
DEMONTRER, POURQUOI ?

Michel CARRAL
IUFM Midi-Pyrénées

La question du pourquoi démontrer se pose implicitement lorsque quelqu'un vient vous proposer un problème (ou un exercice), vous disant qu'il a une solution mais que celle-ci ne lui convient pas, bien qu'elle soit exacte et qu'elle réponde à la question ! Cette situation se rencontre fréquemment en géométrie. Comme il est clair que plusieurs solutions ne rendent pas un résultat plus "juste" ou plus "vrai", que recherche-t-on dans une démonstration ? Quel est l'implicite d'une telle question ? Des réponses à cette question se trouvent dans des articles considérant le rôle de la démonstration et son essence.

Je l'ai à nouveau rencontrée lors d'un stage de formation continue avec des professeurs de mathématiques qui m'ont proposé un exercice de géométrie ; au lieu de me commettre à répondre directement à la question du titre j'ai essayé d'y répondre en donnant différentes solutions à cet exercice, de les commenter et de les situer par rapport à des articles sur la démonstration, en particulier avec celui

de R. Bkouche¹ qui écrit à ce sujet : « On comprend mieux le rôle d'explication de la démonstration lorsque l'on sait qu'une même propriété peut être démontrée de plusieurs manières. Il est clair que la multiplicité des démonstrations ne rend pas plus vrai un théorème, elle en montre cependant les divers aspects et par cela même participe de la construction des objets mathématiques en jeu... ».

Le raisonnement en géométrie est étroitement lié à l'action de construction (mentale) d'une figure comme le remarque E. Barbin² et une démonstration donnée permettra plus ou moins cette construction avec des sens pouvant être différents ou complémentaires, de par la compréhension des figures qui lui sont liées. Ceci lui fait dire que « De ce point de vue, les cas d'égalités des triangles sont des raisonnements qui permettent de construire

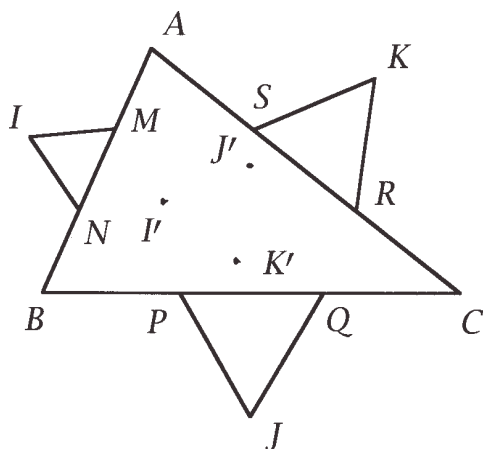
1 De la démonstration en géométrie, R. Bkouche, in *Le Dessin Géométrique de la main à l'ordinateur*, Actes du Colloque Inter-IREM Géométrie, 16-17-18 Juin 1994.

2 Le rôle de la démonstration dans l'étude des figures géométriques, E. Barbin in *Ibidem*.

DEMONTRER,
 POURQUOI ?

des figures ». Mais restons-en là pour l'instant et regardons l'énoncé proposé :

Dans un triangle quelconque ABC on note M et N, P et Q, R et S les points divisant les côtés AB, BC, CA en trois parties égales. Sur les segments MN, PQ, RS on construit extérieurement au triangle ABC les triangles équilatéraux MNI, PQJ, RSK. Démontrer que le triangle IJK est équilatéral.



Note : Notons que pour montrer que le triangle IJK est équilatéral il suffit de montrer que deux de ses côtés sont égaux (ou isométriques) ; ceci est dû au caractère générique de l'énoncé.

On peut aussi considérer le problème "symétrique" obtenu en construisant les triangles équilatéraux "internes" au triangle ABC, c'est-à-dire rabattus sur le triangle ABC au lieu d'être placés à l'extérieur. En effet si avec un logiciel de Géométrie interactif comme Cabri on construit la figure précédente à partir des points A, B, C, et si on fait ensuite glisser le sommet A jusqu'à l'amener dans une position symétrique à la position initiale par rapport à la droite BC, on voit que les rôles

des points I, J, K d'une part et des points I', J', K', d'autre part sont échangés. La question est alors de savoir si les démonstrations que l'on peut donner sont les mêmes *modulo* une certaine continuité.

Si on fait un dessin on peut le penser, et le mouvement avec un tel logiciel permet de conforter cette hypothèse, surtout s'ils possèdent une commande du type « vérifier une propriété » ou permettant d'utiliser un tableau. Toutefois, comme le précisent les constructeurs de ces machines : *elles ne démontrent pas*. On peut même ajouter que ces commandes ne portent pas en elles une idée de démonstration, elles ne font que des calculs numériques (approchés) sur des exemples particuliers (Cabri II « vérifie » sur l'exemple affiché). Ce qui fait que même si ces calculs étaient exacts on ne peut rien affirmer quant à la généralité du résultat, même si, utilisant le côté dynamique du logiciel, les exemples obtenus, qui sont en nombre fini et sur lesquels portent les calculs, sont pris au hasard. Ceci ne peut être un semblant ou une indication de démonstration, mais c'est la continuité des situations géométriques avec les propriétés qui leur sont propres qui permet cette extrapolation de l'utilisateur et entraîne sa certitude. En effet si les côtés d'un triangle sont de mesure presque 3, 4, 5, le triangle est presque rectangle et si sur des constructions génériques un triangle est presque rectangle il est presque certain qu'il le soit presque toujours ! C'est peut-être une des raisons qui permettent de conjecturer une propriété d'une figure géométrique à partir d'observations sur un ou plusieurs dessins représentant cette figure.

Avant d'explorer cette figure par une série de démonstrations posons la question : Que peut-on dire du triangle "interne" I'J'K' ? Essayer d'y répondre après chaque démon-

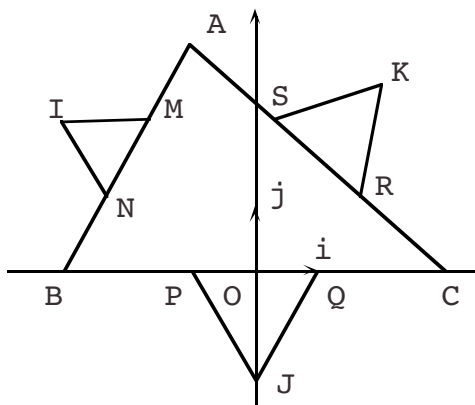
tration proposée en reprenant son esprit permet d'avoir une compréhension plus complète de la configuration, et parfois d'arriver à des résultats qui peuvent surprendre. Nous engageons vivement le lecteur à se prêter à cet exercice.

Démonstration analytique.

C'est toujours la démonstration qui vient à l'esprit lorsqu'on ne sait comment prendre un problème, peut être parce qu'une fois choisi un repère (*c'est la seule liberté que nous ayons*) tous les points, toutes les courbes considérées se traduisent par des coordonnées et des équations. Les calculs sur ces équations permettent, du moins théoriquement, de répondre à toutes les questions si celles-ci sont déterminées par les hypothèses. Ceci n'est qu'une conséquence des deux postulats de la géométrie analytique posés par Poncelet³ le premier affirmant que toute situation géométrique peut se représenter par un système d'équations, et le second affirmant que les nouvelles équations obtenues après calcul représentent encore des propriétés de la situation géométrique donnée. Notons que ces postulats s'adaptent aisément dans le cadre d'une démonstration par les nombres complexes.

Nous avons dit théoriquement, car effectivement il en va tout autrement. En effet si l'élimination d'inconnues dans des systèmes d'équations linéaires de taille raisonnable ne pose pas de problème (les calculs donnent toujours des systèmes d'équations linéaires et la théorie des espaces vectoriels nous dit comment les résoudre, la notion de taille dépend de la technologie utilisée et des algorithmes développés), ce n'est pas le cas pour des systèmes d'équations de degré supérieur.

Dans ce cas l'élimination des inconnues, à moins de simplifications fortuites, augmente le degré et ce de manière doublement exponentielle avec le degré. Comme la théorie de Galois nous dit que si le degré est supérieur ou égal à 5, on ne sait résoudre par radicaux que des équations très particulières (leur groupe de Galois devant être résoluble), nous devons nous contenter le plus souvent de solutions approchées ce qui n'est pas toujours satisfaisant (comme le montrent, par exemple, les problèmes posés en robotique).



Choisissons (O, \vec{i}, \vec{j}) comme repère orthonormé direct où O est le milieu de BC et \vec{i} le vecteur \vec{OQ} . Dans ce système de représentation, on a :

$$\begin{aligned} A &= (3a, 3b) ; B = (-3, 0) ; C = (3, 0) ; \\ M &= (2a - 1, 2b) ; N = (a - 2, b) ; P = (-1, 0) ; \\ Q &= (1, 0) ; R = (a + 2, b) ; S = (2a + 1, 2b) . \end{aligned}$$

Il est aisé de voir que $J = (0, -\sqrt{3})$, il reste à calculer les coordonnées des points I et K puis, par exemple, calculer les longueurs des segments (ici les carrés des longueurs suffisent) des côtés IJ, JK, KL. Pour les coordonnées du point I on peut écrire que ce point est

3 Jean-Victor Poncelet, Principes d'analyse et de Géométrie, (deux tomes), Gauthier-Villars, Paris 1864, tome deuxième, p. 320-321.

DEMONTRER,
POURQUOI ?

à l'intersection des deux cercles de centre N et de centre M de rayon MN (le point "interne" I étant l'autre intersection). Si on note (x, y) les coordonnées du point I on obtient le système de deux équations du second degré suivant :

$$\begin{aligned} (x - (a - 2))^2 + (y - b)^2 &= \\ ((2a - 1) - (a - 2))^2 + (2b - b)^2 & \\ (x - (2a - 1))^2 + (y - 2b)^2 &= \\ ((2a - 1) - (a - 2))^2 + (2b - b)^2 & \end{aligned}$$

Soit

$$x^2 + y^2 + 2(2 - a)x - 2by - 3(2a - 1) = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2(1 - 2a)x - 4by + 3b^2 + 3a(a - 2) = 0$$

Système qui se ramène au système suivant (il n'y aura pas élévation des degrés dans l'élimination des inconnues, et on n'aura à résoudre qu'une équation du second degré) :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2(2 - a)x - 2by - 3(2a - 1) &= 0 \\ (2 + 2a)x + 2by + 3 - 3a^2 - 3b^2 &= 0 \end{aligned}$$

Le système d'équations de deux cercles se transforme en un système équivalent formé de l'équation d'un cercle et de l'équation de l'axe radical ; par suite x vérifie l'équation :

$$\begin{aligned} (b^2 + a^2 + 2a + 1)x^2 + \\ (-3a^3 - 3a^2 - 7ab^2 + 3a - b^2 + 3)x + \\ (9/4)(a^2 + b^2 - 1)^2 + 3b^2(a^2 + b^2 - 2a) &= 0 \end{aligned}$$

Cette équation que l'on sait résoudre nous rebute un peu si on n'a pas un logiciel de calcul formel, surtout que l'on sait qu'il nous faudra recommencer avec le point K. Il est à noter que la lourdeur des calculs provient de la taille des coefficients (des paramètres) ; pour des équations plus complexes (degré, nombre d'inconnues, ...) la complexité des coefficients ajoute souvent des problèmes de résolution effective.

La résolution de l'équation obtenue rebute d'autant plus que sa résolution ne nous appor-

tera rien quant à la compréhension du problème ; on sait qu'il nous faudra un peu de patience et de technicité (que l'on pense maîtriser) pour en déterminer les solutions. D'autre part comme ce type de question se trouve souvent dans le cadre d'un savoir scolaire, qu'un savoir scolaire est fait pour savoir si l'autre sait, qu'il y a une solution et que celui qui pose la question la connaît, on préfère à ce stade demander la confirmation du résultat et faire confiance ! Il en est autrement en recherche sur des problèmes semblables, problèmes que l'on trouve fréquemment en robotique, car on ne connaît pas la solution et si elle existe il faut la calculer ou comme on l'a dit précédemment en donner une valeur approchée suffisamment bonne dans un temps raisonnable, ce qui nécessite de développer des algorithmes performants.

Nous laissons la résolution de cette équation au lecteur tenace pour donner une autre solution dans le cadre de la géométrie analytique qui permet de voir la puissance du calcul vectoriel. Elle montre comment une compréhension géométrique de la situation permet de conduire autrement les calculs.

Exprimons le fait que le vecteur $\overrightarrow{I_0I}$, où I_0 est le milieu de MN , forme avec le vecteur \overrightarrow{NM} un angle droit de sens direct et que sa norme est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$ fois la norme de ce vecteur. Ainsi $\overrightarrow{I_0I} = \lambda(-b\vec{i} + (a+1)\vec{j})$ avec $\lambda = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Comme : $\overrightarrow{I_0I} = (x - \frac{3}{2}a + \frac{3}{2})\vec{i} + (y - \frac{3}{2}b)\vec{j}$ on en déduit $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}(-b) + \frac{3}{2}a - \frac{3}{2}$ et $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}(a+1) + \frac{3}{2}b$.

Pour lever l'ambiguïté du signe \pm (comme tout à l'heure avec le choix des deux solutions de l'équation) on peut regarder sur un exemple particulier et jouer sur la continuité, mais il est plus aisé de regarder le produit

vectorel des vecteurs \overrightarrow{NM} et \overrightarrow{IoI} qui est égal à $\lambda \left((a+1)^2 + b^2 \right)$; dans le cas présent la valeur à prendre pour λ est $+\frac{\sqrt{3}}{2}$, et les coordonnées du point I sont $\left(\frac{3}{2}(a-1) - \frac{\sqrt{3}}{2}b, \frac{\sqrt{3}}{2}(a+1) + \frac{3}{2}b \right)$.

Le lecteur qui douterait peut vérifier que ces valeurs sont solutions de l'équation du second degré précédente.

De même on montre que les coordonnées de K sont $\left(\frac{3}{2}(a+1) + \frac{\sqrt{3}}{2}b, -\frac{\sqrt{3}}{2}(a-1) + \frac{3}{2}b \right)$.

Pour montrer que le triangle est équilatéral on peut calculer la norme des vecteurs \overrightarrow{JI} et \overrightarrow{KI} , ou plutôt le carré de leur norme ou vérifier que le produit scalaire $\overrightarrow{JI} \cdot (\overrightarrow{KI} + \overrightarrow{KJ})$ est nul.

On a : $\overrightarrow{JI} = \left(\frac{3}{2}a - \left(\frac{b\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} \right) \right) \vec{i} + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}b + \frac{3\sqrt{3}}{2} \right) \vec{j}$

d'où $\|\overrightarrow{JI}\|^2 = \left(\frac{3}{2}a - \left(\frac{b\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} \right) \right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}b + \frac{3\sqrt{3}}{2} \right)^2 =$

$$\|\overrightarrow{JI}\|^2 = \left(\frac{3}{2}a - \left(\frac{b\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} \right) \right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}b + \frac{3\sqrt{3}}{2} \right)^2.$$

Comme $\overrightarrow{KI} = -(3+3b)\vec{i} + a\sqrt{3}\vec{j}$

(et $\overrightarrow{KJ} = -\left(\frac{3}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b + \frac{3}{2} \right) \vec{i} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{3}{2}b - \frac{3\sqrt{3}}{2} \right) \vec{j}$), les normes de ces vecteurs sont égales : le triangle JKI est équilatéral.

Autrement :

$$\overrightarrow{KI} + \overrightarrow{KJ} = -\left(\frac{3}{2}a + \frac{3\sqrt{3}}{2}b + \frac{9}{2} \right) \vec{i} + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}a - \frac{3}{2}b - \frac{3\sqrt{3}}{2} \right) \vec{j}$$

et le produit scalaire $(\overrightarrow{KI} + \overrightarrow{KJ}) \cdot \overrightarrow{JI}$ est nul : le parallélogramme KIK_1J où K_1 est le point tel que $\overrightarrow{KK_1} = \overrightarrow{KI} + \overrightarrow{KJ}$ est un losange. Le triangle JKI est isocèle et donc équilatéral.

Le choix du repère étant primordial pour la simplicité des calculs nous avons choisi un repère orthonormé se "fondant le plus possible" dans la figure, ce qui nécessite une certaine compréhension de la figure, ou de la situation géométrique. Toutefois une démonstration analytique ne favorise pas un regard pertinent, et par-delà est peu signifiante sur les raisons du pourquoi des propriétés : on vérifie si elles sont valides ou non. Mais cela dépend comment on utilise l'analytique car l'algèbre porte la nature des choses. Le repère choisi est orthonormé car notre problème fait intervenir des angles, des longueurs et non des rapports de longueurs de segments sur des mêmes droites comme, par exemple, dans le théorème de Menelaüs (dans ce cas, il convient mieux de choisir un repère donné par les sommets du triangle). En d'autres termes la réponse à notre problème est une réponse de géométrie euclidienne et non de géométrie affine.

Malgré tout si nous avons choisi pour repère $(B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$, il nous eut été possible de résoudre ce problème. Pour cela il nous aurait fallu tenir compte du fait que nous avons changé de norme, pas seulement les valeurs des modules des vecteurs du repère, mais aussi que nous avons changé l'orthogonalité : pour deux vecteurs \vec{V} et \vec{V}' de coordonnées (x, y) et (x', y') le produit scalaire est égal à $xx' + yy'$. Ainsi dans un tel repère les vecteurs \overrightarrow{BC} et \overrightarrow{BA} sont orthogonaux, c'est-à-dire que la forme quadratique du nouveau produit scalaire est, dans le premier repère,

donnée par l'équation d'une ellipse et la nullité du produit scalaire traduit le fait que les directions sont conjuguées entre elles relativement à cette ellipse. On peut apprécier en souvenir des cours de DEUG passés, relativement aux espaces vectoriels normés (changement de bases, réduction des formes quadratiques, changement de formes quadratiques, etc.), la complexité des calculs qu'il nous aurait fallu mener. Mais ceci ne nous aurait apporté rien de plus quant à la compréhension du problème posé.

Pour Descartes le calcul algébrique est un outil puissant au service de la géométrie ; dès qu'il a permis de reconnaître la forme du problème, "il n'est plus besoin de passer outre. Car le reste ne sert point pour cultiver et recréer l'esprit, mais seulement pour exercer la patience de quelque calculateur laborieux."

L'algébrisation d'un problème géométrique doit traduire son essence et les calculs que l'on conduit doivent s'interpréter géométriquement. Ce sont les passerelles jetées des deux côtés entre ces deux champs qui apportent la lumière, explicitent toute la puissance du calcul algébrique et permettent de le mener à terme (en évitant autant que faire se peut d'en augmenter la complexité) lorsque cela est possible. Ceci demande, outre une intelligence du calcul et une faculté de le conduire, une compréhension géométrique du problème. En d'autres termes l'analytique c'est les relations, pas les calculs, et il faut avoir la connaissance de la géométrie qu'ils traduisent.

Ainsi Descartes explique (pour ne pas dire conseille) à la princesse Elisabeth de Bohême⁴ l'attitude suivante qu'il convient d'adopter (attitude qui doit nous influencer pour le choix des repères) :

"J'observe toujours, en cherchant une question de géométrie, que les lignes, dont je me sers pour la trouver, soient parallèles, ou s'entrecourent à angles droits, le plus qu'il est possible ; et je ne considère point d'autres théorèmes, sinon que les côtés des triangles semblables ont semblable proportion entre eux, et que, dans les triangles rectangles, le carré de la base est égal aux deux carrés des côtés. Et je ne crains point de supposer plusieurs quantités inconnues, pour réduire la question à tels termes, qu'elle ne dépende que de ces deux théorèmes ; au contraire, j'aime mieux en supposer plus que moins. Car, par ce moyen, je vois plus clairement ce que je fais, et en les démentant je trouve mieux les plus courts chemins, et m'exempte de multiplications superflues ; au lieu que, si l'on tire d'autres lignes, et qu'on se serve d'autres théorèmes, bien qu'il arrive, par hasard, que le chemin qu'on trouvera soit plus court que le mien, toutefois il arrive quasi toujours le contraire. Et on ne voit point si bien ce qu'on fait, si ce n'est qu'on ait la démonstration du théorème dont on se sert fort présente en l'esprit ; et en ce cas on trouve, quasi toujours, qu'il dépend de la considération de quelques triangles, qui sont rectangles, ou semblables entre eux, et ainsi on retombe dans le chemin que je tiens."

Démonstration par les relations métriques.

Comme précédemment cette démonstration apportera peu dans la compréhension du pourquoi de ce résultat, elle nous permet surtout de conclure à sa véracité. L'interprétation des écritures algébriques ou leur utilisation pouvant être différente. Avec les notations précédentes, on a $BI=c\frac{\sqrt{3}}{3}$, $BJ=a\frac{\sqrt{3}}{3}$.

⁴ R. Descartes, oeuvres complètes, Editions Vrin.

Par suite :

$$IJ^2 = BI^2 + BJ^2 - 2BI \cdot BJ \cos(B+60^\circ)$$

$$= \frac{a^2 + c^2}{3} + \frac{ac}{3} \cos(B) + \frac{ac\sqrt{3}}{6} \sin(B)$$

Comme $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(B)$, et comme :

$$S = \frac{1}{2} ac \sin(B) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

si S et p désignent l'aire et le demi-périmètre du triangle ABC , on a :

$$IJ^2 = \frac{1}{6}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

L'expression algébrique de IJ étant une expression indépendante de toute permutation en les côtés du triangle ABC , les trois côtés du triangle IJK sont égaux. Le triangle IJK est équilatéral.

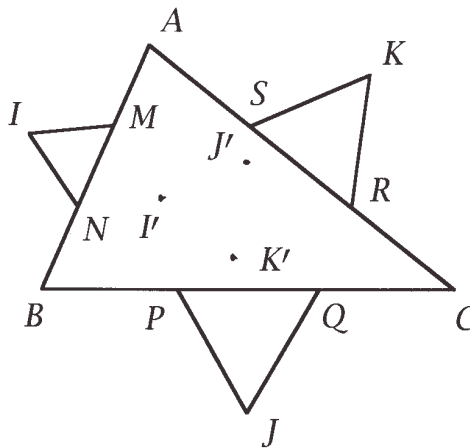
Démonstration par les nombres complexes.

Rappelons une présentation classique des nombres complexes :

Les points du plan sont représentés par des nombres complexes, la somme de deux nombres est donnée par la règle du parallélogramme, et la multiplication par un nombre est la traduction d'une similitude dont le rapport est le module de ce nombre et l'angle l'argument.

Choisissons le point B comme origine (*la seule liberté que nous ayons est de choisir l'origine et l'axe des nombres réels*) ; dans notre contexte le choix de l'axe importe peu, et le choisir ôterait une symétrie des calculs, ce qui serait moins éclairant. Si les nombres $3a$ et $3c$ représentent les points A et C respectivement, les nombres représentant les

points M, N, P, Q, R, S sont dans cet ordre : $2a, a, c, 2c, a + 2c, 2a + c$.



Si on définit le nombre α comme étant égal à $e^{2i\pi/6}$ (c'est-à-dire que la multiplication par α représentera une rotation d'angle égal à 60°), les nombres x, y, z , représentant les points I, J, K , sont tels que :

$$x - a = \alpha(2a - a) ; y - 2c = \alpha[-(2c - c)] ;$$

$$z - (2a + c) = \alpha[(a + 2c) - (2a + c)]$$

Ainsi : $x = a\alpha + a ; y = -\alpha c + 2c$ et $z = -\alpha a + \alpha c + 2a + c$; pour montrer que le triangle IJK est équilatéral il suffit de vérifier (par exemple) que l'on passe du point J au point K par une rotation de centre I et d'angle 60° , c'est-à-dire de vérifier la relation :

$$z - x = \alpha(y - x).$$

Or on a :

$$z - x - \alpha(y - x) = (-\alpha a + \alpha c + 2a + c) - (\alpha a + a) - \alpha[(-\alpha c + 2c) - (\alpha a + a)]$$

Soit : $z - x - \alpha(y - x) = (\alpha^2 - \alpha + 1)(a + c)$, et comme $(\alpha^2 - \alpha + 1) = 0$, on a bien : $z - x = \alpha(y - x)$, et le triangle IJK est équilatéral.

Pour mettre en place cette démonstration il a fallu traduire algébriquement une situation géométrique. Dans ce cadre une rotation se traduit par la multiplication par un nombre complexe et il suffit de vérifier, par un calcul aisé, la propriété cherchée pour permettre une interprétation dans le cadre géométrique. Ces aller-retour géométrico-algébriques donnent une explication de la situation, explication signifiante pour un géomètre confirmé ayant à sa disposition un stock de configurations.

Un autre choix possible eut été d'élire, au lieu des paramètres a et c , trois paramètres a, b, c , tels que $a + b + c = 0$ (c'est-à-dire positionner l'origine au centre de gravité du triangle). La symétrie totale dans les calculs nous aurait davantage éclairé. Mais faire un tel choix sciemment n'est-ce pas la preuve d'une plus grande autonomie ?

Notes : 1) Cette dernière preuve est une preuve suffisamment conceptuelle pour laquelle il est plus naturel de démontrer le caractère équilatéral que le caractère isocèle ;
 2) La simplicité du calcul sur cet exemple ne nécessite pas le recours à un logiciel de calcul formel, mais peut aider à l'apprentissage de celui-ci.

Démonstration vectorielle.

La démonstration vectorielle proposée, qui est essentiellement la même que la précédente, peut paraître plus signifiante car elle ne nécessite pas un changement de cadre algébrique. Elle est basée sur le fait qu'un espace vectoriel de dimension 2 opère sur les points du plan. On montre que les vecteurs \vec{IJ} et \vec{IK} se déduisent l'un de l'autre par une rotation vectorielle d'angle égal à 60° . Cette

démonstration se situe dans les démonstrations langagières (paragraphe auquel nous renvoyons) de la classification donnée par R. Bkouche⁵.

On a $\vec{IJ} = \vec{IN} + \vec{NP} + \vec{PJ}$; si on note \mathfrak{R} la rotation vectorielle d'angle 60° , on obtient les égalités suivantes :

$$\mathfrak{R}(\vec{IN}) = \vec{IM}, \quad \mathfrak{R}(\vec{NP}) = \mathfrak{R}(\vec{SR}) = \vec{SK}, \\ \mathfrak{R}(\vec{PJ}) = \vec{PQ} = \vec{MS}$$

Par suite $\mathfrak{R}(\vec{IJ}) = \vec{IM} + \vec{SK} + \vec{MS} = \vec{IK}$, et le triangle IJK est équilatéral.

Cette démonstration du point de vue structural est un chapitre de l'algèbre linéaire⁶. Elle permet de comprendre autrement la démonstration par les nombres complexes, mais ne montre pas toute la richesse de la configuration à un débutant alors qu'elle éclaire un géomètre confirmé ; nous allons voir qu'il en va autrement des démonstrations suivantes.

Notons que cette démonstration vectorielle est d'une complexité tout autre pour sa mise en œuvre que pour sa lecture ; pour s'en persuader on peut voir les difficultés qu'éprouvent les étudiants dans l'apprentissage de la géométrie affine. Cependant elle séduit par sa simplicité et la compréhension qu'elle donne de la figure.

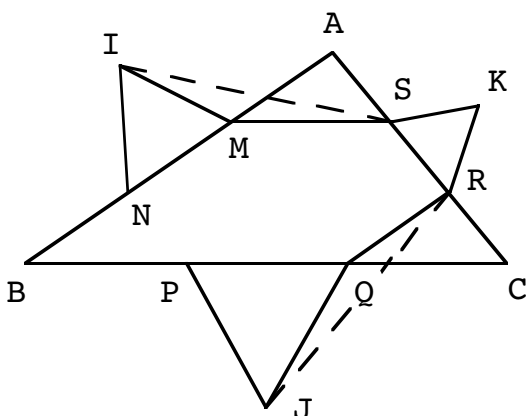
Démonstration utilisant les cas d'égalités.

C'est la démonstration type comme « lecture raisonnée du dessin », le raisonnement est basé sur le dessin qui devient figure à travers son exploration ; on cherche des rela-

5 Op. cit.

6 Jean Dieudonné, Algèbre linéaire et Géométrie élémentaire, Hermann, Paris 1964.

tions qui permettent d'expliquer et comme dit R. Bkouche⁷ c'est "l'activité de raisonnement qui permet de dépasser le dessin pour en faire d'abord la figure, c'est-à-dire le dessin questionné, ensuite l'objet idéal (l'idéalité mathématique)..."



Les triangles IMS et RQJ sont égaux : $IM = MN = RQ$, $MS = PQ = QJ$, et les angles

\widehat{IMS} et \widehat{RQJ} sont égaux à l'angle \widehat{B} augmenté d'un angle de mesure 120° . Par suite

on a $IS = RJ$, $\widehat{MSI} = \widehat{QJR}$ et $\widehat{MIS} = \widehat{QRJ}$.

Les triangles ISK et JRK sont égaux : comme $IS = RJ$ et $SK = RK$, il suffit de voir que les

angles \widehat{ISK} et \widehat{JRK} sont égaux.

$$\text{On a } \widehat{ISK} = 120^\circ + \widehat{C} - \widehat{MIS}$$

$$\text{et } \widehat{JRK} = 60^\circ + (180^\circ - \widehat{A}) + \widehat{QRJ},$$

$$\text{soit } \widehat{JRK} = 60^\circ + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{QRJ}.$$

De l'égalité $\widehat{MIS} + 120^\circ + \widehat{B} + \widehat{MSI} = 180^\circ$, on

déduit $\widehat{MSI} = 60^\circ - \widehat{MIS} - \widehat{B}$ et $\widehat{ISK} = \widehat{JRK}$.

Les triangles ISK et JRK sont égaux et $IK = JK$: le triangle IJK est isocèle d'où équilatéral.

Pour qu'une telle démonstration soit complète, et c'est là une difficulté rencontrée avec l'utilisation des cas d'égalités, il faut considérer plusieurs cas de figures, à savoir il faut déterminer si on doit faire la somme ou la différence des angles, opérations qui dépendent des positions relatives des segments MS, QR et des segments IS, JR.

Dans le secondaire, lorsque les cas d'égalités étaient enseignés, c'était la figure (faite par l'élève) qui disait ce qu'il fallait faire et on se contentait (le plus souvent) de ceci comme démonstration. La démonstration complète et "rigoureuse" nécessite de reconnaître les paramètres qui donneront tous les cas de figures pouvant se présenter et de les organiser entre eux afin de traiter chacun de ces cas. Elle fait appel à des compétences technico-logiques qui sont hors du champ géométrique proprement dit, avant de revenir dans le cadre de la géométrie pour pouvoir réaliser l'adéquation du discours démonstratif aux cas de figures. Il est cependant instructif de s'y essayer ! Notons que l'usage de logiciels interactifs de géométrie facilite la reconnaissance des différentes situations, ce qui est une aide pour les structurer et organiser la démonstration dans sa totalité.

Etude des différents cas de figures :

Le cas le plus trivial est le cas où le triangle ABC est équilatéral : dans ce cas, il est aisé

de voir que les angles \widehat{MSI} et \widehat{QRJ} sont nuls et de faire leur somme ou leur différence importe peu. Il est préférable dans ce cas

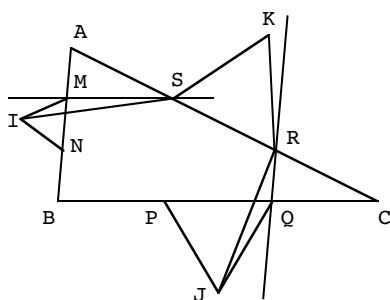
⁷ Op. cit.

DEMONTRER,
POURQUOI ?

d'utiliser une démonstration directe basée sur les axes de symétries de la figure...

Si le triangle ABC n'est pas équilatéral, on a les différents cas suivants aux changements de lettres près :

1°) $\hat{A} > 60^\circ$, $\hat{B} > 60^\circ$, $\hat{C} < 60^\circ$:



Les segments JC et CK intersectent la droite QR : les points J et K sont d'un même côté par rapport à la droite QR.

L'angle \widehat{JRK} est égal à $60^\circ + (180^\circ - \hat{A}) - \widehat{QRJ}$ soit à $60^\circ + \hat{B} + \hat{C} - \widehat{JRQ}$, c'est-à-dire à $120^\circ + \hat{C} + \widehat{RJQ}$.

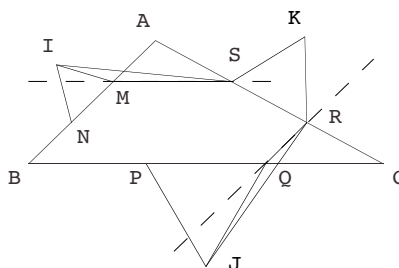
Les points A et K sont d'un même côté par rapport à la droite MS ($\hat{C} < 60^\circ$), et les points A

et I sont de part et d'autre ($\hat{B} < 120^\circ$) : le segment IK intersecte la droite MS et l'angle

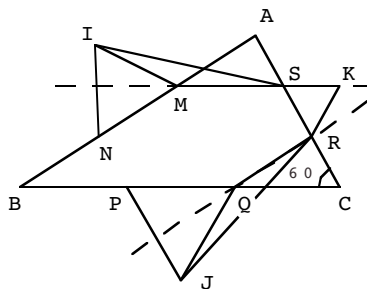
\widehat{ISK} est égal à $120^\circ + \hat{C} + \widehat{MSI}$. Par suite les angles \widehat{JRQ} et \widehat{ISK} sont égaux ainsi que les triangles ISK et RQJ, et $IK = JK$.

2°) $\hat{A} > 60^\circ$, $\hat{B} < 60^\circ$, $\hat{C} < 60^\circ$: Les points J et C sont d'un même côté par rapport à la droite QR, et le point K est situé dans l'autre

demi-plan. D'autre part les points I, A, K sont situés d'un même côté par rapport à la droite MS : on est dans le cas de figure traité initialement, et les côtés IK et JK sont égaux.



3°) $\hat{A} > 60^\circ$, $\hat{B} < 60^\circ$, $\hat{C} = 60^\circ$:



Les points J et C sont situés dans un même demi-plan défini par la droite QR et le point K dans l'autre demi-plan ; donc \widehat{JRK} est égal à $60^\circ + (180^\circ - \hat{A}) + \widehat{QRJ}$ et on a :

$$\widehat{JRK} = 120^\circ + \hat{B} + \widehat{QRJ} .$$

Les points M, S, K sont alignés, et les points I et A sont d'un même côté par rapport à la droite MS : on a $\widehat{ISK} = 180^\circ - \widehat{MSI}$, soit $\widehat{ISK} = 120^\circ + \hat{B} + \widehat{SIM}$. Les triangles ISK et JRK sont égaux et $IK = JK$.

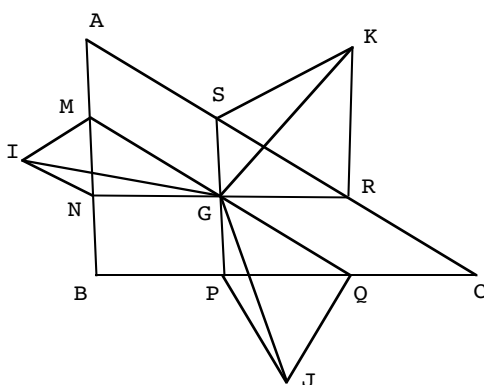
Note 1 : A la lumière de la démonstration complète on comprend l'attitude adoptée dans le secondaire lorsque les cas d'égalités (ou de similitudes) étaient enseignés au collège. L'algébrisation de la géométrie avec les angles orientés permet d'éviter les différents cas de figures et de comprendre le rôle de l'algèbre linéaire : on passe de plusieurs cas de figures à la figure générale. Cette unification des cas ne veut pas dire que l'on a un cas unique car la figure générale se pense une fois qu'on les a vues toutes. Avec les angles orientés "il n'y a plus de cas de figure", ce qui est différent de "il n'y a pas de cas de figure". Par suite leur utilisation ne doit pas se concevoir pour un débutant, pour ce dernier il faut d'abord passer par les cas de figures.

Note 2 : Cette démonstration permet d'obtenir des relations d'égalités entre segments intéressantes pour elles mêmes, mais elle est peu signifiante. De fait les cas d'égalités aident à la construction de concepts de grandeurs, de concepts d'invariants caractérisant les transformations par la constitution d'un stock de configurations mobilisables globalement ou partiellement.

Autre démonstration utilisant les cas d'égalités.

Cette démonstration me paraît plus signifiante car elle montre des aspects différents et nous fait découvrir une plus grande richesse de la configuration. La clé de cette démonstration est de voir que les droites PS, MQ, NR concourent en un point G qui est le centre du cercle circonscrit au triangle IJK, et que de ce point on voit les côtés du triangle sous un angle égal à 120°. C'est l'idée que le centre de gravité du triangle ABC est aussi celui du triangle IJK ainsi que le centre du cercle circonscrit de ce dernier triangle.

Le quadrilatère MSPQ est un parallélogramme (par Thalès ou par homothétie) ; ses diagonales se coupent en leur milieu noté G, et une nouvelle utilisation de Thalès montre que la droite NR passe par le point G et on en déduit aisément (ce qui n'est pas nécessaire pour notre démonstration) que le point G est centre de gravité du triangle ABC.



Les triangles GIN et JGP ont les côtés IN, GP, et GN, PJ respectivement égaux entre eux.

Comme les angles \widehat{ANG} et \widehat{GPQ} sont égaux à l'angle \widehat{ABC} , les angles \widehat{ING} , \widehat{GPJ} sont égaux : par le deuxième cas d'égalité des triangles, les triangles GIN et JGP sont égaux.

Les segments GI et GJ sont égaux ; on fait de même pour les segments GI et GK. Le point G est le centre du cercle circonscrit au triangle IJK. De l'égalité des triangles GIN et JGP et de la somme des angles d'un triangle

on déduit que l'angle \widehat{IGJ} est égal à 120°. De même les angles \widehat{IGK} et \widehat{KGJ} sont égaux à 120° : le triangle IJK est équilatéral. Plusieurs cas de figures sont à étudier selon les positions relatives des segments GI, GJ et

DEMONTRER,
POURQUOI ?

GK pour évaluer les angles \widehat{IGJ} , \widehat{IGK}

et \widehat{KGJ} . Il convient de regarder le cas où un angle est supérieur à 120° , et le cas où tous les angles sont inférieurs à 120° , ce dernier cas étant le cas que nous venons de considérer.

L'utilisation des angles orientés permet de concevoir la figure générale, et l'intérêt de l'algébrisation de la géométrie, comme le montre le calcul de l'angle (GI, GJ) modulo π :

$$(GJ, GI) = (GJ, GP) + (GP, GN) + (GN, GI) = (IG, IN) + (NB, GN) + (GN, GI) = (NB, NI) = \frac{2}{3}\pi$$

Cette démonstration utilisant les angles orientés et la relation de Chasles permet de penser que les constructions à l'extérieur et à l'intérieur sont les mêmes et ne sont que deux cas de figures d'une même configuration comme nous l'avons pressenti en début de cet article en faisant glisser le sommet A dans l'autre demi-plan défini par la droite BC.

Note : On peut éviter de regarder plusieurs cas de figures en montrant que le point G est aussi le centre de gravité du triangle IJK.

Cette notion étant affine l'usage des vecteurs s'avère plus pertinent que les cas d'égalités, au contraire de la propriété du centre du cercle circonscrit.

En effet :

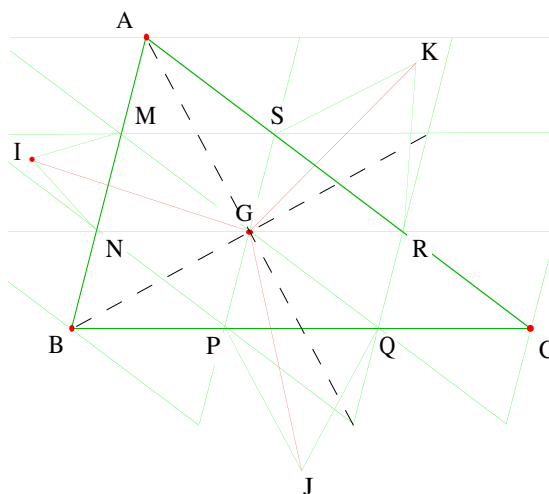
$$\begin{aligned} \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{GK} &= \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CK} = \\ &= \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{CK} \end{aligned}$$

En considérant la similitude vectorielle d'angle 30° et de rapport $\sqrt{3}$, il est immédiat de vérifier que cette somme est nulle, c'est-à-dire que le point G est le centre de gravité du triangle IJK, et par-delà, que ce triangle est équilatéral.

La vision papier quadrillé.

H. Lombardi⁸ propose *un usage plus systématique du papier quadrillé comme source d'évidence en géométrie euclidienne*. Les démonstrations qui s'en suivent sont essentiellement d'essence visuelle, basées sur les chemins parcourus, les parties de tour effectuées, le comptage. Pour les écrire, un quadrillage adapté à la situation doit être choisi comme il est suggéré dans cet article : sommets du triangle aux nœuds du quadrillage, espacés par des multiples adéquats de carrés. Mais ceci demande d'avoir mis à plat la structure, de n'avoir rien caché !

Dans la situation présente, il convient de réaliser un quadrillage dépendant du triangle, c'est-à-dire un quadrillage par des parallélogrammes (affine des quadrillages usuels) obtenu en divisant les côtés du triangle en trois parties égales et en joignant les points de division correspondants en restant parallèle aux côtés comme dans la figure :



⁸ H. Lombardi Eloge du papier quadrillé, REPERES-IREM, n° 45, octobre 2001.

Ce quadrillage découpe le triangle en neuf petits triangles égaux à côtés parallèles (composés entre eux ils forment des parallélogrammes égaux) ce qui, dans un premier temps, rend visuellement évident la position du centre de gravité.

Pour continuer et pouvoir lire la situation, il suffit de reprendre les démonstrations géométriques, y compris celle avec les nombres complexes, et les traduire en termes de sixièmes de tour et de chemins à parcourir (ceci que l'on regarde le cas où les triangles équilatéraux sont tournés vers l'extérieur comme vers l'intérieur). Ce faisant on explicite les liens qui unissent ces démonstrations et leur raison. On se retrouve dans la logique de l'idéal chinois : regardez et vous verrez.

Démonstration par les transformations.

L'idée est de montrer que l'on passe, par exemple, du point J au point K par une rotation de centre I et d'angle 60° . Comme cette isométrie n'est pas explicitement donnée, il faut la décomposer en produit de transformations pour lesquelles on saura déterminer l'image du point J et celles des points-images successifs pour arriver finalement au point K.

La composition de transformations n'est pas une opération banale car elle nécessite de percevoir une globalité ; de plus il faut une certaine maîtrise, une maturité, pour pouvoir s'y exercer librement car cela nécessite d'avoir construit ses propres images mentales. C'est pourquoi l'usage des transformations comme outil de démonstration ne devrait pas s'envisager avant le lycée ; au collège on ne devrait les pratiquer qu'isolément et identifiées, c'est-à-dire dans des activités où la transformation est donnée et pour lesquelles on doit en dédui-

re certaines de ses actions sur une figure pour expliciter des propriétés géométriques.

La démonstration que l'on donne est initialement une démonstration basée sur la figure dans le sens qu'il faut avoir construit celle-ci pour choisir les bonnes transformations, mais est d'essence logico-langagière car une fois les transformations à combiner données on a quitté le domaine de la géométrie élémentaire pour entrer dans le domaine de l'algèbre.

On considère S_B et S_A les similitudes d'angle 30° , de centres respectifs A et B et de rapports inverses l'un de l'autre $\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $\sqrt{3}$.

On a : $S_A \circ S_B (J) = S_C (C) = K$; comme les rapports sont inverses l'un de l'autre la transformation $f = S_A \circ S_B$ est une isométrie, la somme des angles des deux similitudes étant égale à 60° c'est une rotation d'angle 60° .

On construit sur le côté AB, extérieurement au triangle ABC, le triangle équilatéral ABC' ; alors $S_B (I) = C'$ et $S_A (C') = I$. Le point I est le centre de la rotation f et le triangle IJK est équilatéral.

Note : D'autre part on pourra remarquer que si on combine les dernières similitudes avec celles du cas intérieur (angle égal à -30°) on obtient ainsi des translations et donc des relations d'égalités et de parallélismes entre segments.

Démonstration utilisant les cas de similitudes.

Cette démonstration, suggérée par la démonstration précédente, mobilise une configuration géométrique classique bien connue

DEMONTRER,
POURQUOI ?

des étudiants du CAPES de mathématique.

Construisons, extérieurement au triangle ABC les triangles équilatéraux ABC', BCA', CAB' : les points I, J, K ne sont autres que les centres de ces triangles et on reconnaît la configuration de **Torricelli**⁹. Dans cette configuration, on sait que les segments AA', BB', CC' sont concourants et égaux¹⁰. Une fois le problème remis dans ce contexte culturel, il est plus aisé de le résoudre car on peut faire appel à des propriétés connues, à une figure déjà mentalement construite, à toute une démarche antérieure quant à des explorations, ce qui donne une impression de facilité (qui n'est qu'illusoire) de la géométrie élémentaire surtout pour celui qui suit le discours de celui qui sait.

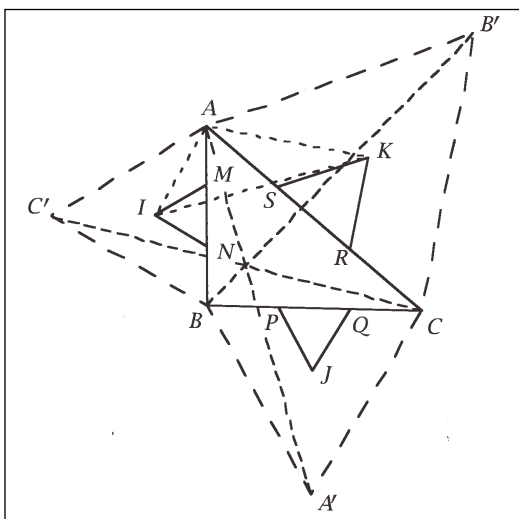
En réalité certains contextes sont plus signifiants que d'autres, et par suite plus facilitants que d'autres pour avoir des idées de démonstration, car ils apportent des regards différents sur une même situation. Ensuite c'est un problème de vision personnelle, de culture, qui conduit à préférer une vision à une autre.

Les triangles IAK et BAB' sont semblables dans le rapport $\sqrt{3}$ ($\frac{AB}{AI} = \frac{AB'}{AK} = \sqrt{3}$ et $\widehat{IAK} = \widehat{BAB'} = \widehat{A} + 60^\circ$); par suite $IK = \frac{\sqrt{3}}{3}BB'$

De même on montre que $IJ = \frac{\sqrt{3}}{3}CC'$: le triangle IJK est isocèle donc équilatéral.

9 Dans ce contexte, on reconnaît le problème posé au début de cet article comme étant un problème attribué à Napoléon dans nombre de manuels scolaires ; de fait F. G. M. l'attribue à Lionnet, Exercices de géométrie, 1920, rééditions J. Gabay, p. 324, exercice 756.

10 G. Lamé, Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie, Mme Ve Courcier, Imprimeur-Libraire 1818 p. 82-83 ; F. G. M., Op. cit., p. 323, exercice 754.



Comme nous le voyons ici, l'usage des cas de similitudes est premier : cette démonstration se situe dans le cadre des démonstrations basées sur la « lecture raisonnée du dessin » et est comparable aux démonstrations données par les cas d'égalité des triangles, une fois le problème situé dans une culture de géométrie élémentaire.

Note : Pour le lecteur voulant regarder la configuration où les triangles sont rabattus vers l'intérieur avec une "même" démonstration il lui faut adapter la configuration de Torricelli. A savoir construire les triangles équilatéraux intérieurs ABC'', BCA'', CAB'' et montrer que les segments AA'', BB'', CC'' sont égaux ce qui se fait aisément en utilisant les cas d'égalités des triangles ou des rotations d'angles 60°.

Torricelli et la Physique.

Dans ce dernier contexte on retrouve une configuration classique : les cercles circonscrits aux triangles équilatéraux, nommés

“cercles de Torricelli” par M. Neuberg, sont concourants au point N (Cf. figure précédente) dit « point de Torricelli ».

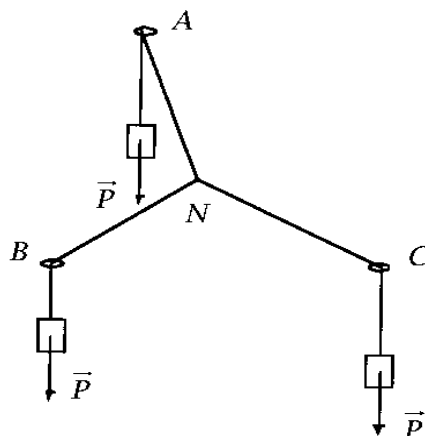
La question que l'on peut se poser est celle du problème qui a amené à cette configuration. C'est un problème de *minima* posé par Fermat à Torricelli qui en donna plusieurs solutions¹¹ : Fermat proposa la recherche du point dont la somme des distances aux trois sommets d'un triangle donné est minimum.

Mais, dans ce cas, il faut reformuler le problème pour le replacer dans le contexte de la physique, activité apportant un éclairage supplémentaire. C'est peut être ce qui a fait dire à Lamé : « Une des preuves les plus incontestables de la richesse, de la généralité de la Géométrie, c'est sans contredit le secours qu'elle tire des sciences qui lui doivent naissance, du moins leur accroissement et leur clarté ; car si la science de l'étendue prête ses figures aux autres sciences exactes et naturelles qui les considèrent à leur manière, soit avec la rigueur des démonstrations, soit avec l'incertain de l'expérience, elle peut souvent déduire de ces nouvelles considérations qu'on lui croit étrangères, des principes à démontrer, quelquefois même les points de départ des plus belles théories. »

Dans son approche physique ce problème est un problème de minimisation ou de position d'équilibre, et Lamé dira¹² : « Quelquefois la science de l'équilibre se fait un jeu des problèmes les plus difficiles de la Géométrie, et va quelquefois de pair avec les calculs les plus élevés de l'Analyse algébrique.

Les *maxima* et *minima* des distances ou des sommes de distances sont souvent l'écueil de la Géométrie, de l'Algèbre même ; et beaucoup de problèmes sur les extrêmes grands resteraient sans solution, si le calcul infinitésimal ne s'en était occupé. Un des grands avantages de la Statique dans ces sortes de questions, si toutefois elle peut les traduire, c'est de faire connaître les relations que les conditions entre les longueurs établissent entre leurs directions respectives, car il n'est pas d'équilibre qui ne soit dû autant à des forces, qu'aux rapports de leurs intensités. Comme cette transformation des lignes aux angles est souvent très difficile à trouver par la Géométrie simple, il n'est pas étonnant qu'elle se présente alors inférieure à la Statique, ... »

Ce problème est traité avec une approche physique par B. Bettinelli¹³. Cette étude physique permet de mettre en lumière des propriétés d'arcs capables comme le souligne Lamé, propriétés sous-jacentes aux études déjà réalisées, et qu'il suffisait d'explicitier. Rappelons le texte que B. Bettinelli propose sur ce problème de Fermat :



11 F. G. M. Op. cit.

12 Op. cit. p. 84.

13 B. Bettinelli Le point de Torricelli d'un triangle, REPERES-IREM, n° 29, Octobre 1997.

DEMONTRER,
POURQUOI ?

« Si on fait 3 trous dans une table horizontale, et que d'un nœud, partent 3 ficelles passant dans les trous aux extrémités desquelles sont suspendues des masses égales, le nœud se stabilise au point de Torricelli du triangle des 3 trous, lorsque ce point est intérieur au triangle (et en supposant qu'il n'y ait aucun frottement) :

La raison tient dans la construction vectorielle simple des forces s'exerçant sur le nœud, donc dans un double triangle équilatéral. Ce qui impose que les 3 ficelles font entre elles

des angles de $\frac{2\pi}{3}$. Si l'un des angles (en A) est

supérieur à $\frac{2\pi}{3}$, le nœud se stabilise en A (Si

le nœud est tiré vers un point quelconque de la table, il revient en A ; s'il descend dans le trou A, les masses en B et C exercent une force

verticale ascendante de $2\vec{P}$ contre la force

descendante \vec{P} et le nœud remonte). L'équilibre fait intervenir une réaction de la table au niveau où le nœud touche le bord du trou pour que la somme des forces soit nulle.

Une autre constatation s'impose : une position d'équilibre est une position d'énergie minimale. Donc l'équilibre des trois masses égales se fait lorsque l'énergie potentielle est minimale, c'est-à-dire lorsque les masses sont le plus bas possible, donc lorsque la somme des 3 longueurs de fil intérieures au triangle est minimale. »

Cette dernière remarque nous ramène au problème de Fermat : Un triangle ABC étant donné trouver un point M tel que la somme des longueurs MA + MB + MC soit minimale. Dans cet article il est rappelé une démonstration géométrique.

La démonstration qu'un physicien peut en donner de nos jours serait la suivante (cf. figure de l'encadré ci-contre) : Reprenons le système précédent et perçons une table horizontale en A_1, A_2, A_3 . Soient N le nœud, m_i les masses ponctuelles reliées par les ficelles passant par les trous A_i , l_i les longueurs des ficelles des masses m_i au nœud pour $i = 1, 2, 3$ (si les masses ne sont pas supposées ponctuelles prendre les longueurs aux centres de gravité des masses). Notons h la distance de la table au sol et h_i celle des masses au sol pour $i = 1, 2, 3$. Si on prend pour énergie potentielle zéro la ligne de terre, et si g dénote la gravitation, l'énergie potentielle est égale à $P = mgh$, et donc celle du système ainsi construit à $P = \sum m_i gh_i$.

Soient x_i pour $i = 1, 2, 3$, les longueurs respectives du nœud aux trous A_i , alors si les masses sont égales $l_i = x_i + h - h_i$.

Par suite $P = mg (\sum h_i)$; et comme $\sum h_i = \sum x_i + 3h - \sum l_i$ l'énergie potentielle du système est minimum (énergie qui traduit la position d'équilibre) si et seulement si $\sum h_i$ est minimum, c'est-à-dire si et seulement si la somme $\sum x_i$ est minimum.

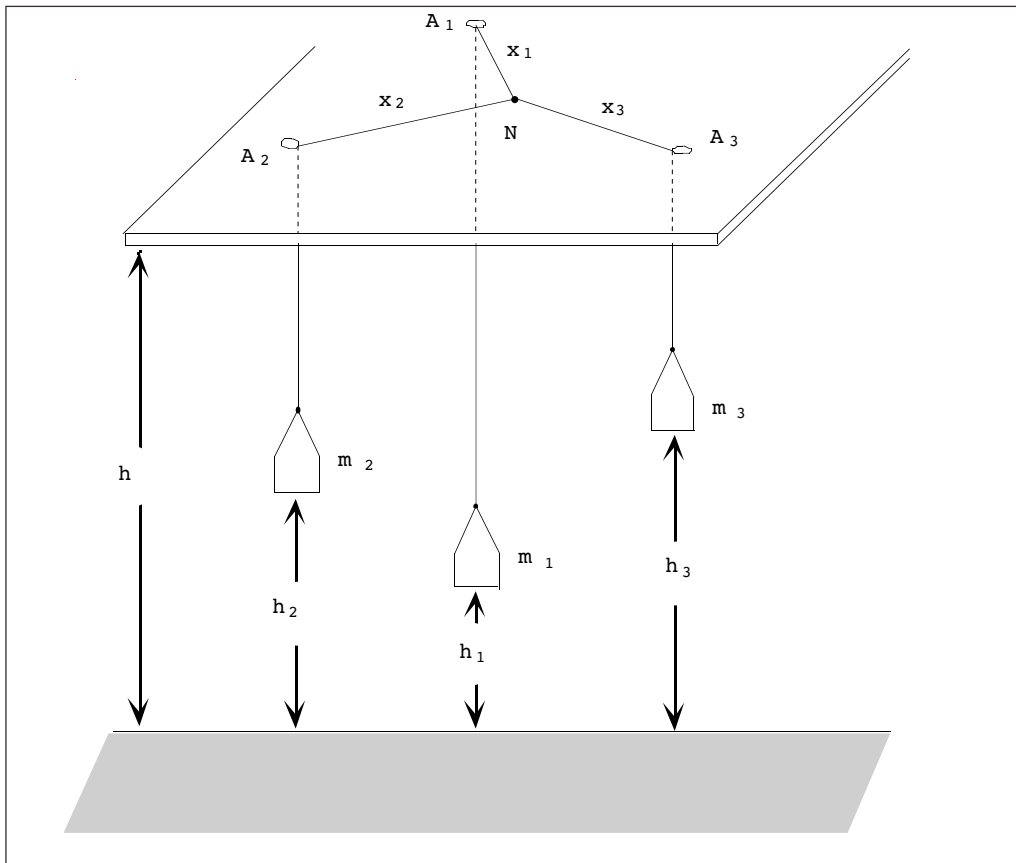
Note : Dans le cas où les masses ne sont pas égales, on obtient le problème de Fermat généralisé suivant : $P = \sum m_i gh_i$, d'où $P = g \sum m_i (x_i + h - l_i)$ et :

$$P = gh \sum m_i - g \sum m_i l_i + g \sum m_i x_i .$$

L'énergie potentielle du système est minimum si et seulement si la somme $\sum m_i x_i$ est minimum.

Considérons la démonstration que Lamé¹⁴, propose au problème suivant :

14 Op. cit., p. 84 et 85.



Problème : *Trouver un point tel, que la somme des distances de ce point à trois points donnés soit un minimum.*

« Si l'on suppose trois anneaux fixés aux points A, B, C [...], et un quatrième attaché au point O extrémité d'une corde, laquelle passera successivement par les anneaux fixes B, A, par l'anneau mobile O, et enfin, par le quatrième fixé en C ; il est évident qu'une force quelconque qui tirerait le cordon suivant CM, sera en équilibre avec la résistance des anneaux

fixes, lorsque la somme des cordons partiels sera minimum ; le point demandé est donc la position de l'anneau mobile O, lorsque l'équilibre a lieu. Mais les cordons partiels AO, BO, CO doivent être tendus également ; l'anneau O est donc tiré suivant ces trois directions par des forces égales ; si donc l'équilibre a lieu entre ces forces, il faut que la direction de l'une quelconque d'entre elles divise l'angle des deux autres en deux parties égales, ou ce qui revient au même, que les angles AOB, AOC, BOC soient égaux entre eux et aux

DEMONTRER,
POURQUOI ?

quatre tiers de l'angle droit. Le point demandé sera donc l'intersection de deux segments capables de $4/3$ d'angle droit, construits sur deux des côtés du triangle ABC...

Il pourrait arriver que l'un des angles du triangle, l'angle A par exemple, fût plus grand que $4/3$ d'angle droit, alors la construction ne serait plus possible. Mais il est aisé de voir que le point demandé serait le sommet A lui-même. En effet, si l'on conçoit que ce point soit toujours situé sur la ligne AO, le point O intérieur au triangle ABC satisfera toujours au problème, même si le point A se confondait avec lui, c'est-à-dire si l'angle A était égal à $4/3$ d'angle droit ; à plus forte raison ce point A sera-t-il encore solution du problème, lorsque l'angle A sera plus grand que $4/3$ d'angle droit.

Par une supposition entièrement semblable, on prouverait que le point qui jouit de la propriété de donner un *minimum* pour la somme de ses distances, à autant de point fixes que l'on voudra, est celui autour duquel seraient en équilibre autant de forces égales dont les directions seraient assujéties à passer chacune par un des points donnés. On peut exprimer analytiquement que l'équilibre a lieu relativement à ces mêmes directions, car on doit avoir en désignant par X, Y, Z les angles que forme l'une d'entre elles avec trois angles rectangulaires quelconques, par X', Y', Z' les mêmes angles pour une seconde direction, et ainsi de suite

$$\begin{aligned} (1) \cos X + \cos X' + \cos X'' + \text{etc.} &= 0 \\ \cos Y + \cos Y' + \cos Y'' + \dots &= 0 \\ \cos Z + \cos Z' + \cos Z'' + \dots &= 0 \end{aligned}$$

Si les points donnés sont situés dans un même plan, l'équilibre sera entièrement exprimé par les deux premières équations. Si de plus

les points se réduisent à trois, on aura :

$$\begin{aligned} \cos X + \cos X' &= -\cos X'' , \\ \cos Y + \cos Y' &= -\cos Y'' . \end{aligned}$$

Ajoutant les carrés de ces équations et observant que

$$\begin{aligned} \cos^2 X + \cos^2 Y &= 1 , \\ \cos^2 X' + \cos^2 Y' &= 1 , \\ \cos^2 X'' + \cos^2 Y'' &= 1 \end{aligned}$$

et $\cos X \cos X' + \cos Y \cos Y' = \cos v$,

v étant l'angle formé par les directions OA et OB, on trouvera $2\cos v + 1 = 0$; l'angle v est donc effectivement égal à $4/3$ d'un droit.

Si les points sont au nombre de quatre, toujours dans un même plan, les équations :

$$\begin{aligned} \cos X + \cos X' &= -(\cos X'' + \cos X''') , \\ \cos Y + \cos Y' &= -(\cos Y'' + \cos Y''') , \end{aligned}$$

dont on déduit en ajoutant leurs carrés :

$$\begin{aligned} \cos X \cos X' + \cos Y \cos Y' &= \\ \cos X'' \cos X''' + \cos Y'' \cos Y''' , \end{aligned}$$

indiqueront pour le point cherché, le point d'intersection des diagonales du quadrilatère.

Le calcul infinitésimal donne aussi les équations (1). En effet, si $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$, etc., sont les coordonnées des points donnés, x, y, z celles du point cherché, la somme des distances sera

$$\begin{aligned} D = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2} + \\ \sqrt{(x-\alpha')^2 + (y-\beta')^2 + (z-\gamma')^2} + \text{etc.} \end{aligned}$$

devra être *minimum*.

La différentiation successive par rapport aux trois variables, donne des équations identiques avec les équations (1) trouvées précédemment. »

Digressions.

L'étude sous plusieurs angles de cette figure nous permet de mieux l'appréhender et d'expliciter des relations qui nous auraient surpris au début mais que l'on n'a presque pas besoin de prouver car maintenant on a acquis une connaissance approfondie de la figure, une intuition qui nous guide de manière sûre. On donnera seulement des indications de preuves pour donner éventuellement au lecteur des pistes de recherches.

1°) Des conditions données a priori

Si on reprend ce que l'on pourrait appeler l'origine du problème donné, c'est-à-dire le problème physique d'équilibre du système table, cordes, masses, que l'on vient de décrire, peut-on se donner *a priori* un rapport entre deux masses, et l'angle que doit faire les cordes soutenant ces deux masses pour déterminer la troisième masse et la position d'équilibre ?

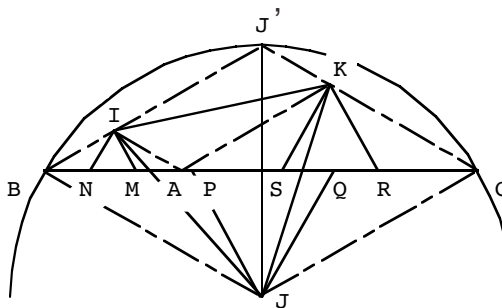
Par exemple si on suppose que deux masses sont égales ou l'une soit le double de l'autre et que les cordes fassent entre elles un angle de 90° ou de 60°. Dans cet ordre d'idée, il est immédiat de vérifier que si les masses sont entre elles comme les nombres 3, 4, 5, dans la position d'équilibre deux des cordes forment un angle droit.

En d'autres termes et dans un contexte mathématique, si on reprend les notations précédentes, comment déterminer le point tel que la somme $\sum m_i x_i$ soit minimum, ou étant donné un point du triangle comment déterminer les coefficients m_i pour résoudre ce problème ?

2°) Des relations entre divers éléments

Notons S'_A la similitude de centre A de rapport $\frac{\sqrt{3}}{3}$ et d'angle -30° . Alors l'isométrie $f' = S_B \circ S'_A$ est une translation telle que $f'(J) = K'$ et $f'(I) = A$: le quadrilatère $AK'JI'$ est un parallélogramme. On montre de même que les quadrilatères $BI'K'J'$, $CJ'IK'$ sont des parallélogrammes.

3°) Si le triangle donné dégénère en un triangle aplati ?



Une étude rapide donne la conviction que le triangle IJK est encore équilatéral, conviction étayée par nos différentes remarques relatives aux figures données par les constructions à l'extérieur et à l'intérieur en faisant glisser le sommet A du dessus au dessous de la droite BC. Le triangle aplati n'est alors qu'une position limite et on peut regarder si les démonstrations précédentes sont encore

valides (l'angle \widehat{BAC} devenant plat), ou essayer de trouver d'autres démonstrations dans cette situation particulière ce qui pourrait nous donner une autre connaissance de ce cas de figure. Celle que nous donnons ici est basée sur les cas d'égalités et n'utilise que des outils collège ; nous invitons le lecteur à en

DEMONTRER,
POURQUOI ?

chercher d'autres. Le quadrilatère $BJCJ'$ est un losange formé de deux triangles équilatéraux, et les points I et J sont situés sur les côtés BJ' et CJ' . Le quadrilatère $KJ'IA$ est un parallélogramme et $J'K = IA$; comme $IA = IB$, on a $J'K = IB$. Par suite les triangles BIJ et $J'KJ$ sont égaux : le triangle IJK est équilatéral (il est isocèle et l'angle en J vaut 60°).

4°) **Des problèmes d'extrema.**

Dans le cas où le point A parcourt le segment BC , le triangle IJK est d'aire bornée. On peut se poser la question de la détermination des positions du point A lorsque cette aire est maximale ou minimale. Comme nous avons remarqué que le point I parcourt le segment BJ' , l'aire sera maximale, respectivement minimale, lorsque le côté JI sera de longueur maximale, respectivement minimale.

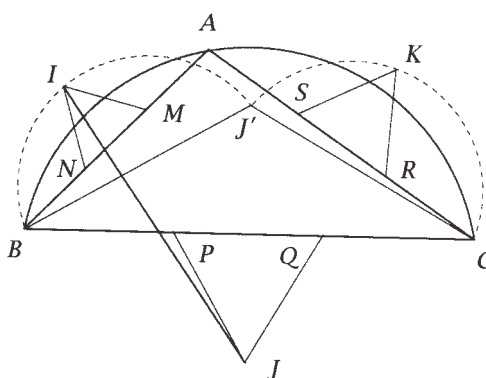
Par suite l'aire est maximale si le point I est confondu avec le point B ou le point J' , c'est-à-dire si le point A est en B ou en C ; et l'aire est minimale si le point I est situé au milieu de BJ' , c'est-à-dire si A est le milieu de BC .

Une autre façon de rendre compte de ceci est de constater que le quadrilatère $IJKJ'$ est d'aire constante : l'aire du triangle sera maximale, respectivement minimale, si l'aire du triangle IJK est minimale respectivement maximale.

On retrouve le résultat précédent en constatant que $IJ' + J'K$ est constant (ce qui renvoie à un autre problème d'extremum), ou en remarquant que l'aire du triangle IJK est moitié de l'aire du parallélogramme $IJK'A$. Mais cette dernière remarque est une autre histoire bien connue des étudiants de CAPES...

5°) **Si le point A parcourt un arc de cercle \widehat{BC} .**

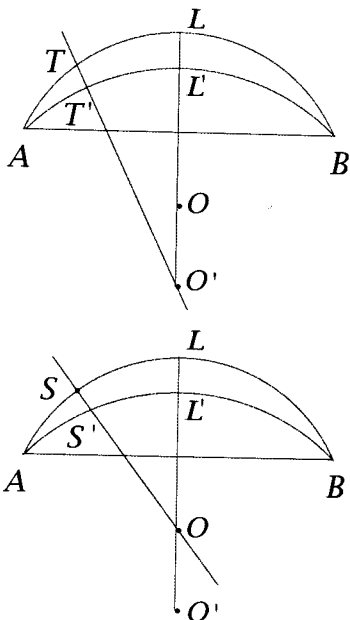
On peut se poser le même problème lorsque le triangle ABC n'est pas un triangle aplati, en considérant que l'angle en A est un angle constant, c'est-à-dire lorsque le point A parcourt un arc de cercle \widehat{BC} .



Lorsque le point A parcourt un arc de cercle donné \widehat{BC} , le point I (resp. le point K) parcourt l'arc de cercle semblable $\widehat{BJ'}$ (resp. l'arc $\widehat{CJ'}$). En fonction de l'arc de cercle donné plusieurs cas se présentent : les deux arcs de cercle $\widehat{BJ'}$ et $\widehat{CJ'}$ sont entre l'arc de cercle $\widehat{BJ'C}$ et les cordes BJ' et CJ' , les deux arcs de cercle sont l'arc $\widehat{BJ'C}$, les deux arcs de cercle sont extérieurs au cercle $BJ'C$. Ces situations correspondent successivement aux cas où l'arc de cercle, lieu géométrique du point A , est de mesure supérieure, égale et inférieure à 150° .

Montrons tout d'abord le résultat suivant :

Considérons L et L' les milieux de deux arcs de cercle \widehat{BLC} et $\widehat{BL'C}$ de centres respectifs O et O' et tels que l'arc $\widehat{BL'C}$ soit compris entre l'arc \widehat{BLC} et la corde BC . Une droite passant par O (respectivement O') coupe les arcs \widehat{BLC} et $\widehat{BL'C}$ aux points S et S' (respectivement T et T'). Alors $OL' < OS'$ et $O'T < O'L$.



Les points L, L', O, O' sont alignés et dans cet ordre et on a :

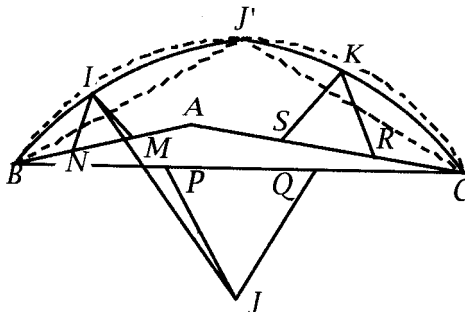
$$O'O + OL' = O'L' = O'S' < OO' + OS'$$

d'où $OL' < OS'$,

$$O'T < OT + OO' = OL + OO' = O'L.$$

Envisageons alors trois cas :

i) l'angle en A est plus grand que 150° :

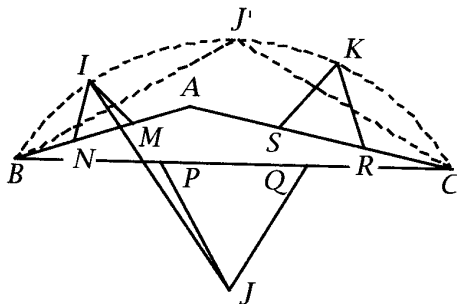


Les points I et K sont situés sur des arcs capables d'extrémités B, J', C et intérieurs à

l'arc de cercle $\widehat{BJ'C}$: l'aire du triangle IJK est maximale lorsque le point I est en B ou en J' , c'est-à-dire lorsque le point A est en B ou en C , et l'aire du triangle IJK est minimale lorsque le point I est en I_0 milieu de l'arc

$\widehat{BJ'}$, c'est-à-dire lorsque le point A est le milieu de l'arc \widehat{BC} (le triangle BAC est isocèle).

ii) l'angle en A vaut 150° :

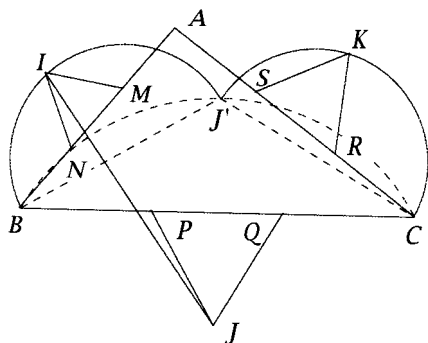


Le point I est situé sur l'arc de cercle

$\widehat{BJ'C}$ et le côté JI du triangle IJK est de longueur constante : l'aire du triangle IJK est constante.

DEMONTRER,
POURQUOI ?

iii) l'angle en A est plus petit que 150° :



Les points I et K sont situés sur des arcs capables d'extrémités B, J, C et extérieurs à

l'arc de cercle \widehat{BJC} : l'aire du triangle IJK est minimale lorsque le point I est en B ou en J, c'est-à-dire lorsque le point A est en B ou en C, et est maximale lorsque le point A est

milieu de l'arc \widehat{BC} (le triangle BAC est isocèle).

Pour en rester là, remarquons que les cercles, lieux géométriques des points I et K se coupent en deux points dont l'un de ces points ne devrait être que le centre de l'arc de cercle parcouru par le point A. Nous laissons le lecteur vérifier ou infirmer ceci...

Conclusion.

Faisons un retour sur la question que nous nous sommes posée au début de ce texte : chacune des démonstrations proposées dans divers contextes donne la preuve que le triangle est équilatéral. C'est-à-dire elles sont d'égale valeur quant à la validité du résultat. Mais les différents discours auxquels elles ont fait appel ne nous ont pas fait construire le même objet géométrique ; en ce sens cer-

taines se sont complétées, d'autres n'ont pas participé à cette construction (par exemple la démonstration analytique) et n'ont demandé qu'une dextérité technique. Chaque démonstration n'apporte pas les mêmes informations, le même regard sur la configuration ; celles-ci sont complémentaires et ensemble elles ont permis de resituer le problème dans un contexte plus large et de ce fait d'exploiter la richesse de cet exercice et de donner des pistes quant à des prolongements ou des idées nouvelles de par l'apport de compréhension des situations dégagées.

Comme nous avons essayé de le montrer ce sont les différentes lectures algébriques ou géométriques qui permettent d'entrevoir par des démonstrations successives et de natures différentes des propriétés nouvelles, des développements inattendus et d'anticiper la validation des résultats. C'est la multiplicité des regards qui fait penser à des relations, qui permet de voir autre chose et d'imaginer des pistes, qui parfois peuvent mener nulle part mais qui nous permettent de comprendre. Chercher à démontrer c'est chercher à comprendre la figure et montrer beaucoup plus.

La compréhension, la connaissance apportée par les démonstrations qui nous ont fait construire l'objet géométrique, nous ont permis de le placer dans des contextes divers plus ou moins signifiants, et le travail accompli nous a amené un questionnement permettant d'approcher la richesse de la situation géométrique. Plus on a avancé dans sa compréhension, plus les démonstrations ont pu apparaître comme des commentaires, des descriptions, car on savait que les relations entrevues étaient ou n'étaient pas, ceci presque *a priori* : c'est ce que parfois certaines personnes appellent l'intuition, en fait ce n'est qu'un

voyage réfléchi dans un dessin, une figure première, qui est devenu figure avec la multiplicité de ses significations données par les différentes démonstrations et les différentes questions que l'on s'est posées. Plus on réfléchit, plus on enrichit en voyant ce qui se passe, plus on a une intelligence de la figure, et plus on a un décryptage aisé et riche de celle-ci.

Ceci renvoie à la question de R. Bkouche¹⁵ « ... comment le langage et le calcul nous assurent-ils une connaissance des choses ? » Question à laquelle il répond relativement à l'enseignement des mathématiques par : « Quels sont les enjeux de la démonstration ?... La question de la place de la démonstration dans l'enseignement, se situe ainsi dans le « pourquoi ? » avant que d'être dans le « comment ? »... La question n'est pas d'enseigner la démonstration avec le semblant de progressivité proposé par les programmes... La question est d'amener les élèves à user d'une démarche démonstrative parce que celle-ci permet de répondre à des questions, et en ce qui concerne la géométrie, à des questions posées par l'étude des situations géométriques, parmi lesquelles les figures. »

Un des rôles de l'enseignant sera de choisir des démonstrations signifiantes car elles ont des aspects différents, et par suite ne font pas découvrir les mêmes propriétés et n'introduisent pas le même regard. C'est la pluralité des démonstrations qui permet de découvrir les richesses d'une configuration donnée.

Epilogue.

Pour continuer : En 1891 Collignon, Inspecteur général des ponts et Chaussées, pré-

¹⁵ Op. cit.

senta¹⁶ la construction d'un triangle équilatéral et d'un carré suivante :

« Si sur les côtés d'un triangle ABC, on construit les carrés extérieurs, et qu'on prenne les centres de ces carrés, on obtient un second triangle A'B'C' ; cela posé, les droites AA', BB', CC' sont les hauteurs du triangle A'B'C', et on a les égalités AA' = B'C', BB' = A'C', CC' = A'B'. Les deux triangles ont le même centre de gravité. — Les mêmes résultats s'étendent au cas où l'on prendrait les carrés rabattus sur le triangle, et non extérieurs.

Si l'on donne les numéros 0, 1, 2, ... n aux triangles successifs que l'on construit en répétant la même opération sur le dernier triangle obtenu ; si l'on appelle S_n la surface du triangle numéro n, T_n la somme des aires, a_n, b_n, c_n les trois côtés, on aura :

$$S_n = \left(\frac{S_0}{2} + \frac{T_0}{8\sqrt{3}}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^n + \left(\frac{S_0}{2} - \frac{T_0}{8\sqrt{3}}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^n,$$

$$T_n = 4\sqrt{3} \left[\left(\frac{S_0}{2} + \frac{T_0}{8\sqrt{3}}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^n - \left(\frac{S_0}{2} - \frac{T_0}{8\sqrt{3}}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^n \right],$$

$$a_n = \frac{T_n - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 (b_0^2 + c_0^2 - 2a_0^2)}{3}.$$

Les triangles convergent vers le triangle équilatéral. — On suppose ici les carrés extérieurs.

En faisant les mêmes constructions sur un quadrilatère, on obtient une série de quadrilatères, qui recevront les numéros 0, 1, 2, ... n .

¹⁶ Ed. Collignon Sur certaines séries de triangles et de quadrilatères, ASSOCIATION FRANÇAISE pour l'Avancement des Sciences, Marseille 1891 p. 153, 154.

 DEMONTRER,
 POURQUOI ?

1° Les centres de gravité de masses égales placées aux sommets de l'un quelconque des quadrilatères coïncident (ce théorème s'étend à un polygone quelconque) ;

2° Les diagonales $A_n C_n$, $B_n D_n$ du quadrilatère numéro n sont égales et se coupent à angle droit ;

3° Les sommets A_n et C_n , B_n et D_n sont situés sur deux droites fixes rectangulaires pour les valeurs impaires de n ; et pour les valeurs paires (0 excepté) sur les bissectrices des angles formés par ces deux droites ;

4° Au quadrilatère $A_1 B_1 C_1 D_1$ correspondent une infinité de quadrilatères $A_0 B_0 C_0 D_0$. Mais tous ces quadrilatères ont la même *excentricité*, c'est-à-dire la même distance entre les milieux des diagonales $A_n C_n$, $B_n D_n$; ces milieux sont situés sur un même cercle, décrit du centre de gravité G comme centre, avec un rayon égal à la distance du centre de gravité au point de concours des diagonales rectangulaires ;

5° Les quadrilatères successifs convergent vers le carré. Le carré est atteint du premier

coup si le quadrilatère numéro 0 est un parallélogramme.

Si S_n et T_n sont la surface et la somme des carrés du quadrilatère numéro n , on a pour toute valeur entière de n , à partir de l'unité,

$$S_n = S_1 \times 2^{n-1},$$

$$T_n = 4 f^2$$

f étant l'*excentricité* commune à tous les quadrilatères de la série."

Lorsqu'on lit un texte il est nécessaire de le lire avec un regard critique, de vérifier les affirmations, et peut être de les rectifier ; ce qui peut être une voie intéressante de développement du thème traité en laissant libre cours à son imagination au vu de son autonomie. Nous en resterons-là en posant la question : Trouve-t-on un résultat analogue si, pour polygone de départ, on prend un polygone à 5, 6, ... , n côtés ?

Bibliographie.

- E. Barbin Le rôle de la démonstration dans l'étude des figures géométriques, *in* Le Dessin Géométrique de la main à l'ordinateur, Actes du Colloque Inter-Irem Géométrie, 1994.
- B. Bettinelli Le point de Torricelli d'un triangle, Repères-Irem, n° 29, Octobre 1997.
- R. Bkouche De la démonstration en géométrie *in* Le Dessin Géométrique de la main à l'ordinateur, Actes du Colloque Inter-IREM Géométrie, 1994.
- M. Carral, Géométrie, Ellipses, 1995.
- Ed. Collignon, *Sur certaines séries de triangles et de quadrilatères*, Association Française pour l'Avancement des Sciences, Marseille 1891.
- R. Descartes, œuvres complètes, Editions Vrin.
- J. Dieudonné, Algèbre linéaire et Géométrie élémentaire, Hermann, Paris 1964.
- F. G. M. Exercices de géométrie 1920, rééditions J. Gabay.
- R. Godement, Cours d'algèbre 1966, Hermann, Éditeur des Sciences et des Arts.
- G. Lamé, Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie, Mme Ve Courcier, Imprimeur-Libraire 1818.
- H. Lombardi, Eloge du papier quadrillé, Repères-Irem, n° 45, octobre 2001.
- J.-V. Poncelet, Principes d'analyse et de Géométrie, Gauthier-Villars, Paris 1864.