalité, et dont les conclusions valent ce que valent les hypothèses.

Du point de vue didactique, ce modèle présente un grand intérêt pour le professeur de mathématiques, car il illustre des notions clés de l'Analyse en leur donnant du sens. Mais il faut savoir qu'il en présente beaucoup moins pour le professeur de sciences économiques et sociales, qui lui attribue une faible valeur explicative de la réalité de l'entreprise, et qui en conséquence en parle peu.

On considère une entreprise, produisant au cours d'une période une quantité q d'un certain produit. On note C le *coût total* de cette production. On appelle *fonction de coût* la fonction f, positive et croissante, telle que $C = f(q)$. Le *coût fixe* est $f(0)$, le *coût variable* $f(q) - f(0)$. Le *coût moyen* unitaire est alors défini par $F(q)/q$, et le *coût marginal* par $f'(q)$.

La théorie néo-classique élémentaire fait deux hypothèses :

- hypothèse des *rendements décroissants* : à partir d'un certain seuil, le coût marginal augmente quand la quantité augmente. Autrement dit f' est croissante (f est convexe) sur un intervalle $[q_0, +\infty[$. Sous cette hypothèse, le coût moyen est minimal sur cet intervalle quand il est égal au coût marginal.

  En effet si on pose $g(q) = f(q)/q$, la condition $g'(q) = 0$ équivaut à $f'(q) = f(q)/q$.

  Pour q vérifiant cette condition, $g''(q) = f''(q)/q^2 > 0$, ce qui montre qu'il s'agit d'un minimum.

- hypothèse de *concurrence parfaite* : le prix de vente unitaire p est imposé à l'entreprise par le marché, et à ce prix elle vend toute sa production. Sous cette hypothèse (et la précédente), le profit est maximal quand le coût marginal est égal au prix de vente. En effet le profit est $h(q) = pq - f(q)$. Donc $h'(q) = p - f'(q)$. Par suite $h'(q) = 0$ quand $f'(q) = p$. Et $h''(q) = - f''(q) < 0$, ce qui montre qu'il s'agit d'un maximum.

La notion de coût marginal permet une réflexion sur le sens du nombre dérivé. Les économistes l'interprètent en effet comme le coût de production d'une unité supplémentaire, ou le coût de la dernière unité produite : cela revient à identifier $f'(q)$ à $f(q+1) - f(q)$ ou à $f(q) - f(q-1)$. Cette approximation est justifiée si q est assez grand et f assez régulière : elle consiste alors à identifier localement la courbe de f avec sa tangente. Mais supposer f deux fois dérivable est une hypothèse forte, alors que certaines situations suggèrent plutôt pour f une fonction discontinue [19].

On pourrait envisager un modèle discret : q prenant des valeurs entières positives, on peut noter C_q le coût total, le coût marginal c_q étant alors défini par $c_q = C_{q+1} - C_q$ ou $c_q = C_q - C_{q-1}$. On peut alors utiliser les propriétés de la moyenne arithmétique :

- Si le coût moyen est minimal, alors il est égal au coût marginal. Raisonnons en effet par l'absurde : si pour une production q, le coût marginal était inférieur au coût moyen, alors le coût d'une unité supplémentaire serait inférieur au coût moyen ; donc, en produisant davantage, on pourrait baisser le coût moyen (comme on baisserait la moyenne d'un paquet de copies, en ajoutant une copie de note inférieure à la moyenne initiale). Si inversement pour une production q, le coût marginal était supérieur au coût moyen, alors le coût de la dernière unité produite serait supérieur au coût moyen ; donc, en produisant moins, on pourrait baisser le coût moyen (comme on baisserait la moyenne d'un paquet de copies, en retirant une copie de note supérieure à la moyenne initiale). Dans les deux cas, le coût moyen correspondant à q ne serait pas minimal.

- Si le profit est maximal alors le coût marginal est égal au prix de vente. Raisonnons en effet par l'absurde : si pour une production q, le coût marginal était inférieur au prix unitaire, alors le coût d'une unité supplémentaire serait inférieur à p, donc une unité supplémentaire serait vendue avec bénéfice ; en produisant davantage, on pourrait donc augmenter le bénéfice. Si inversement, pour une production q, le coût marginal était supérieur au prix unitaire, alors le coût de la dernière unité produite serait supérieur à p, donc la dernière unité serait vendue à perte ; en produisant moins, on pourrait donc augmenter le bénéfice. Dans les deux cas, le bénéfice correspondant à q ne serait pas maximal [20].

Pour le professeur de mathématiques, ces raisonnements sont intéressants à faire en Première ou en Terminale ES, soit parce qu'ils donnent un enjeu aux calculs de dérivées, études de variation, recherches d'extremums, soit parce qu'ils font travailler sur la notion de moyenne [21].

En revanche pour le professeur de sciences économiques et sociales ces théorèmes n'ont qu'un intérêt théorique, dans le cadre de la compréhension du modèle, car les deux hypothèses indiquées sont rarement réalisées.

Cela dit, il ne faudrait pas caricaturer la théorie micro-économique en laissant croire que ce sont les seules hypothèses qu'elle envisage [22]. C'est en modifiant ces hypothèses qu'elle s'est développée, jusqu'à la synthèse

19 Par exemple pour une entreprise de transport (car, train, avion), q désignant le nombre de voyageurs, une fonction en escalier paraît plus appropriée (tant qu'on n'a pas rempli un car, le coût d'un voyageur supplémentaire est nul).

20 Notons cependant que ces deux raisonnements classiques utilisant le modèle discret posent un problème logique : ils n'utilisent pas l'hypothèse des rendements décroissants. De fait ils ne permettent pas de démontrer l'existence du minimum ou du maximum. Et pour cause : écrire cq = Cq+1 – Cq = Cq – Cq–1 revient à supposer arithmétique la suite (Cq). Alors la suite (cq) est constante (et non décroissante), la suite (Cq/q) n'a pas de minimum, et la suite (pq-Cq) n'a pas de maximum !

21 Encore faut-il les faire : ils perdent tout intérêt si les résultats sont admis !

22 Au lieu de la concurrence parfaite, un cas classique est celui du monopole, pour lequel la conclusion est évidemment toute différente !

de Debreu-Arrow dans les années 1970, synthèse elle-même dépassée par les développements récents.

3) Tableaux de contingence

Un *tableau de contingence* résume l'information relative à deux variables statistiques sur une même population. Les nombres inscrits à l'intersection d'une ligne et d'une colonne sont des effectifs ou des fréquences.

Prenons un exemple très simple : les résultats d'une enquête. On a posé à un groupe de 40 jeunes la question : « Regardez-vous les matches de football à la télévision ? ». Les réponses sont les suivantes :

	OUI	NON
Garçons	20	4
Filles	10	6

On veut étudier comment le sexe influence la réponse.

La proportion de OUI dans la population totale est 75 %. Si la proportion de OUI était 75% dans la population des garçons et 75% dans la population des filles (autrement dit si les fréquences conditionnelles étaient égales aux fréquences marginales), il serait naturel de dire que la réponse est indépendante du sexe.

Le tableau des effectifs serait alors un tableau de proportionnalité, facile à reconstituer (en supposant inchangés les effectifs marginaux) :

	OUI	NON	
Garçons	18	6	24
Filles	12	4	16
	30	10	40

Le tableau des fréquences aurait alors une propriété remarquable : chaque fréquence conjointe serait le produit de ses deux fréquences marginales (celle du bout de ligne et celle du bout de colonne) :

	OUI	NON	
Garçons	0,45	0,15	0,60
Filles	0,30	0,10	0,40
	0,75	0,25	1

Pour le voir, prenons par exemple la première case : la proportionnalité s'écrit :

$$\frac{18}{30} = \frac{24}{40}$$

soit : $18 \times 40 = 24 \times 30$, d'où $\frac{18}{40} = \frac{24}{40} \times \frac{30}{40}$. Il en serait de même pour les trois autres cases.

Revenons alors au tableau réel des fréquences :

	OUI	NON	
Garçons	0,50	0,10	0,60
Filles	0,25	0,15	0,40
	0,75	0,25	1

Pour mesurer de combien il s'écarte du tableau théorique d'indépendance, on peut faire le rapport [23] du tableau réel au tableau théorique :

	OUI	NON
Garçons	1,11	0,66
Filles	0,83	1,50

Les coefficients supérieurs à 1 mettent alors en évidence les sur-représentations, les coef-

23 J'évoque ici la pratique courante en sciences sociales, mais il est intéressant aussi d'effectuer la différence : cela permet une vérification algébrique (les sommes en ligne et en colonne doivent être nulles), et surtout cela prépare le calcul de d^2 abordé plus loin.

ficients inférieurs à 1 les sous-représentations. On est ainsi renseigné sur le type de dépendance entre le sexe et la réponse.

On peut dégager de cet exemple très schématique une *méthode générale pour étudier la dépendance entre deux variables statistiques :*

1) On divise tous les effectifs par l'effectif total, pour obtenir les fréquences conjointes.

2) On calcule les fréquences marginales par sommation des lignes et des colonnes.

3) On reconstitue, en multipliant les marges, le tableau de fréquences théoriques qui traduirait l'indépendance.

4) On rapporte ce tableau au tableau réel : cela met en évidence les sous-représentations et sur-représentations.

Cette méthode peut s'appliquer à des variables qualitatives ou quantitatives. Dans le cas quantitatif, on dispose d'autres outils, notamment le coefficient de corrélation linéaire. On démontre que si deux variables sont indépendantes au sens précédent, alors leur coefficient de corrélation linéaire est nul. Mais la réciproque n'est pas vraie. Autrement dit l'indépendance est une propriété plus forte que la corrélation linéaire nulle. Ceci est dû notamment à ce que l'absence de corrélation *linéaire* n'empêche pas une corrélation d'un autre type.

Bien entendu, l'analyse peut être reprise avec le langage des probabilités, en considérant l'épreuve qui consiste à choisir au hasard un individu dans la population. On peut s'intéresser aux probabilités conditionnelles : pour reprendre l'exemple précédent, la probabilité si on est un garçon de répondre oui est supérieure à la probabilité de répondre oui ; la probabilité si on est une fille de répondre oui est inférieure à la probabilité de répondre oui. Cela confirme la dépendance entre le sexe et la réponse mise en évidence ci-dessus avec le langage statistique. L'indépendance quant à elle s'écrirait $P(O/G) = P(O)$ c'est-à-dire $P(O \cap G)=P(O)P(G)$: on aura reconnu la propriété du premier tableau de fréquences ci-dessus. Il faut ici préciser que les conclusions ne concernent que le groupe de personnes étudié. Si l'on veut à partir de ce groupe *inférer* un jugement général sur l'attitude des garçons et des filles vis-à-vis des émissions de football, il faut considérer ce groupe comme un *échantillon* d'une population plus vaste. On doit alors se demander si cet échantillon est *représentatif* de la population, autrement dit si les 40 jeunes interrogés ont été choisis au hasard dans cette population [24] ; et dans l'affirmative, si l'écart entre les fréquences observées f_{ij} et les fréquences théoriques p_{ij} est *significatif*, c'est-à-dire si la fluctuation d'échantillonnage ne suffit pas à l'expliquer. Il est intéressant pour cela de calculer :

$$d^2 = \sum_{i,j} \frac{(f_{ij} - p_{ij})^2}{p_{ij}}.$$

On démontre en effet que sous l'hypothèse d'indépendance, pour un effectif n assez grand, il est rare (une fois sur 20) que nd^2 dépasse un certain *seuil critique* Q, qui dépend seulement des dimensions du tableau [25]. Si cela

24 Faute de quoi il pourrait y avoir un biais (par exemple si les jeunes interrogés étaient tous membres d'un club de football).

25 De façon plus précise, on démontre que la loi de nd^2 peut être approchée par la loi du X_2 à $(l-1)(c-1)$ degrés de liberté, où l et c sont les nombres de lignes et de colonnes du tableau. Appelons Q le quantile d'ordre 0,95 de cette loi, valeur fournie par les tables ou les tableurs : pour environ 95 % des échantillons possibles de taille n, nd^2 est inférieur à Q. Autrement dit, nd^2 dépasse Q environ une fois sur 20. La valeur 0,95 est le *niveau de confiance* généralement choisi : si on en préfère un autre, par exemple 0,99, il faut adapter la valeur de Q. Notons que nd^2 peut aussi s'écrire $\sum \frac{(n_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$, où les nij = n fij sont les effectifs observés, et les eij = n pij les effectifs théoriques sous l'hypothèse d'indépendance.

se produit, c'est donc que l'hypothèse d'indépendance est peu plausible : on dira alors que l'écart observé est significatif.

Dans l'exemple ci-dessus, $n.d^2 \approx 2,22$ et $Q \approx 3,84$: l'écart n'est donc pas significatif. En revanche si les mêmes fréquences avaient été observées sur un échantillon de 80 individus, nd^2 vaudrait 4,44 et l'écart serait significatif, conduisant à rejeter l'hypothèse d'indépendance. On voit que l'effectif de l'échantillon joue un rôle essentiel dans les conclusions, ce qui n'est pas surprenant : plus le nombres d'observations est grand, plus l'information est précise. Pour le professeur de sciences économiques et sociales, un exemple classique est l'analyse des *tables de mobilité sociale* (évoquées plus haut dans le programme de SES), qui renseignent sur l'évolution de la répartition de la population en PCS (professions et catégories socioprofessionnelles) d'une génération à la suivante.

On part de données statistiques telles que celles du tableau ci-dessous (enquête effectuée par l'INSEE en 1985 auprès des hommes de 40 à 59 ans actifs ou anciens actifs). Les effectifs sont en milliers : on lit par exemple en première colonne qu'on a interrogé 426 000 hommes agriculteurs, et que parmi eux, 381 300 avaient un père agriculteur, 16 200 un père artisan ou commerçant, etc.

PCS du fils / PCS du père	Agriculteur	Artisan/ commerçant	Cadre/ intellectuel	Profession intermédiaire	Employé	Ouvrier	TOTAL
Agriculteur	381,3	99,2	56,5	135,4	76,7	379,0	1128,1
Artisan/commerçant	16,2	233,6	158,0	154,7	58,0	185,4	805,9
Cadre/intellectuel	1,5	27,3	178,0	61,7	17,8	11,4	297,7
Prof. intermédiaire	0,5	45,3	143,8	141,6	39,7	81,4	452,3
Employé	1,5	43,7	102,7	142,7	62,6	96,8	450,0
Ouvrier	25,0	175,0	137,0	392,0	182,0	872,0	1783,0
TOTAL	426,0	624,1	776,0	1028,1	436,8	1626,0	4917,0

On calcule les fréquences conjointes en divisant tous ces effectifs par 4917 :

PCS du fils / PCS du père	Agriculteur	Artisan/ commerçant	Cadre/ intellectuel	Profession intermédiaire	Employé	Ouvrier	TOTAL
Agriculteur	7,8%	2,0%	1,1%	2,8%	1,6%	7,7%	22,9%
Artisan/commerçant	0,3%	4,8%	3,2%	3,1%	1,2%	3,8%	16,4%
Cadre/intellectuel	0,0%	0,6%	3,6%	1,3%	0,4%	0,2%	6,1%
Prof. intermédiaire	0,0%	0,9%	2,9%	2,9%	0,8%	1,7%	9,2%
Employé	0,0%	0,9%	2,1%	2,9%	1,3%	2,0%	9,2%
Ouvrier	0,5%	3,6%	2,8%	8,0%	3,7%	17,7%	36,3%
TOTAL	8,7%	12,7%	15,8%	20,9%	8,9%	33,1%	100,0%

On reconstitue à partir des marges le tableau théorique d'indépendance :

PCS du fils / PCS du père	Agriculteur	Artisan/ commerçant	Cadre/ intellectuel	Profession intermédiaire	Employé	Ouvrier	TOTAL
Agriculteur	2,0%	2,9%	3,6%	4,8%	2,0%	7,6%	22,9%
Artisan/commerçant	1,4%	2,1%	2,6%	3,4%	1,5%	5,4%	16,4%
Cadre/intellectuel.	0,5%	0,8%	1,0%	1,3%	0,5%	2,0%	6,1%
Prof. intermédiaire	0,8%	1,2%	1,5%	1,9%	0,8%	3,0%	9,2%
Employé	0,8%	1,2%	1,4%	1,9%	0,8%	3,0%	9,2%
Ouvrier	3,1%	4,6%	5,7%	7,6%	3,2%	12,0%	36,3%
TOTAL	8,7%	12,7%	15,8%	20,9%	8,9%	33,1%	100,0%

On rapporte le tableau réel des fréquences au tableau théorique d'indépendance :

PCS du fils / PCS du père	Agriculteur	Artisan/ commerçant	Cadre/ intellectuel	Profession intermédiaire	Employé	Ouvrier	TOTAL
Agriculteur	3,90	0,69	0,32	0,57	0,77	1,02	1,00
Artisan/commerçant	0,23	2,28	1,24	0,92	0,81	0,70	1,00
Cadre/intellectuel	0,06	0,72	3,79	0,99	0,67	0,12	1,00
Prof. intermédiaire	0,01	0,79	2,01	1,50	0,99	0,54	1,00
Employé	0,04	0,77	1,45	1,52	1,57	0,65	1,00
Ouvrier	0,16	0,77	0,49	1,05	1,15	1,48	1,00
	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

Les sous et sur-représentations apparaissent sous forme de coefficients inférieurs ou supérieurs à 1. Le professeur de SES dira par exemple « Il y a 3,9 fois plus d'agriculteurs qui ont un père agriculteur qu'on n'en obtiendrait par tirage au sort des professions des enfants », et pourra rapprocher la notion d'indépendance de celle d'égalité des chances.

Ici la significativité est assurée, car l'effectif est énorme (près de 5 millions d'observations) : il ne s'agit pas d'un sondage mais d'une enquête quasiment exhaustive. La dépendance entre la PCS du père et celle du fils peut être mesurée par la *contingence* :

$$C = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{d^2}}},$$

comprise entre 0 (indépendance) et 1 (dépendance fonctionnelle) : ici $d^2 \approx 0{,}467$ donc $C \approx 0{,}56$. On peut aussi mesurer pour chaque case sa « contribution au d^2 » en calculant $\frac{1}{d^2} \frac{(f_{ij} - p_{ij})^2}{p_{ij}}$: on constate ainsi que les agriculteurs fils d'agriculteurs contribuent pour 36 % à cette « inertie sociale », les cadres fils de cadres pour 16 %, etc.

Quant aux tables de *recrutement* et de *destinée* évoquées dans le programme de SES, on les obtient à partir du tableau initial en calculant les fréquences conditionnelles soit en colonne, soit en ligne, comme il est indiqué ci-contre…

Table de recrutement :

PCS du fils / PCS du père	Agriculteur	Artisan/ commerçant	Cadre/ intellectuel	Profession intermédiaire	Employé	Ouvrier	TOTAL
Agriculteur	89,5%	15,9%	7,3%	13,2%	17,6%	23,3%	22,9%
Artisan/commerçant	3,8%	37,4%	20,4%	15,0%	13,3%	11,4%	16,4%
Cadre/intellectuel	0,4%	4,4%	22,9%	6,0%	4,1%	0,7%	6,1%
Prof. intermédiaire	0,1%	7,3%	18,5%	13,8%	9,1%	5,0%	9,2%
Employé	0,4%	7,0%	13,2%	13,9%	14,3%	6,0%	9,2%
Ouvrier	5,9%	28,0%	17,7%	38,1%	41,7%	53,6%	36,3%
TOTAL	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%

Table de destinée :

PCS du fils / PCS du père	Agriculteur	Artisan/ commerçant	Cadre/ intellectuel	Profession intermédiaire	Employé	Ouvrier	TOTAL
Agriculteur	33,8%	8,8%	5,0%	12,0%	6,8%	33,6%	100,0%
Artisan/commerçant	2,0%	29,0%	19,6%	19,2%	7,2%	23,0%	100,0%
Cadre/intellectuel	0,5%	9,2%	59,8%	20,7%	6,0%	3,8%	100,0%
Prof. intermédiaire	0,1%	10,0%	31,8%	31,3%	8,8%	18,0%	100,0%
Employé	0,3%	9,7%	22,8%	31,7%	13,9%	21,5%	100,0%
Ouvrier	1,4%	9,8%	7,7%	22,0%	10,2%	48,9%	100,0%
TOTAL	8,7%	12,7%	15,8%	20,9%	8,9%	33,1%	100,0%

On peut les interpréter en termes de probabilités : on lit par exemple dans la table de recrutement que la probabilité d'avoir un père agriculteur si on est agriculteur est 89,5 % ; et dans la table de destinée que la probabilité d'être agriculteur si on a un père agriculteur est 33,8 %.

4) Propension, élasticité

Il s'agit ici d'un modèle macro-économique.

Pour une population donnée et un type de produit donné, la consommation globale dépend (entre autres) du revenu global[26] : $C = f(R)$.

Considérons alors un revenu donné R.

a) Supposons que ce revenu subisse une *variation absolue* $R_1 - R = \Delta R$. Quelle *variation absolue* $\Delta C = C_1 - C$ peut-on en déduire ? Si par exemple $\Delta C = 0{,}8\,\Delta R$, cela signifie que 80% du revenu *supplémentaire* est affecté à la consommation : on dit que 0,8 est la propension marginale à consommer.

	revenu	consommation	
$\Delta R \downarrow$	R	C	$\downarrow \Delta C$
	R_1	C_1	

Autrement dit, on appelle **propension marginale à consommer** le nombre :

$$\frac{\Delta C}{\Delta R} = \frac{C_1 - C}{R_1 - R} = \frac{f(R_1) - F(R)}{R_1 - R} .$$

Ce nombre permet de calculer la consommation attendue après une variation du revenu.

26 Pour un pays, R s'identifie en gros au Produit Intérieur Brut.

Il est bien entendu compris en valeur absolue[27] entre 0 et 1.

Il dépend a priori de R et de R_1. Mais, R étant fixé, si R_1 est suffisamment proche de R, on peut l'assimiler au nombre dérivé $f'(R)$.

Cela conduit à *définir* la propension marginale comme le nombre dérivé $f'(R)$.

b) Supposons que ce revenu subisse une *variation relative* $\frac{\Delta R}{R}$. Quelle *variation relative* $\frac{\Delta C}{C}$ peut-on en déduire pour la consommation ?

Si par exemple $\frac{\Delta C}{C} = 2\frac{\Delta R}{R}$, cela signifie qu'une augmentation de 1,5 % du revenu entraîne une augmentation de 3% de la consommation ; qu'une diminution de 1% du revenu entraîne une diminution de 2% de la consommation ... : on dit que 2 est l'**élasticité de la consommation par rapport au revenu**.

	revenu	consommation	
$\frac{\Delta R}{R}$ ↓	R	C	↓ $\frac{\Delta C}{C}$
	R_1	C_1	

Autrement dit, on appelle **élasticité** le nombre :

$$\frac{(C_1 - C)/C}{(R_1 - R)/R} = \frac{C_1 - C}{R_1 - R} \times \frac{R}{C} = \frac{f(R_1) - F(R)}{R_1 - R} \times \frac{R}{F(R)}$$

Ce nombre dépend a priori de R et de R_1. Mais, R étant fixé, si R_1 est suffisamment proche de R, on peut assimiler comme ci-dessus le nombre $\frac{f(R_1) - F(R)}{R_1 - R}$ au nombre dérivé $f'(R)$.

Cela conduit à définir l'élasticité en R par la formule :

$$e(R) = \frac{Rf'(R)}{f(R)}.$$

Cette notion d'élasticité a un grand intérêt théorique et pratique. Elle permet notamment de faire des prévisions macro-économiques. Par exemple, pour la France actuelle, l'INSEE l'évalue à 0,4 pour l'alimentation, à 0,7 pour le logement, 1,5 pour les transports et télécommunications. Cela implique qu'avec un taux de croissance du PIB de 2 %, on peut s'attendre à une augmentation de 0,8 % des dépenses d'alimentation, de 1,4 % des dépenses de logement, de 3 % pour les transports et télécommunications ...

On a pris ci-dessus l'exemple de l'élasticité de la consommation par rapport au revenu. On peut bien entendu parler d'élasticité dans tous les cas où une grandeur dépend d'une autre. Et donc en mathématiques, associer à toute fonction dérivable f une fonction «élasticité de f» définie par Ef(x) = $\frac{xf'(x)}{f(x)}$. On démontre facilement que les fonctions à élasticité constante sont les fonctions puissances : cela explique leur rôle privilégié dans certains modèles (fonctions de production de Cobb-Douglas par exemple).

L'élasticité de la consommation par rapport au *prix*[28] est une donnée très utile pour la politique économique : si elle

27 Il peut être négatif : par exemple la consommation de pain courant ou de vin ordinaire a tendance à diminuer quand le revenu s'élève.

28 Cette élasticité est bien entendu négative, sauf pour certains biens de luxe pour lesquels le snobisme peut jouer (preuve s'il en est besoin que le consommateur n'est pas toujours rationnel au sens restrictif de la micro-économie élémentaire !).

est forte, une augmentation du prix réduit fortement la consommation ; si elle est faible (cas du tabac ou des carburants par exemple) une augmentation du prix se répercute peu sur les quantités vendues, si bien que l'Etat qui décide de cette augmentation récupère les taxes sans compromettre les entreprises du secteur.

5) Multiplicateur d'investissement

On sait que, dans un pays, une politique de grands travaux (construction d'autoroutes, de logements …) peut avoir un effet «boule de neige» sur l'économie : cet investissement va en effet faire fonctionner des entreprises, qui vont donc distribuer du revenu ; ce revenu va être dépensé, ce qui va faire fonctionner d'autres entreprises, etc.

Historiquement, cette idée a été mise en œuvre pour la première fois en 1933 lors du «New Deal» de F. D. Roosevelt, qui a permis de résoudre la crise de 1929, donnant ainsi ses lettres de noblesse à la théorie de Keynes. On peut la traduire dans le modèle macro-économique de base, ce qui permet de la quantifier.

Notons R le revenu global, C la consommation globale, I l'investissement global.

On fait l'hypothèse que la *propension marginale à consommer* $c = \frac{\Delta C}{\Delta R}$ est constante sur le moyen terme : comme on l'a vu ci-dessus, cela signifie qu'une variation de revenu ΔR entraîne une variation de consommation $c\Delta R$. On suppose aussi que l'économie est fermée, de sorte que tout le revenu distribué est dépensé à l'intérieur du pays.

Considérons alors une augmentation ΔI de l'investissement global. Elle entraîne immédiatement une augmentation de revenu ΔI pour les entreprises qui fournissent les biens concernés. Ce revenu est distribué entre les propriétaires et les employés de ces entreprises. Cela entraîne une augmentation de consommation $c\Delta I$, qui crée une augmentation de revenu $c\Delta I$ pour les entreprises. Celle-ci entraîne à son tour une augmentation de consommation $c^2\Delta I$, qui crée une augmentation de revenu $c^2\Delta I$. Etc.

Au bout de n périodes, l'augmentation de revenu est $(1 + c + c^2 + ... + c^{n-1}).\Delta I$, c'est-à-dire $\frac{1-c^n}{1-c}.\Delta I$. Comme $0 < c < 1$, c^n est assez vite négligeable devant 1.

On peut donc considérer qu'en fin de compte, le revenu global a été augmenté d'une quantité $\frac{1}{1-c}.\Delta I$. Le nombre $\frac{1}{1-c}$ s'appelle le *multiplicateur d'investissement*.

Par exemple, si la propension marginale à consommer est 0,8 , le multiplicateur d'investissement est égal à 5 : une augmentation d'investissement crée une augmentation de revenu 5 fois plus grande.

Il est intéressant de comparer ce raisonnement à un raisonnement équivalent qui ne fait pas appel aux suites géométriques. Il consiste à écrire $R = C + I$ (identité fondamentale de la macro-économie) et $C = cR+C_0$ (où c et C_0 sont constants sur le moyen terme)[29].

29 Dire que $\Delta C/\Delta R$ est constant équivaut à dire qu'on passe de R à C par une fonction affine (adjectif peu connu des économistes, pour lequel les anglo-saxons disent linear). Cette propriété caractéristique des fonctions affines est au programme de mathématiques de la classe de Seconde.

En éliminant C, on en déduit $R = \frac{C_0 + I}{1 - c}$, d'où $\Delta R = \frac{\Delta I}{1 - c}$.

Ce raisonnement peut paraître plus simple, mais il n'a pas la même puissance explicative que le précédent.

Conclusion

Tout ce qui a été exposé ci-dessus fait ressortir l'intérêt didactique de la liaison mathématiques-économie :

- Elle montre aux élèves que les mathématiques font partie de la culture au sens large du terme, puisqu'elles offrent un cadre de pensée aux autres sciences, qu'il s'agisse de sciences de la Nature comme la physique ou de sciences humaines comme l'économie…
- Elle met en pratique le jeu de contextualisation-décontextualisation par lequel les mathématiques opèrent et se construisent, ce qui éclaire leur fonctionnement.
- Elle permet une réflexion formatrice sur la démarche de modélisation : choix des paramètres significatifs, formalisation de leurs liaisons, outils mathématiques utilisés, approximations, facteurs négligés … En s'interrogeant sur le caractère prédictif des modèles et leur domaine de validité, elle soulève le problème de leur adéquation aux phénomènes dont ils rendent compte. De ce point de vue, il est finalement très instructif que certains de ces modèles soient objets de controverse entre les économistes[30].
- Elle facilite l'acquisition des concepts de l'une comme de l'autre discipline : on sait que la compréhension d'un concept dépend en partie de la multiplicité des approches.
- Elle peut motiver les études abstraites pour des élèves peu portés à étudier les mathématiques pour elles-mêmes, en en montrant des domaines d'application.
- Elle renouvelle l'enseignement des mathématiques à un moment critique de désaffection des élèves pour les études scientifiques.

Ce type d'activité trouve sa place assez naturellement au lycée, dès l'instant que les enseignants en ont la volonté. Les TPE en particulier fournissent un cadre propice. Encore faut-il que le rôle des mathématiques ne s'y limite pas – comme c'est trop souvent le cas - aux statistiques descriptives. Ce qui précède montre qu'il y a matière pour une foule de sujets passionnants reliant mathématiques et économie, sans que les mathématiques soient réduites à jouer les utilités. J'en propose quelques-uns en annexe II, centrés soit sur une notion mathématique, soit sur une notion économique.

Les enseignants qui acceptent de s'y engager y trouvent leur compte : en décloisonnant le savoir, l'échange permet un enrichissement mutuel et un nouveau regard sur sa propre discipline.

30 Les élèves de S n'ont pas la même chance : au niveau du lycée, les modèles de la physique sont tellement consensuels qu'on peut être tenté de les prendre pour la vérité.

ANNEXE 1

La controverse sur le rôle des mathématiques en économie
(extraits du Monde de l'Economie, 31/10/2000)

L'enseignement de la science économique en débat. Enfin !

Les problèmes soulevés par les étudiants portent sur :

* la place importante occupée par la théorie néo-classique et le «décalage de l'enseignement par rapport aux réalités concrètes», alors qu'il convient d'exercer un retour permanent aux faits et de fournir des réponses «utiles aux acteurs économiques et sociaux»,

* le recours aux mathématiques devenues une «fin en soi» plutôt qu'un instrument, et utilisées comme instrument de sélection «sous couvert de scientificité»,

* un enseignement magistral ne laissant «pas de place à la réflexion»,

* la nécessité d'un pluralisme des explications adapté à la complexité des objets.

Il est grave de constater que les étudiants ont le sentiment, à partir de l'enseignement qui leur est dispensé et des exercices qui leur sont soumis, que l'activité de l'économiste consisterait à «faire tourner» des modèles sans liens avec les réalités concrètes. Comme si celui-ci s'exerçait à la manipulation de «mondes imaginaires» et se détournait de la réflexion sur les grandes préoccupations du moment. Or, ne serait-ce que depuis 25 ans, et pour n'évoquer que les sociétés développées, la responsabilité morale des économistes est engagée en raison du développement du chômage et de l'exclusion.

Trop souvent, la recherche et l'enseignement de l'économie se réduisent à un jeu sur des variables au sein de modèles plus ou moins sophistiqués, au détriment de la qualité de la réponse aux questions posées par les mutations contemporaines. Si la virtuosité mathématique de l'économiste peut être parfois saluée comme celle d'un artiste devant son oeuvre, elle ne constitue en rien l'assurance d'une réponse satisfaisante face à la gravité des enjeux sociaux.

La technicité et l'apparente scientificité du raisonnement réduite à l'usage des mathématiques dissimulent souvent la vacuité des propositions et l'absence de tout souci de réponse opérationnelle.

Comme toute discipline scientifique la science économique est tournée vers l'explication de phénomènes «réels». La validité et la pertinence d'une théorie ne peuvent s'apprécier in fine que par une nécessaire confrontation avec les «faits». C'est pourquoi nous ne pouvons, avec les étudiants, que déplorer le développement d'une pédagogie de l'économie qui privilégie l'exposé des théories, la construction de modèles, la capacité d'écriture et de dérivation des propriétés d'un modèle dont la pertinence empirique ne serait pas ou trop peu discutée. Ou qui met en avant la qualité formelle de la construction au détriment de la discussion de la capacité interprétative et démonstrative par rapport au «réel».

Le premier intérêt d'un modèle réside dans la nature, la puissance et l'efficacité de l'abstraction qu'il propose et met en forme. C'est sur cela que doit s'exercer d'abord la compétence première de l'économiste. Il ne s'agit pas d'un problème mathématique.

(…) On ne peut échapper à l'usage des outils fournis par la statistique et l'économétrie. Mais l'appréciation critique d'un modèle ne doit pas être abordée sur une base uniquement quantitative. Aussi rigoureuse, formellement, que soit l'origine d'une «loi économique» ou d'un théorème, aussi satisfaisante et convaincante que puisse paraître l'adéquation statistique aux faits observés, on devra toujours nécessairement s'interroger sur sa pertinence et sa validité eu égard au contexte et au type de situation auxquels sa portée peut se révéler subordonnée. Aussi doit-on tenir compte des institutions, de l'histoire, des stratégies des acteurs ou des groupes, des dimensions sociologiques, ainsi que de considérations plus épistémologiques.

(…) Nous en venons à la mise en cause de la théorie néo-classique. La place prépondérante qu'elle occupe est certes critiquable au nom du pluralisme. Mais il y a plus important au-delà de l'affirmation de ce principe La fiction d'un agent représentatif rationnel, l'importance accordée à la notion d'équilibre, l'idée que pour l'essentiel le marché, régulé par les prix, constitue l'instance principale sinon unique d'ajustement des comportements : autant de principes d'analyse qui fondent une stratégie de recherche dont l'efficacité et la pertinence ne vont pas de soi et ne sont nullement avérées. Notre conception de l'économie, plus politique, repose sur des principes de comportement d'une autre nature (principe de rationalité limitée peut-être). Elle reconnaît l'importance de l'histoire et des institutions, intègre l'existence d'interactions directes entre agents et reconnaît que leur hétérogénéité est en soi un facteur important de la dynamique du système. Elle réserve une place importante aux ajustements de comportement qui dépassent le marché et ne se réduisent pas à des équilibrages en prix et en quantités. Les organisations jouent un double rôle : en tant qu'agent et en tant que système d'agents. Les phénomènes de pouvoir ne peuvent être a priori exclus ou mis de côté. L'étude des dynamiques longues, des ruptures et des crises permet de relativiser et de mieux appréhender les évolutions actuelles.

Le fait que «dans la plupart des cas» l'enseignement dispensé réserve une place centrale aux thèses néo-classiques est aussi regrettable pour d'autres raisons. Les étudiants sont en effet conduits à croire non seulement que la théorie néo-classique est l'unique courant scientifique, mais aussi que sa scientificité s'explique par son caractère axiomatique ou l'usage systématique voire exclusif de la modélisation formalisée sous tous ses aspects. Autant le dire clairement : la théorie néo-classique n'est pas plus scientifique que d'autres approches en économie. Ce qui ne signifie naturellement pas qu'elle le serait moins. En tous les cas nous dénonçons, avec les étudiants, l'assimilation parfaitement abusive qui est souvent faite entre scientificité et usage des mathématiques. Le débat sur la scientificité de l'économie comme science sociale ne se réduit pas à la question de l'usage ou non des mathématiques. Allons plus loin : poser le débat en ces termes c'est agiter un leurre et détourner le regard des vraies questions et des enjeux les plus importants, c'est-à-dire l'objet et la nature de la modélisation. Sans compter le risque déjà souligné d'une réflexion économique centrée sur la résolution de problèmes «imaginaires» [31]. Sur le plan pédagogique la conséquence est immédiate : si la place accordée aux mathématiques est trop importante et si on laisse entendre qu'un bon économiste doit nécessairement être un bon mathématicien (et réciproquement selon certains), il s'agit d'un dévoiement aussi regrettable qu'injustifié. On connaît l'inclination forte existant dans notre pays qui consiste à faire de la maîtrise de l'outil mathématique le critère de la capacité à élaborer un dis-

31 Nous n'ignorons pas qu'il peut y avoir des enjeux fondamentaux très importants derrière certains problèmes «abstraits» (Note des auteurs de l'appel)

cours scientifique. On connaît aussi la place qu'occupent les mathématiques pures comme outil de sélection pour l'accès aux grandes écoles. Certains ont mis en place le même type de sélection dans les premiers cycles de sciences économiques... On peut douter de la pertinence de cette stratégie pédagogique. Il faut voir dans ce rôle dévolu aux mathématiques dans l'enseignement des sciences économiques une spécificité nationale que rien, au plan fondamental de la discipline, ne justifie. Du moins dont rien ne justifie les excès auxquels nous parvenons. Il suffit d'examiner les cursus mis en place dans les pays qui servent d'exemple à ceux là même qui soutiennent cette dérive pour saisir cette spécificité. Un enseignement d'économie de qualité et de pointe est tout à fait possible sans avoir à reproduire un style de formation qui n'est pas adapté aux étudiants et qui, surtout, conduit à négliger les deux points forts de l'université : la variété de ses cursus et des compétences disponibles d'une part, la formation à l'esprit critique d'autre part. […]

Contre-appel pour préserver la scientificité de l´économie

Un certain nombre de professeurs et d´étudiants en économie ont signé et diffusé un appel demandant une refonte de l´enseignement de l´économie, estimant que celui-ci repose trop sur la formalisation mathématique.

Cet appel a le mérite de soulever un authentique problème, celui de la démarche scientifique en économie. Il l´aborde toutefois de façon réductrice, en contestant l´usage (instrumental) des mathématiques et se conclut par une attaque partisane à l´encontre de l´un des corpus centraux de notre discipline, à savoir les théories dites « néoclassiques ». Cette remise en cause nous paraît pour le moins discutable dans la mesure où elle contribue à ôter à l´économie son caractère scientifique.

Il nous semble en effet important que l´économie garde une méthode conforme à la démarche scientifique traditionnelle, laquelle peut se décrire par un enchaînement en trois temps du raisonnement :

- l´identification et la définition précise des concepts et des comportements qui caractérisent l´activité économique (consommation, production, investissement...) et l´énoncé des hypothèses de base relatives à ces comportements ;

- la formulation de théories ayant comme mode d´expression la formalisation de liens fonctionnels entre les éléments précédemment identifiés ;

- la vérification de ces théories par l´expérience. Jusqu´à preuve du contraire, en économie cette expérience ne peut être constituée que par la confrontation à l´histoire quantifiée par la statistique et l´économétrie.

Si donc l´enseignement de l´économie réclame une prise en compte importante de l´histoire, il ne peut se passer de formalisation, en particulier celle que confère l´usage - certes non exclusif - des mathématiques.

Cette formalisation n´est là ni pour masquer des intentions politiques coupables, ni pour conférer aux économistes le sentiment d´échapper aux critiques de la société. Elle vise ni plus ni moins à se donner les moyens de la vérification expérimentale et évite ainsi que l´économie ne devienne un simple discours général qui ne saurait être prouvé ni démontré.

(…) Est-il besoin de rappeler que le recours à la formalisation n´est pas le fait d´une minorité partisane mais de la très grande majorité de nos collègues à travers le monde, et ce quelles que soient leurs opinions politiques et croyances philosophiques ?

Les signataires du présent texte en appellent donc à la raison et à la juste mesure, pour proposer de recentrer le débat sur le terrain de la complémentarité des instruments qui fondent ensemble l´approche scientifique, et plus encore sur celui de la pédagogie. C´est à vrai dire sur ce dernier terrain qu´est née la protestation des étudiants.

ANNEXE 1

Suggestions pour les TPE

Les sujets suggérés ci-dessous doivent bien entendu être associés à une problématique qui les insère dans les thèmes imposés.

Par exemple le thème «Europe» propose l'axe de réflexion «La circulation des biens, des informations et des personnes», avec une piste de travail «réseaux de transport, maillage ferroviaire» : les *graphes* trouveraient leur place dans ce thème, avec par exemple la problématique suivante : «Comment les réseaux nationaux peuvent-ils s'interconnecter harmonieusement ?»

Autre exemple : le thème «Les transformations du travail» propose l'axe de réflexion «Les conditions de travail», avec une piste «réduction des accidents du travail» : l'étude probabiliste d'une politique de prévention des risques trouverait sa place dans ce thème.

Sujets possibles

- Les taux, croissance absolue et relative
- Les indices, l'indice des prix, l'inflation
- L'actualisation, évolution en volume et en valeur
- Les graduations logarithmiques
- Les multiplicateurs keynésiens
- Les propensions marginales à consommer, à épargner
- Les fonctions de coût, le coût marginal
- Les fonctions de production, la productivité
- L'offre et la demande
- Les tableaux à double entrée, dépendance et indépendance

- Les moyennes, l'effet de structure
- Les sondages
- Les fluctuations et leur mesure
- Corrélation et causalité
- L'ajustement (linéaire ou non)
- La concentration, l'indice de Gini
- Les emprunts, les amortissements
- L'élasticité consommation-revenu, consommation-prix
- La logique dans les raisonnements économiques
- La gestion prévisionnelle
- La prévention des risques
- Le contrôle de fabrication
- La politique sanitaire
- L'espérance de vie
- La croissance démographique
- La croissance économique
- L'oscillateur de Samuelson
- La matrice de Léontief et le tableau entrées-sorties
- Les variations saisonnières
- Dépréciation d'un équipement
- Les graphes d'ordonnancement
- Les réseaux sociaux

Bibliographie

- Mathématiques, économie et gestion, D. Fredon (CEDIC, 1976)
- Comprendre l'information économique et sociale : Guide méthodologique, M-L. Lévy, S. Ewenczyk et R. Jammes (Hatier, 1981, 1989)
- Les mathématiques dans l'information chiffrée, S.Gasquet et R.Chuzeville (CRDP de Grenoble, 1993)
- Les chiffres et l'élève, S.Gasquet (CRDP de Grenoble, 1994)
- Economie, mathématiques et méthodologie, J-M. Huriot (Economica, 1994)
- Mathématiques dans les sections ES, IREM de Clermont-Ferrand (1995)
- L'enseignement des mathématiques en Première ES, IREM de Besançon (1995)
- Les mathématiques en économie : apport ou invasion ? E.Quinet et P. de Calan (éd. universitaires, 1995)
- Mathématiques en filière économique et sociale, IREM de Poitiers (1996)
- Mathématiques et sciences économiques et sociales au lycée, IREM de Strasbourg (1996)
- L'économie est-elle une science ? L. Honoré, collection Dominos (Flammarion, 1997)
- Modèles mathématiques pour les sciences économiques et sociales, IREM de Bourgogne (1998)

- De la spécificité des mathématiques en série ES (MAFPEN de Lille / CRDP Nord-Pas-de-Calais, 1998)
- Des concepts économiques aux outils mathématiques, C. Dollo et B. Luiset (Hachette, 1998)
- Comprendre la formulation mathématique en économie, D. Schlacther (Hachette, 2000)
- Mathématiques Première ES et Terminale ES, collection Thiénard, rubrique «Math&Co» (Bréal, 2002)[32]

Articles

- *Les mathématiques sociales*, dossier hors-série Pour la Science n° 24 (juillet 1999)
- *Economie et mathématiques : quelques éléments du débat*, groupe mathématiques-économie de l'IREM de Strasbourg, *in* Repères n° 36 (juillet 1999)
- *Les sujets de math du baccalauréat ES : le jour du bac, tu fais le con*, Martin Zerner, *in* Repères n° 36 (juillet 1999).
- *Mathématiques, économie et citoyens*, J-P. Hébert, *in* Bulletin APMEP n° 424 (septembre 1999).
- *Economie et mathématiques*, Ivar Ekeland, *in* Les mathématiques, Université de tous les savoirs (O. Jacob, 2000)
- *L'économie malade des mathématiques*, dossier de la revue Tangente n° 78 (décembre 2000)
- *Facs d'éco : le débat s'est-il dissous dans les maths ?* par S. Laguérodie et N. Thibault, *in* L'économie politique n° 9 (1er trimestre 2001).
- *Le décryptage de l'économie*, Ivar Ekeland, *in* Pour la Science n° 300 (octobre 2002)

Quelques sites Internet :

http://www.aromath.net (rubrique «Mathématiques et économie»)
http://www.ladocumentationfrancaise.fr/revues/pe/prixnobel/peprixnobel.pdf
http://www.fcomte.iufm.fr/discipli/ses/biblthem.htm (thème 18)
http://www.alternatives-economiques.fr
http://www.insee.fr

32 Le livret pédagogique correspondant est disponible en version papier pour la Première, en version électronique pour la Terminale sur le site www.editions-breal.fr