PRESENTATION ET DISCUSSION D'UNE ACTIVITE GEOMETRIQUE EN LIGNE SUR LE SITE « TABLEAU VIRTUEL »

Gérard KUNTZ
Irem de Strasbourg

Avant propos.

La première partie de l'article qui suit s'adresse prioritairement aux collègues peu familiers du travail en environnement informatique ou à ceux qui, sans manifester d'hostilité inconditionnelle, doutent de l'intérêt de ce type de travail. Il voudrait les inciter à regarder de près et sans a priori des activités que des collègues leur offrent gratuitement sur leur site. Il leur faut, pour cela dépasser deux difficultés non négligeables.

Sur l'écran informatique, les textes et les figures s'élaborent sous les yeux de l'utilisateur. Il est difficile de bien rendre compte par l'écrit de la dynamique d'un document au fil du temps.

Les difficultés techniques rebutent de nombreux collègues. Or, dans chaque établissement scolaire, un ou plusieurs enseignants les maîtrisent convenablement. Pourquoi ne pas leur demander de réaliser avec eux les démarches techniques qui donnent accès au contenu mathématique du site ? Regarder en commun la belle activité proposée ne prend pas beaucoup de temps. Elle peut susciter d'intéressantes discussions et un fructueux travail en commun.

L'article peut être lu en occultant les aspects techniques, dont le contenu mathématique est indépendant.

La seconde partie du texte est une réflexion sur les contenus des activités proposées en ligne (ou dans les livres). Elle concerne aussi et surtout les collègues utilisant couramment les TICE.

Voici l'étude d'une activité géométrique proposée sur le site « Tableau virtuel[1] » du portail de Sesamath. Je l'ai choisie parce qu'elle montre tout ce que peut apporter de novateur l'environnement informatique à l'apprentissage des mathématiques. Elle est remarquable sur les plans technique et esthétique. Conçue par Michel Souchet pour des élèves de Troisième, elle offre d'utiles révisions à ceux de Seconde et de Première. Elle rend possible *l'auto apprentissage* individuel ou en petit groupe (pourvu qu'on ait appris aux élèves ce qu'apprendre veut dire…). Des suggestions pour une activité plus ouverte, dans un esprit de collaboration mutualiste, compléteront la présentation[2].

Sur la page d'accueil du site, j'ai choisi le « niveau Troisième », et sous la rubrique « Géométrie », le « Théorème de Thalès ». Deux exercices y sont proposés, que l'on peut traiter en ligne, mais que j'ai préféré télécharger sous forme de fichier compacté (.zip) comme la possibilité en est offerte sur le site. J'ai ensuite décompacté ce fichier grâce au logiciel Winzip. L'activité choisie, mise en ligne par Michel Souchet, est présentée en *mode diaporama,* particulièrement intéressant en situation d'auto apprentissage.

Déroulement et commentaire du diaporama.

Un double clic sur le fichier html « menu » obtenu après décompactage et l'activité démarre. Comme un générique de film, la page d'ouverture se dessine, virevoltante, sous nos yeux. Des couleurs somptueuses. Voici le

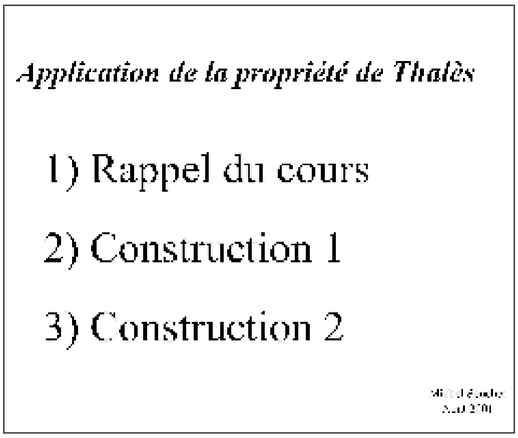


Figure 1

menu final, dépouillé de ses plus beaux atours, mouvement et couleurs (Figure 1)… Il reste à choisir parmi les trois propositions (rappel du cours et deux constructions), que nous allons examiner successivement. Quand la souris se place sur le texte « Construction 1 » ou « Construction 2 », l'énoncé des constructions demandées apparaît à l'écran.

Le rappel du cours est succinct et statique. L'auteur considère que le théorème de Thalès a été traité et qu'il est connu de la majorité des utilisateurs. Il rappelle que l'énoncé couvre trois cas de figures, selon les positions de N sur (AC), accessibles par un menu (1,2 ou 3). (Figure 2)

Passons à la première construction[3] (après retour au Menu initial). Ce qui se passe alors est délicat à expliquer sur papier et sollicite l'imagination du lecteur. *A chaque clic de souris, un élément d'information nouveau*

1 http://www.sesamath.net/Tableauvirtuel/

2 Un article analysant une activité de résolution de systèmes (sur le même site) a paru dans le bulletin de l'APMEP n° 443 (novembre-décembre 2002) sous le titre : « Un exemple d'utilisation du tableau noir virtuel ».

3 Un mot sur l'injonction « Tu dois construire ». Que signifie le mot construire dans ce contexte ? Assister à la construction ? Construire à la règle et au compas ? A la règle graduée ? Pourquoi ne pas profiter du contexte « Tableau Virtuel » pour demander une construction avec un logiciel de géométrie, Cabri ou Geoplan ?

Figure 2

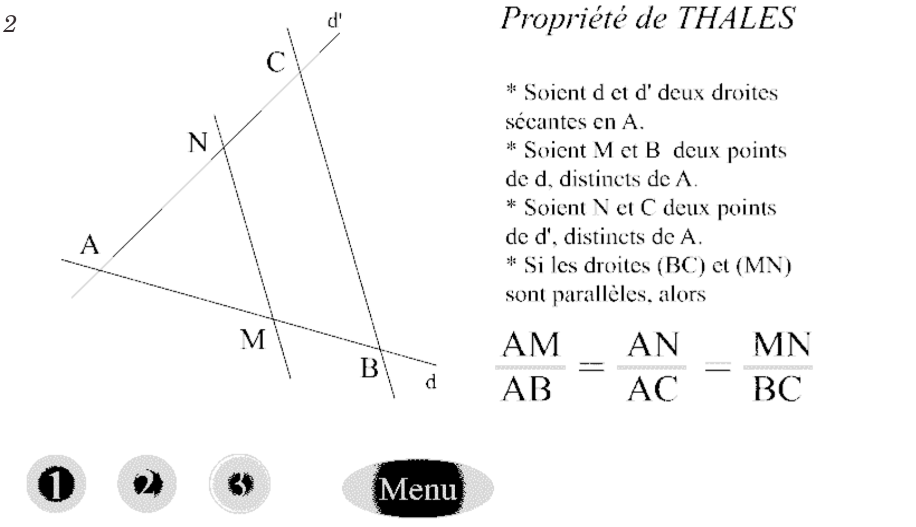
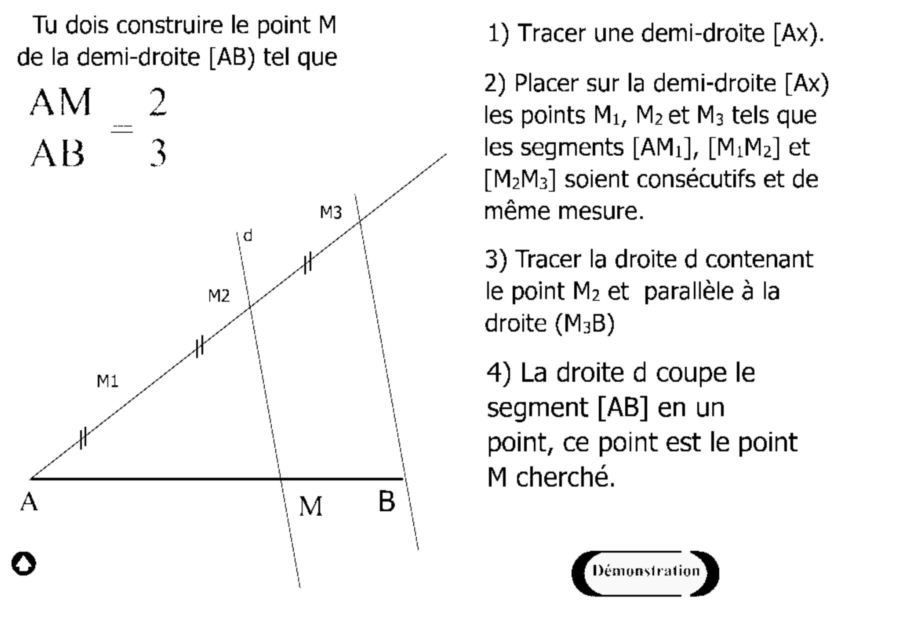


Figure 3



s'affiche, étape de la solution proposée. L'utilisateur est maître du déroulement de la séquence. *Il en fixe le rythme, par les clics successifs.* Il part de l'écran vide et le remplit à sa guise, jusqu'à l'écran final reproduit ci-dessous (Figure 3). Il peut revenir en arrière ou recommencer au début, autant de fois qu'il le juge utile.

Au clic initial, l'énoncé et le segment [AB] apparaissent à l'écran.

Au clic suivant, la droite auxiliaire se dessine, en même temps que la phrase 1.

A chaque clic, une nouvelle phrase s'inscrit à l'écran, en même temps que les éléments géométriques correspondants, joliment insérés en arabesques dans la figure en construction.

A tout moment, l'élève peut revenir en arrière ou recommencer au début s'il a perdu le fil.

La séquence décrite est une forme de cours dont *l'élève fixe le déroulement et surtout le rythme* [4]. C'est un progrès incontestable si l'on songe aux rythmes imposés des cours traditionnels, dans lesquels des élèves lents sont rapidement hors jeu, et où les rapides s'ennuient.

La démonstration proposée se fait (à la demande) de la même manière, pas à pas, chaque nouvelle étape étant commandée par l'utilisateur. En voici la scène finale (Figure 4).

La partie la plus intéressante de ce scénario pédagogique est à venir. A la fin de la démonstration, l'utilisateur a accès *à la figure animée,* en mode Cabri ou Geoplan, au choix ! (Michel Souchet ne fait pas dans la demi-mesure…). Voir ci-contre la figure Cabri Java (Figure 5)

Comme le texte le précise, la demi-droite [Ax), les points M1, A et B peuvent être saisis à la souris et déplacés. *L'utilisateur se convainc ainsi (de façon décisive* [5]*) que ni le choix (arbitraire) de [Ax), ni celui (tout aussi contingent) de la longueur AM1 n'ont d'influence sur le résultat.* Il vérifie qu'en déplaçant A ou B, *AM et AB varient sans que le rapport AM / AB en soit influencé* (un commentaire appuyé sur la valeur 0.67 serait bien utile [6]…).

L'accès de l'élève à la figure animée est essentiel en géométrie. Sesamath propose ici ce qui manque cruellement dans le CDROM ADI, classe de Troisième (Coktel) dont j'ai fait la critique dans un article précédent [7]***. Preuve qu'un site mutualiste et gratuit peut mieux faire qu'une filiale de Vivendi…***

La construction numéro 2 (celle de R tel que $\frac{RA}{RB} = \frac{7}{3}$) est menée comme la première. Il est inutile de la détailler. Elle a les mêmes qualités. Elle est tout aussi convaincante. *Un*

4 Mais l'élève n'a aucune prise sur le déroulement de l'activité ; il n'est à aucun moment convié à une activité heuristique. C'est une des limites importantes de ce travail : nous y reviendrons plus loin.

5 Mais cela pose aussi un vrai problème : si c'est la vérification qui convainc, quel est le statut de la démonstration ? Sans doute est-il nécessaire, pour emporter la conviction intime des jeunes élèves d'aujourd'hui, habitués à une démarche expérimentale, de montrer que la démonstration dit le vrai. Au fil du temps, constatant la fiabilité de la démonstration, ils auront moins besoin de vérifier…. C'est le pari que l'on peut raisonnablement formuler.

6 La confusion entre un réel et une valeur approchée décimale (constante avec les calculatrices et les logiciels) conduit de nombreux élèves à croire qu'il n'y a de nombres que …décimaux. Avec les conséquences que l'on sait.

7« Les mathématiques du petit extra terrestre ». Bulletin de l'APMEP n° 436, p. 671-683.

Figure 4

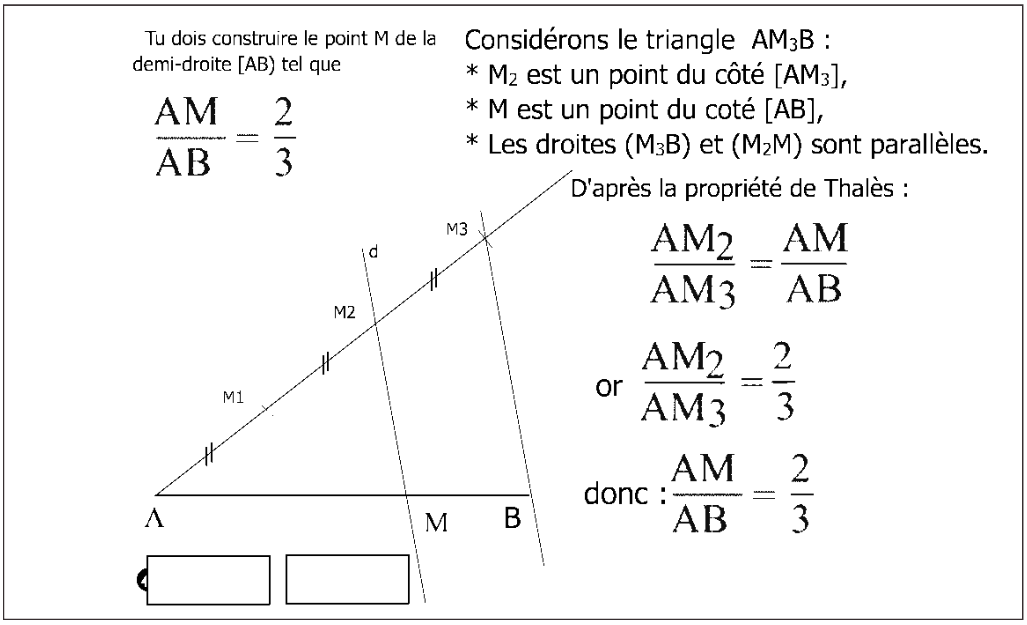
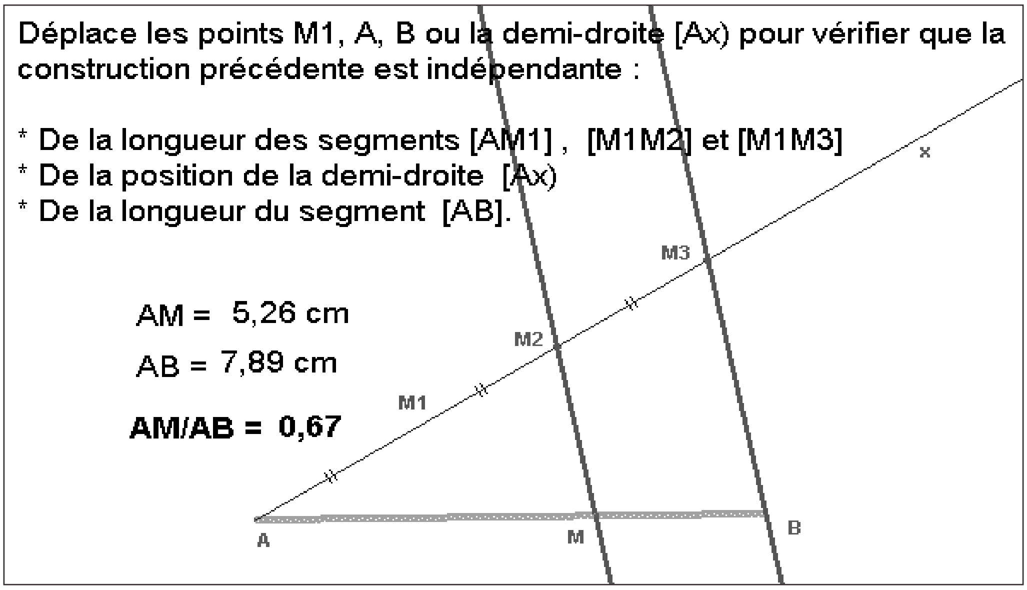


Figure 5



élève qui a appris à traiter l'information peut, seul ou en petit groupe, apprendre ces démarches (qu'ils retrouveront lors de l'étude des barycentres au lycée), avec *une aide limitée de l'enseignant*. Ce dernier pourra alors se consacrer à ceux, hélas nombreux, dont les lacunes dans le domaine rendent inopérants les scénarios pédagogiques les plus remarquables. A ceux-là, il faut apprendre *d'abord* les bases de ce traitement (lire, repérer les informations pertinentes dans la situation étudiée, établir des liens entre les informations disponibles, textes et figures en voie d'élaboration, etc.). Alors, mais alors seulement, ils pourront tirer parti de ce très beau document pédagogique.

Allez voir cette activité. Elle vous convaincra qu'une nouvelle façon d'apprendre les mathématiques est possible. Les outils sont disponibles … pour une large utilisation avec les élèves !

Des propositions pour une activité plus ouverte.

L'activité passée en revue est d'une conception très classique. On la trouve, avec des démarches analogues, dans les livres de classe ou dans les ouvrages d'exercices de révision pour le Brevet des Collèges. On y explique aux élèves *comment faire* pour réaliser les constructions demandées. On leur présente un *algorithme de résolution* : si vous faites ainsi, vous arriverez au résultat escompté. On leur *prouve* que les points obtenus conviennent. On ne se demande pas, en revanche, *si on a trouvé toutes les solutions.*

Notez *les impératifs* qui se succèdent dans la solution proposée. Ils sollicitent *la mémoire à court terme*[8]. C'est parfait pour réviser l'interrogation écrite à venir. C'est sans effet sur la formation scientifique d'un élève, si l'on entend par là sa capacité à résoudre *par lui-même* un problème.

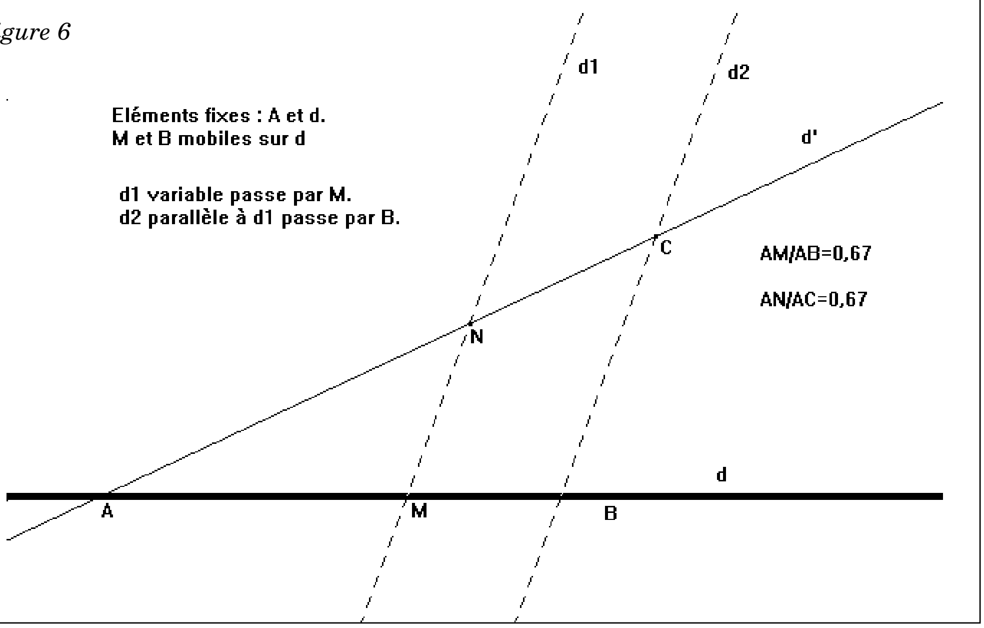
Quand on parcourt de nombreux sites de mathématiques, on est frappé par la multiplication de ce type d'exercices, bien plus nombreux que des exercices ouverts, demandant de l'initiative de la part des élèves. Cette prépondérance est-elle liée à l'acceptation par de nombreux enseignants de *l'école de la réussite immédiate*, celle qui privilégie les résultats des évaluations par rapport à la formation scientifique ? Est-ce lié à l'euphorie des professeurs-programmeurs, plus prompts à présenter *de belles activités qu'ils maîtrisent de bout en bout,* qu'à imaginer des situations potentiellement riches pour les élèves ? Est-ce le résultat d'apports *trop individuels* à ces sites, sans concertation préalable pour repérer et développer de telles situations-problèmes ? Toutes ces raisons concourent sans doute à cette distorsion. L'outil informatique n'est pas véritablement en cause : de très beaux problèmes ouverts sont offerts sur plusieurs sites d'enseignement.

Reprenons les problèmes de construction de Michel Souchet et essayons de les penser dans la perspective du *« pourquoi »,* afin que les élèves puissent répondre eux-mêmes au *« comment »*.

Ce projet passe par *un enrichissement-approfondissement du cours.* Le théorème de Thalès peut être formulé de différentes manières. L'énoncé rappelé plus haut est une *forme statique* du théorème. On peut l'énon-

8 C'est si vrai qu'une immense majorité d'élèves de Première S n'a aucun souvenir de ces constructions quand elles deviennent utiles, à propos des barycentres…

Figure 6



cer *en termes dynamiques*, traduisant le fait qu'une projection conserve les rapports. J'entends les hauts cris : la projection n'est pas au programme ! Certes, mais on peut formuler ce résultat autrement (en prenant soin d'éliminer les cas où certains rapports ne seraient pas définis) :

Soient d et d' deux droites sécantes en A et soient M et B deux points de d. Si deux droites parallèles passant par M et B coupent d' en N et C, alors le rapport $\frac{AN}{AC}$ *est le même que le rapport* $\frac{AM}{AB}$. *(figure 6)*

Le théorème de Thalès exprime sous cette forme *la conservation d'un rapport* par transport de points de d sur d'. Formulation importante, car elle prépare l'élève à l'idée forte *d'invariants par transformation*.

Autre forme, plus inhabituelle du même théorème (là encore, il faut écarter les situations où certains éléments dégénèrent) : Si [BC] et [MN] sont deux segments parallèles et si (BM) et (CN) se coupent en A, alors le rapport

$\frac{AM}{AB}$ *est le même que le rapport* $\frac{AN}{AC}$.

Le théorème affirme, sous cette forme, qu'il est possible de *reporter sur (BM) un rapport de longueur initialement connu.*

Et cela de deux manières : en effet, les segments parallèles sont soit de même sens, soit de sens contraire (Figure 7).

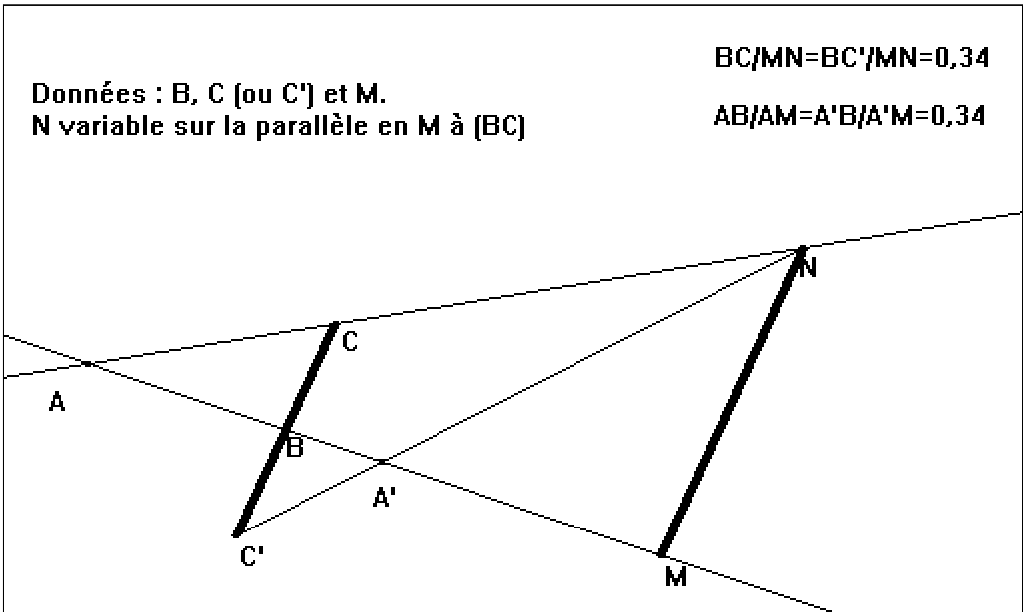


Figure 7

Trois regards différents sur une même situation géométrique conduisent à trois énoncés différents. En plus du travail mathématique d'imagination, la reformulation d'un énoncé est capitale pour un élève, dans la perspective de la maîtrise de la langue.

J'invite Michel Souchet à mettre en œuvre son art de la programmation pour *montrer* aux élèves la richesse du changement de regard. Dans le premier cas, la figure est *une donnée globale.* Dans les deux autres, la figure est élaborée *à partir d'éléments partiels* (les données) et achevée par des constructions simples, mais différentes dans les deux cas. La mise à disposition des élèves (dans les deux derniers cas) de la figure dynamique serait très parlante.

Dans le premier cas dynamique, il faut pouvoir déplacer M et B sur d, mais aussi d' et la direction des parallèles. L'invariant est alors bien mis en évidence.

Dans le second, le déplacement d'un des segments parallèles et la possibilité de faire varier sa longueur (donc le rapport initial donné) emportent la conviction de l'utilisateur qu'il existe bien un invariant.

Si on dispose d'un peu plus de temps, on pourrait demander aux élèves de faire eux-mêmes ces constructions simples avec Cabri.

On le voit, dans la perspective proposée, le travail sur le cours est plus élaboré que d'habitude. Il fait passer de nombreuses idées qui deviendront essentielles au fil de la scolarité. C'est un prix à payer pour rendre les élèves plus autonomes dans la résolution de problèmes.

Une dernière remarque : construire deux segments dont le rapport de longueur est une fraction rationnelle (sans autre contrainte) est facile. La longueur de l'un est, en nombre d'unités, le numérateur, celle de l'autre, le dénominateur. Ces segments peuvent alors être mis dans les configurations qui nous intéressent (même origine sur une droite ou parallèles).

Un point de vue, complémentaire et critique de la démarche qui précède est proposé par Jean-Paul Guichard , un des relecteurs de l'article. « S'il est essentiel de mettre à la disposition des élèves plusieurs lectures d'un même théorème (ici le théorème de Thalès), ces lectures peuvent se construire dans le temps, au fil des années de scolarité de l'élève.

Il est difficile de donner *d'emblée* ces différentes lectures, comme ici, en Quatrième ou en Troisième, celle du rapport de projection. Il me semble en revanche que dans l'introduction des notions ou théorèmes nouveaux, il faudrait donner *un point de vue intuitif riche* pour permettre un travail heuristique d'interprétation.

Par exemple, si l'égalité des rapports dans le théorème de Thalès est vue comme *l'expression du rapport de réduction ou d'agrandissement* de deux figures semblables ou homothétiques [9], l'élève pourra engager un travail heuristique pour réaliser lui-même la première construction proposée sur le site.

$\frac{AM}{AB} = \frac{2}{3}$ peut alors être appréhendé comme le rapport de réduction de deux longueurs. Cela fait penser à Thalès, il faudrait donc compléter la figure en un triangle ABC coupé par une parallèle à (BC). Il faudrait que les dimensions du « petit triangle » AMC' soient les $\frac{2}{3}$ de celle du « grand » ABC. Or je peux placer C comme je veux (point libre). Je peux choisir par exemple AC = 3 cm et AC' = 2 cm. On a alors $\frac{AC'}{AC} = \frac{2}{3} = \frac{AM}{AB}$.

Pour quelqu'un qui a fait ce travail heuristique, la vérification du fait que $\frac{AM}{AB} = \frac{2}{3}$ quand on fait bouger C, A ou B *n'offre plus guère d'intérêt*. »

Les deux points de vue conduisent à rechercher, par des voies différentes, *comment conduire les élèves à résoudre le problème par eux-mêmes*, plutôt que d'imiter une démarche toute faite (qu'ils oublieront rapidement, l'expérience le prouve amplement).

Enfin, avant de proposer les constructions de l'exercice aux élèves, il n'est pas inutile *d'en justifier l'intérêt,* d'autant qu'on en a ici une interprétation physique simple, le théorème des moments. Dans le cadre des travaux interdisciplinaires que l'Institution se plait à magnifier, la recherche expérimentale du point d'équilibre d'une baguette lestée aux extrémités de deux poids est une belle illustration. Faute de temps, on peut donner cette loi à la classe, en la commentant soi-

9 Voir sur le site de l'IREM de Poitiers une introduction dynamique de Thalès privilégiant l'homothétie à la rubrique : Ressources/Histoire des mathématiques/4ème/Thalès.

gneusement [10]. On a alors une situation qui conduit tout droit à l'un des problèmes étudiés plus haut. Et qui se verra évidemment rappelée au lycée, dans le cadre des barycentres.

Je remplacerais alors volontiers les deux questions du début par celles-ci :

Un mobile est constitué d'une baguette très légère de longueur 50 cm et de deux objets pendus à ses extrémités, de masses respectives 300 et 700 g. Où faut-il attacher le fil de suspension pour que la baguette soit en équilibre ? Combien y a-t-il de solutions ?

Construire la figure avec Cabri. Comment évolue le point M trouvé si on change la longueur de [AB] ? Si on modifie les masses des objets suspendus en A et B ?

Bien entendu, un tel énoncé ne se prête pas à une évaluation en temps limité ! C'est le type même de problème qui peut être *réfléchi et débattu* en classe entière, sans doute après une recherche personnelle. Quelles idées mettre en œuvre ? A quoi ce problème se rattache-t-il ? Que faire *du second point trouvé ?* Après avoir débroussaillé la situation, *une rédaction individuelle ou en petit groupe,* avec l'aide de l'enseignant, fera le point des connaissances acquises.

Rien n'empêche ensuite de formuler une question analogue pour la construction 1, plus simple, qui utilise notre deuxième formulation du théorème de Thalès.

Les deux activités décrites dans cet article, sont de conception et de nature très différentes. Elles répondent à deux préoccupations complémentaires. La première met l'accent sur l'apprentissage de connaissances et la pratique d'outils de base. Elle se prête bien à la préparation d'évaluations et d'examens. Nous l'avons tous pratiquée. Mais si on se limite à ce type d'activité (la tentation est forte et pas seulement en mathématiques…), on aura de plus en plus d'élèves qui « réussissent au baccalauréat scientifique » sans réelle formation et qui, réalistes, se détournent des études scientifiques.

Il faut donc compléter cette façon d'apprendre à court terme par un travail important sur les énoncés mathématiques, leur sens et leur utilisation. Compléter les énoncés par une importante réflexion heuristique pourra aider certains élèves à passer du « comment fait-on ? » au « pourquoi telle méthode a-t-elle certaines chances d'aboutir ? ».

Le déséquilibre entre les deux types d'activités est trop grand actuellement en faveur du premier sur de nombreux sites d'enseignement des mathématiques (mais aussi dans trop de livres). Cet article veut aider à en faire prendre conscience. Non par une critique stérile, mais par des propositions concrètes et constructives que le débat permettra d'améliorer.

10 On peut même empiéter sur le domaine artistique en évoquant les mobiles de Calder.

Annexe « archaïque ».

Dans son commentaire de l'article, un des relecteurs, Henri Lombardi, écrit avec humour (je le soupçonne teinté d'ironie) : « L'article pourrait suggérer l'activité « Thalès avec un traceur de parallèles [11] », à faire en classe avec ce merveilleux instrument, bien moins cher qu'un ordinateur et aussi efficace pour le thème considéré. Le traceur de parallèles peut être avantageusement utilisé pour reporter des longueurs égales sur une même droite ou sur des droites parallèles. Les parallélogrammes que trace aisément l'instrument, nous dispensent du cadre métrique en nous imposant le leur, qui est purement affine. La relation étroite entre parallélisme et égalité de longueurs (sur des parallèles) est quatre fois mise en évidence par le parallélogramme : deux fois sur les côtés opposés et deux fois sur les diagonales. »

Economie de moyens, économie de pensée, le traceur de parallèles n'a rien à envier à l'ordinateur (si on considère ce qu'apprend un élève en s'en servant) …

11 Il s'agit d'un cylindre portant une règle (non graduée) et se déplaçant perpendiculairement à la direction de la règle. La « carolette » (c'est son nom) permet de construire aisément les parallélogrammes dont toute la géométrie affine découle.