LES PUISSANCES DE DIX ET LES CALCULATRICES EN QUATRIEME

Chantal GOBIN, Madeleine MAROT
Irem de Poitiers

En quatrième, les puissances de dix sont très utilisées en physique, en chimie, en technologie et en mathématiques. Elles sont d'une grande utilité. Elles permettent d'écrire des nombres très grands ou très petits sous une forme plus simple, plus condensée, plus compréhensible à la première lecture que des nombres écrits sous forme décimale ou fractionnaire. La lecture de ces nombres est facilitée. Il en est de même pour les calculs qui deviennent alors moins fastidieux et sujets à moins d'erreurs. Il nous semble donc important, dans un premier temps, d'insister sur les différentes écritures des nombres. Comme de nombreuses activités liées à l'usage des puissances de dix utilisent largement les calculatrices, dans un deuxième temps, nous regarderons en quoi ces calculs à la machine sont limités et comment essayer de dépasser ces limites.

1 – Différentes écritures d'un nombre

Dans le souci de travailler par activités et de faire découvrir par les élèves les différentes écritures d'un nombre, nous avons recherché une activité d'approche qui les confronte à ces différentes écritures et les amène à se poser des questions sur leur signification, sur la notion de valeur exacte et de valeur approchée et sur l'affichage de leur calculatrice.

Cette activité s'inspire d'un article paru dans le numéro hors série n° 26 de « ça m'intéresse » portant sur les nombres (octobre 96).

On en trouvera le texte à la page suivante. Celui-ci est ditribué aux élèves. Ils doivent d'abord comprendre la situation puis

La multiplication des grain

Une légende affirme que le jeu d'échecs a été inventé par un savant indien, Sissa ben daher. Quand l'empereur Sheram apprit que l'inventeur était un de ses sujets, il le fit mander au palais.

— Sois remercié pour ce jeu qui égaie le soir de ma vie. Quelle récompense souhaites-tu ?

Sissa demeura silencieux.

— Eh bien, s'impatienta l'empereur, parle donc, insolent : craindrais-tu que je ne puisse exaucer ton désir ?

Sissa fut blessé par le ton de Sheram. Il jugea que cela méritait une leçon.

— Soit, finit-il par dire, j'accepte un présent, Ô souverain !

— Ah ! Et quel est-il ?

— Ordonne que me soit remis un grain de blé pour la première case de l'échiquier.

— C'est tout ? Te moquerais-tu de moi, chien galeux ? !

— Non, Sire. Ordonnez ensuite que me soient remis 2 grains de blé pour la deuxième case, puis 4 pour la troisième, 8 pour la quatrième, 16 pour la cinquième et ainsi de suite, jusqu'à la soixante-quatrième case en doublant le nombre de grains à chaque fois.

L'empereur se sentit piqué au vif.

— Tu me montres bien peu de respect en honorant si mal ma générosité. Tant pis pour toi ! Va-t'en, mon intendant te fera porter demain ton sac de blé.

Le lendemain à l'aube, l'empereur fut réveillé par l'intendant. Celui-ci semblait terrifié.

— Sire … Sire … nous ne pouvons livrer le blé !

— Que me chantes-tu là, Barbapoux ? Serais-tu devenu fou !

L'intendant tremblait de tous ses membres.

— Sire, vos mathématiciens ont travaillé toute la nuit. Leur conclusion est que votre royaume ne contient pas assez de blé pour exaucer le vœu de Sissa.

— Mais enfin, quel est ce nombre si grand qui naît d'un petit échiquier ?

— Dix-huit quadrillions quatre cent quarante-six trillions sept cent quarante-quatre billions soixante-treize milliards sept cent neuf millions cinq cent cinquante et un mille six cent quinze grains de blé, Sire !

Remarque :

Pour stocker pareille quantité de grains de blé, l'empereur devrait accumuler toutes les moissons réalisées sur la Terre pendant 5 000 ans ! Si son grenier mesurait 8 mètres de large sur 10 mètres de long, sa hauteur devrait être de 150 millions de kilomètres, soit la distance moyenne entre la Terre et le Soleil !

Question :

Combien devrait-il y avoir de grains de blé sur la dernière case ?

élaborer des stratégies pour approcher la réponse.

Certains, trop rapides, ayant mal lu la question posée, fournissent une réponse donnant le nombre total de grains sur l'échiquier, nombre donné en français dans le texte et traduit en écriture décimale, ce qui donne :

18 446 744 073 709 551 615

et cette transformation a demandé pour quelques uns des efforts de recherche concernant le vocabulaire de la numération des grands nombres (billions, trillions, quadrillions) ; à ce propos, il faut signaler que les indications du document correspondent à la valeur d'avant 1948.

Une fois relancée, la recherche se poursuit souvent en s'appuyant sur le dessin de l'échiquier sur lequel les élèves inscrivent dans les cases le nombre de grains qu'elles contiennent. Mais les nombres deviennent vite grands et la place manque ! Cependant les élèves persévèrent et quand on atteint la vingt-huitième case, la calculatrice change de notation et donne un nombre bizarre à leurs yeux :

$$1,3421773\ ^{08} \quad \text{ou} \quad 1,3421773 \times 10^{08}.$$

Il s'en suit donc une nouvelle interrogation des élèves.

Une synthèse s'avère alors nécessaire et porte sur les différentes manières d'écrire un nombre :

— l'écriture en lettres
— l'écriture décimale
— l'écriture fractionnaire
— l'écriture sous forme de puissances (puissances de 2 en l'occurrence)
— l'écriture en notation scientifique

l'accent est mis surtout sur les deux dernières qui constituent les nouveautés.

Cela permet aux élèves de continuer la recherche pour la dernière case. Quelques hésitations encore entre 2^{63} et 2^{64} pour la valeur exacte, un retour est nécessaire sur le nombre de la première case et son écriture en puissance de 2 ; pour calmer les discussions, il est alors suggéré d'avoir une « idée » de ce nombre, d'en trouver un ordre de grandeur. La machine permet de vérifier que 2^{10} est voisin de 1000 ou 10^3. On peut alors décomposer 2^{63} en :

$$2^{10}\times 2^{10}\times 2^{10}\times 2^{10}\times 2^{10}\times 2^{10}\times 2^{3}$$

et montrer que 2^{63} est voisin de :

$$10^{3}\times 10^{3}\times 10^{3}\times 10^{3}\times 10^{3}\times 10^{3}\times 2^{3}$$

c'est-à-dire :

8 000 000 000 000 000 000

ou 8×10^{18}.

Ensuite surgit un nouveau débat sur

$$9,223372\ ^{18} \quad \text{ou} \quad 9,223372 \times 10^{18}$$

donné pour l'écriture scientifique de ce nombre : est-ce une valeur exacte ou une valeur approchée ?

A ce stade, nous avons pu faire la mise au point sur les notions de valeur exacte et de valeur approchée, sur une gestion rationnelle des calculs en liaison avec la connaissance des touches x^y, $\times 10^p$, $\uparrow$, EE, EXP des calculatrices, sur l'affichage et son interprétation.

Il est important de sensibiliser les élèves d'une part à ces différentes écritures non de manière formelle mais parce qu'elles s'imposent par la situation, ce qui leur donne du sens et une existence utile , et, d'autre part, à une bonne utilisation de leur calculatrice pour les obtenir.

Cependant malgré les divers travaux d'initiation menés en classe des obstacles apparaissent.

— La touche EXP ou EE est source d'erreurs. Les élèves la confondent avec la touche x^y ou y^x car, pour eux EXP signifie exposant.

Ainsi pour entrer dans la machine 5^4, ils tapent 5 EXP 4. Il serait donc utile de consacrer un peu plus de temps à la connaissance de ces différentes touches.

Voici quelques exercices possibles :

> Taper : 5 EXP 4 et 5 x^y 4
> 10 EXP 4 et 10 x^y 4
>
> Que remarque-t-on ?
>
> Taper 5 EXP 4 – 50 000.
>
> Qu'obtient-on ?
>
> 5 x^y 4 – 50 000 ou 5 x^y 4 – 625
>
> Qu'obtient-on ? Pourquoi ?

Il est important de souligner que : 10 EXP 4 donne 10×10^4 soit 10^5 et non 10^4. Il faut donc, à ce propos, rappeler que la calculatrice affiche l'écriture scientifique d'un nombre et revenir à l'explication de l'affichage « 5 04 » de certaines calculatrices.

— Cet affichage est lui aussi source d'erreurs. Combien d'élèves le lisent 5^{04} et non 5×10^4. Cela reste bien ancré dans leur tête d'autant que souvent 04 est écrit en petits caractères, en haut, à droite de l'écran, comme un éventuel exposant !

Une fois les différentes formes découvertes, il est nécessaire de travailler sur le passage d'une écriture à une autre.

Si les élèves connaissent des écritures telles que $2,87438 \times 10^7$, il n'en demeure pas moins que sa transformation en $287,438 \times 10^5$ est une réelle difficulté de même que le passage de $4725,638 \times 10^4$ à l'écriture scientifique correspondante.

Ce travail prend tout son sens si on l'effectue en deux étapes :

$$4725,638 \times 10^4 = (4,725638 \times 1000) \times 10^4$$
$$= 4,725638 \times 10^7.$$

Pour certains élèves concevoir que si le nombre décimal diminue l'exposant augmente mais que le nombre reste le même est un réel obstacle à franchir.

Ceci nécessite une bonne connaissance des produits (ou des quotients) des nombres décimaux par 10, 100, 1000 …, étudiés depuis la classe de sixième.

Et cette difficulté est encore plus grande quand il s'agit de puissances d'exposants négatifs!

2 – Limites de la machine.

La première limite de la calculatrice concerne son affichage.

Calculer à la machine : 10 000 000 000 + 1

La calculatrice TI Galaxy 40, par exemple, affiche 1 000 000 001 et non 10 000 000 001. Seuls les dix premiers chiffres tapés sont pris en compte. Il en est de même pour les calculatrices de marques différentes où le nombre de chiffres affichés varie. Ces calculatrices n'envoyant aucun message d'erreur quand leur capacité est dépassée, les élèves ne mettent nullement en cause les résultats affichés. Nous sommes donc amenés à demander aux élèves de prendre du recul devant les nombres qu'ils tapent, de faire mentalement le calcul, d'en donner un ordre de grandeur. C'est là que les différentes écritures d'un nombre vont être utiles.

Mais alors se pose la question de la fiabilité des valeurs affichées par la calculatrice. Dans quelle mesure pouvons-nous faire confiance à la machine ?

Pour chacun des exercices suivants, cherchons d'abord un ordre de grandeur du résultat, calculons-le à la main puis examinons ce qu'affiche la calculatrice

Exercice 1 : Calculer : $10^6 + 10^{-6} - 10^6$

L'ordre de grandeur proposé par les élèves est 0. Le calcul à la main donne 10^{-6}, les élèves ayant repéré assez vite $10^6 - 10^6$. La machine affiche 0, elle néglige 10^{-6}. Elle affiche encore 0 si nous recommençons le calcul avec un exposant supérieur à 6 ; en revanche, nous obtenons la valeur exacte pour un exposant inférieur à 6.

Si nous remplaçons $10^6 + 10^{-6} - 10^6$ par

$$(10^6 + 10^{-6} - 10^6) / 10^{-6}$$

l'ordre de grandeur pose des problèmes aux élèves, certains proposent 0, sans commentaires, d'autres sont arrêtés par 0 divisé par 0 (on ne peut pas diviser par 0 !), quelques-uns signalent que 0 divisé par quelque chose fait toujours 0 ! Le calcul à la main s'avère plus facile, quant à la machine, elle affiche toujours 0 alors que le résultat est 1.

Exercice 2 : Calculer : $(10^{20} + 10^{-20})^2 - (10^{20} - 10^{-20})^2$

L'ordre de grandeur proposé est 0 ce qui est conforté par la machine. Une fois encore, celle-ci néglige 10^{-20} et donne une valeur approchée à une dizaine près, la valeur exacte étant 4. Mais si nous remplaçons :

$$(10^{20} + 10^{-20})^2 - (10^{20} - 10^{-20})^2$$

par

$$[(10^{20} + 10^{-20})^2 - (10^{20} - 10^{-20})^2] / 10^{-12}$$

nous obtenons encore 0, alors que la valeur exacte est, cette fois-ci, 4×10^{12} !

Cet exemple peut nous permettre de montrer aux élèves qu'il faut être vigilant devant l'affichage de la machine, qu'ici, le calcul littéral s'avère utile.

En effet, en développant :

$$(a + b)^2 - (a - b)^2,$$

nous obtenons 4 ab et pour

$$a = 10^{20} \text{ et } b = 10^{-20},$$

nous retrouvons le résultat, soit 4.

Ainsi, quand nous faisons avec la calculatrice des calculs utilisant des grands nombres ou des très petits, nous obtenons la plupart du temps une valeur approchée du résultat, ce que les élèves ne prennent pas toujours en compte. Il semble donc important de leur demander d'avoir une attitude de vigilance et de contrôle par rapport aux différents affichages de la machine et aux résultats qu'elles donnent en recherchant mentalement un ordre de grandeur du résultat ce qui nécessite un apprentissage des règles de calcul sur les puissances.

3 – Comment dépasser les limites de la calculatrice ?

Par les exemples précédents, nous avons montré comment « désacraliser » la calculatrice auprès des élèves. Non pas qu'il faille en interdire l'utilisation mais faire en sorte que les résultats qu'elle donne soient acceptés avec un regard critique !

Ceci impose que l'élève analyse, organise son calcul, connaisse les règles de calcul sur les nombres et les utilise correctement pour vérifier le résultat.

C'est ce à quoi il est confronté dans les deux exemples suivants.

Premier exemple, toujours sur le jeu d'échecs :

Combien de parties différentes le jeu d'échecs permet-il ?

On serait bien en peine de le déterminer avec précision ! Cependant le mathématicien belge Kraitchik a obtenu une approximation intéressante.

En attribuant en moyenne 20 variantes à chacun des adversaires pour les cinq premiers coups et 30 variantes pour les coups suivants, il a estimé le nombre de parties réglementaires (40 coups) à :

$$N = (20 \times 20)^5 \times (30 \times 30)^{35}.$$

Notre but est d'obtenir un ordre de grandeur du nombre N, c'est-à-dire d'en avoir une écriture scientifique approchée.

a) Avec la calculatrice peut-on calculer cette valeur ?

b) Sans la calculatrice, déterminer une écriture scientifique de $(20 \times 20)^5$.

c) Sans la calculatrice, donner l' écriture scientifique de 30×30.

d) A l'aide de la calculatrice, peut-on calculer une écriture scientifique approchée de $(30 \times 30)^{35}$?

Si oui, écris le résultat, sinon comment peut-on utiliser le résultat de c) pour y arriver ?

e) Donner un ordre de grandeur du nombre N.

A la première question, la calculatrice renvoie à l'élève un message d'erreur. Une réflexion sur la gestion des calculs et des règles à utiliser lui permet ensuite de répondre aux autres questions.

On obtient par exemple :

$(20 \times 20)^5 = 400^5 = 4^5 \times 10^{10}$
$\approx 1,024 \times 10^{13}$

ou bien

$(20 \times 20)^5 = 2^{10} \times 10^{10}$
$\approx 1,024 \times 10^{13}$

Puis

$(30 \times 30)^{35} = 900^{35} = 9^{35} \times 10^{70}$
$\approx 2,5 \times 10^{33} \times 10^{70}$
$\approx 2,5 \times 10^{103}$

ou

$(30 \times 30)^{35} = 3^{70} \times 10^{70}$
$= (3^{10})^7 \times 10^{70}$
$\approx (5,9 \times 10^4)^7 \times 10^{70}$
$\approx 2,5 \times 10^5 \times 10^{28} \times 10^{70}$
$\approx 2,5 \times 10^{103}$

Et ensuite un ordre de grandeur pour le nombre N : $N \approx 2,5 \times 10^{116}$.

Dans cet exemple, l'élève mène de front le calcul à la main, réfléchi, en utilisant les différentes écritures, les règles sur les puissances et le calcul à la calculatrice afin d'obtenir les écritures scientifiques approchées et un ordre de grandeur du nombre N.

De plus, cette activité montre la place et l'intérêt des puissances de 10 et de l'écriture scientifique pour les grands nombres.

Deuxième exemple :

> Fermat pensait que tous les nombres de la forme $2^{2n} + 1$ n'avaient que deux diviseurs : l'unité et le nombre lui-même.
>
> a) Vérifie-le pour n = 0, n = 1, n = 2.
>
> b) En 1980, F.Laudry montra que :
>
> $2^{64} + 1 = 274\ 177 \times 67\ 280\ 421\ 310\ 721.$
>
> Vérifie cette égalité.

Bien sûr l'élève va tenter d'obtenir le résultat en tapant les deux nombres sur la machine, mais le résultat affiché est :

$$1,8446744 \times 10^{19},$$

ce qui ne correspond pas au produit exact. Alors comment s'organiser ?

C'est là qu'il faut faire le lien avec ce que l'on sait faire et notamment penser à écrire les nombres différemment et à employer la double distributivité et les règles sur les puissances pour calculer.

On peut obtenir ainsi :

$\mathbf{2^{64} + 1 =}$

$= 2^{10} \times 2^{10} \times 2^{10} \times 2^{10} \times 2^{10} \times 2^{10} \times 2^4 + 1$

$= 1\ 024 \times 1\ 024 \times 1\ 024 \times 1\ 024 \times$
$\times 1\ 024 \times 1\ 024 \times 16 + 1$

$= 1\ 048\ 576 \times 1\ 048\ 576 \times 16\ 777\ 216 + 1$

$= (104 \times 10^4 + 8\,576) \times (104 \times 10^4 + 8\,576)$
$\quad \times (1\,677 \times 10^4 + 7\,216) + 1$

$= 18\,436\,938 \times 10^{12} + 98\,051\,378 \times 10^8$
$\quad + 93\,585\,344 \times 10^4 + 56\,111\,617$

$= 18\,446\,744\,073\,709\,551\,617$

et :

274 177 × 67 280 421 310 721 =

$= (274 \times 10^3 + 177) \times$
$\quad \times (6\,728 \times 10^9 + 4\,213 \times 10^5 + 10\,721)$

$= 1\,843\,472 \times 10^{13} + 1\,154\,362 \times 10^8$
$\quad + 2\,937\,554 \times 10^3 + 1\,190\,856 \times 10^{10}$
$\quad + 745\,701 \times 10^5 + 1\,897\,617$

Il ne reste plus qu'à poser l'addition et calculer pour obtenir le même nombre que précédemment.

Là encore, on est conduit à mener simultanément des calculs à la main et des calculs avec la calculatrice tout en faisant fonctionner des règles sur les nombres, les puissances et la double distributivité.

En conclusion, nous voudrions rappeler que tous ces apprentissages sont au programme de la classe quatrième et que l'utilisation des calculatrices nous pousse à rechercher des activités qui, d'un côté répondent aux objectifs du programme et d'un autre côté donnent du sens aux différentes notions abordées.

Nous cherchons aussi à permettre aux élèves d'avoir une attitude critique face à un calcul. Nous aimerions qu'avant de taper des nombres sur une calculatrice, les élèves « regardent » le calcul, qu'ils évaluent un ordre de grandeur du résultat et qu'ensuite, ils utilisent la machine. Nous sommes conscientes que ces exigences vont à l'encontre de ce que font les élèves dans un premier temps, la machine semblant les sécuriser.

Il s'agit également de faire prendre conscience aux élèves que ces nouvelles écritures sont utiles et facilitent le travail sur les grands et les petits nombres, qu'il est important de jeter un regard critique sur les résultats donnés par les outils modernes et, pour cela, de connaître les règles qui régissent les calculs tout en menant une réflexion préalable pour s'organiser.