ACTIVITES MATHEMATIQUES A PROPOS DE LA MESURE DE LA TERRE

Pascal QUINTON
Irem de Rennes

Résumé : *Le thème de la mesure de la Terre peut donner lieu à diverses activités mathématiques dans les classes de lycée. Elles permettent d'illustrer diverses notions figurant au programme de ces classes, mais elles sont aussi l'occasion d'une réflexion scientifique approfondie. Même les questions les plus simples (par exemple : quelle est la forme de le Terre ?) peuvent donner lieu à un débat scientifique, à partir du moment où l'on refuse toute forme d'argument d'autorité. La lecture de textes anciens est particulièrement adaptée à ce type de débat.*

Introduction

Le travail qui est présenté ici est constitué d'un ensemble d'activités utilisables en classe de 1ère S. Le thème de la mesure de la Terre permet en effet d'illustrer les notions de trigonométrie qui sont au programme de cette classe. Ces activités peuvent, bien entendu, être utilisées partiellement, mais il m'est apparu que l'examen par les élèves de l'ensemble de ces activités permet une démarche scientifique plus riche, dans la mesure où les questions posées apparaissent naturellement.

La première activité est basée sur un texte de Ptolémée, extrait de l'Almageste, dans lequel est expliqué pourquoi on peut considérer «à bon droit» que la Terre est «sensiblement en forme de sphère».

Dans une deuxième activité, on examine avec les élèves la mesure du méridien terrestre par Eratosthène. Le texte utilisé est extrait de l'*histoire des mathématiques* par Montucla. Outre son caractère pittoresque, ce texte a le mérite de mettre en évidence l'irritant problème des unités de mesure utilisées dans l'antiquité.

La troisième activité concerne la mesure du degré du méridien terrestre effectuée par Jean Picard en 1669-1670. La méthode utilisée est plus aisément comprise par les élèves, du fait qu'ils ont pu constater le caractère en quelque sorte théorique de la mesure d'Eratosthène, du moins telle qu'elle nous apparaît à travers les récits qui nous en sont parvenus.

1 La forme de la Terre

1.1 Texte de l'activité (document destiné aux élèves)

Preuve que la Terre est sphérique selon Ptolémée

On ne sait pas grand chose de la vie de Ptolémée. Il vivait à Alexandrie. On ne connaît pas la date de sa naissance ni de sa vie. Cependant les résultats des observations astronomiques qu'il a effectuées permettent aux astronomes modernes de situer dans le temps ces observations : elles ont eu lieu entre 127 et 150 après J.C. Le texte qui suit est extrait de l'ouvrage le plus fameux de Ptolémée : l'almageste.

Que la terre aussi, quand elle est considérée dans son ensemble, soit sensiblement en forme de sphère, voici comment on pourrait le concevoir : le soleil, la lune et les autres astres, on peut le constater, ne se lèvent pas (ou ne se couchent pas) au même instant pour tous les hommes sur terre, mais ils le font toujours plus tôt pour ceux qui habitent vers l'orient, toujours plus tard pour ceux qui habitent à l'occident. En effet, nous découvrons que les observations d'éclipses, et tout particulièrement celles de la lune, qui sont pourtant faites au même instant, ne sont pas rapportées partout à la même heure (c'est-à-dire à égale distance par rapport au midi), mais que les heures notées par les plus à l'est des observateurs sont toujours plus tardives que celles notées par les plus à l'ouest. Et puisque la différence des heures est trouvée proportionnelle à la distance entre les lieux, c'est à bon droit que l'on peut assumer que la surface de la terre est sphérique, parce que sa surface arrondie d'une manière homogène (lorsqu'elle est prise comme un tout) masque [des parties du ciel] pour [les observateurs] successifs d'une manière proportionnelle. Or, si la terre présentait quelque autre forme, cela n'arriverait pas, comme le montrent les considérations suivantes.

Si la terre était concave, les astres en se levant apparaîtraient d'abord aux habitants les plus proches de la région du couchant ; si elle était plate, [les astres] se lèveraient et se coucheraient en même temps pour tous les habitants de la terre ; si elle avait la forme d'un triangle ou d'un quadrilatère ou de quelque autre parmi les polygones, de nouveau [les astres se lèveraient et se coucheraient] de la même façon et au même instant pour ceux qui habitent sur la même surface plane : or on voit bien que cela ne se produit en aucune façon.

Que la terre ne peut pas non plus être en forme de cylindre, de telle sorte que la surface incurvée soit tournée vers le levant et le couchant, tandis que les côtés plats qui forment les bases seraient dirigés vers les pôles de l'univers, comme certains pourraient l'accepter comme étant tout à fait plausible, voici qui le montre. Pour aucun des habitants de la surface incurvée, aucun des astres ne serait toujours visible, mais ou bien tous et se lèveraient et se coucheraient pour tous les hommes, ou bien les mêmes astres, distant d'une distance déterminée de chacun des deux pôles, seraient toujours invisibles pour tous les hommes. Or dans la réalité, plus nous nous avançons vers le nord, plus nombreuses parmi les étoiles du sud sont celles qui deviennent cachées, plus nombreuses au contraire parmi les étoiles du nord celles qui apparaissent ; cela montre donc clairement que la courbure de la terre, cachant régulièrement les astres dans la direction nord-sud dans tous les cas, établit que la forme [de la terre] est de type sphérique.

À cela s'ajoute encore le fait suivant : si nous faisons voile vers des montagnes ou quelque endroit élevé, depuis quelque direction que ce soit, nous voyons leur grandeur s'accroître petit à petit, comme s'ils surgissaient de la mer elle-même, alors qu'auparavant ils y étaient plongés comme à cause de la courbure de la surface de l'eau.

Questions

Expliquer, à l'aide de schémas, et en suivant le texte de Ptolémée, les affirmations suivantes :

a. La terre n'est pas plate.
b. La terre n'est pas concave.
c. La terre n'est pas un polyèdre.
d. La terre n'est pas un cylindre dont l'axe est orienté du nord au sud.

1.2 Déroulement de l'activité. Réactions des élèves

La durée prévue pour cette activité est de l'ordre d'une heure. Après lecture par les élèves du texte de Ptolémée, la discussion se mène classe entière.

Le premier travail du professeur est de justifier la légitimité de la question posée : quelle est la forme de la Terre ? Parmi les arguments invoqués par les élèves quand on leur demande de prouver que la terre est «sensiblement sphérique», figurent ceux-ci :

Magellan en a fait le tour (Et si la Terre était cylindrique ? ou conique ?)

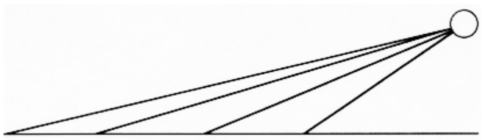
L'ombre de la Terre sur la Lune est «ronde» (Et si c'était un disque ?)

Les photographies prises de l'espace prouve que la Terre est sphérique (N'auriez-vous pas un moyen plus économique de prouver cela ?)

C'est avec surprise que les élèves apprennent que les astronomes de l'antiquité savaient déjà que la terre est sphérique. Pour la plupart d'entre eux, ils pensaient en effet que la preuve de la sphéricité de la terre avait été donnée, au péril de sa vie, par Galilée.

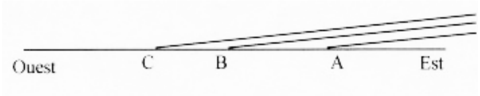
Une fois rétablie la vérité, reste à comprendre comment les astronomes grecs ont pu se rendre compte que la terre n'est pas plate, alors que toute la perception que nous avons du monde qui nous entoure nous conduit à penser le contraire. L'examen du texte de Ptolémée peut commencer.

a. La première question (illustrer par un schéma, et en suivant le texte de Ptolémée, l'affirmation selon laquelle la Terre n'est pas plate) mérite une discussion approfondie (pas loin d'un quart d'heure). Je propose aux élèves de représenter une coupe de la Terre, en l'imaginant plate, et de schématiser les rayons du soleil. Et j'obtiens ceci :



L'affirmation de Ptolémée (*si elle était plate, [les astres] se lèveraient et se coucheraient en même temps pour tous les habitants de la terre*) devient incompréhensible.

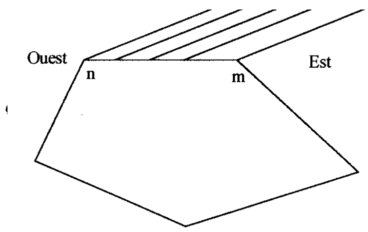
Il faut donc argumenter (c'est le rôle du professeur !) et préciser que la distance de la Terre au Soleil est assez grande pour qu'on puisse considérer que les rayons du soleil, à un moment donné, peuvent être représentés par des parallèles. Il y a là une difficulté que j'avais déjà remarquée lorsque j'avais abordé la mesure d'Eratosthène dans mes classes. On peut maintenant se mettre d'accord avec les élèves sur le schéma suivant :



b. Les questions b et c ne posent plus de difficulté.

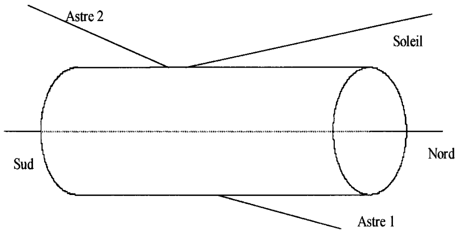
Dans ce dessin, le soleil se lève en B. Il fait encore nuit en A, alors que A est situé à l'est de B. *Si la terre était concave, les astres en se levant apparaîtraient d'abord aux habitants les plus proches de la région du couchant*

c.



Si [la terre] avait la forme d'un triangle ou d'un quadrilatère ou de quelque autre parmi les polygones, de nouveau [les astres se lèveraient et se coucheraient] de la même façon et au même instant pour ceux qui habitent sur la même surface plane : or on voit bien que cela ne se produit en aucune façon.

d. Cette question est plus délicate. Sur la figure qui suit, que je propose aux élèves, on constate que l'astre 2 ne serait visible par aucun habitant de la terre, puisqu'il serait audessus de l'horizon seulement pendant le jour. L'astre 1 se lèverait et se coucherait toutes les nuits pour tous les habitants de la terre :



2 Mesure de la circonférence terrestre par Eratosthène

2.1 Texte de l'activité (document destiné aux élèves)

2.1.1 *Eratosthène*

C'est aux mathématiciens, astronomes et philosophes grecs que l'on doit l'idée que la Terre est ronde. On leur doit également les premières évaluations de la circonférence de la Terre.

Une des mesures les plus fameuses est due à Eratosthène. Celui-ci a vécu à Alexandrie, en Egypte, de 273 à 192 avant Jésus-Christ. Eratosthène est resté célèbre à plus d'un titre. On lui doit en particulier une méthode permettant de rechercher les nombres premiers (les nombres entiers qui ne sont divisibles que par 1 et par eux même).

Voici comment Montucla raconte, dans son *Histoire des mathématiques*, publiée en 1758, la vie d'Ératosthène :

Eratosthène fut un de ces hommes rares dont le génie étendu embrasse tous les genres de savoir : orateur, poète, antiquaire, mathé-

maticien et philosophe, il fut nommé par quelques un πενταθλος (pentathlos), surnom qu'on donnoit à ceux qui avoient remporté la victoire dans les cinq exercices des jeux olympiques. Ce vaste savoir le fit choisir par le troisième Ptolémée pour son bibliothécaire, emploi qu'il exerça jusqu'à l'âge de quatre vingt ans, où, las d'une vie infirme et languissante, il la termina en se laissant mourir de faim. Il eût été plus philosophique d'attendre la mort de pied ferme.

2.1.2 *Mesure de la circonférence terrestre*

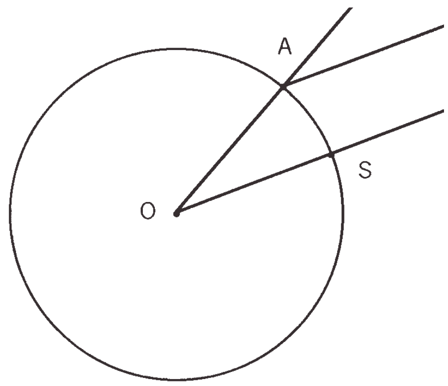
Le même Montucla décrit ainsi la manière dont Ératosthène a effectué sa mesure.

Il y avoit à Syène, un puits profond qui étoit entièrement illuminé à midi, le jour même du solstice d'été. Ératosthène l'avoit remarqué ; et comme à 300 stades à la ronde les hauteurs verticales ne jettoient pas d'ombre à ce moment, il en concluoit que Syène étoit précisément sous le tropique du Cancer. Il supposoit ensuite que Syène et Alexandrie étoient l'une et l'autre sous le même méridien et il estima leur distance de 5000 stades. Il ne s'agissoit plus que de connoître quelle partie du méridien terrestre étoit l'arc compris entre ces deux villes. Pour y parvenir, il attendit à Alexandrie le midi du jour du solstice, moment où le soleil étoit absolument vertical à Syène ; et (...) il mesura l'arc intercepté entre le soleil alors au zénith de Syène et le zénith d'Alexandrie. Il le trouva par-là d'une 50ème partie de la circonférence, d'où il conclut que la grandeur du degré terrestre étoit de 250 000 stades.

On peut schématiser ainsi la situation. On a représenté le méridien passant par Alexandrie (point A) et Syène (point S). Ce méridien est un cercle dont le centre O est le centre de la terre.

Questions :

1. Indiquer sur le dessin les directions suivantes :
a. le zénith de Syène.
b. le zénith d' Alexandrie.
c. la direction du soleil à Syène le jour du solstice.
d. la direction du soleil à Alexandrie le jour du solstice.



2. Marquer sur le dessin l'angle que mesure Ératosthène.
3. Démontrer que cet angle est égal à l'angle AOS.
4. Cet angle étant la 50ème partie de la circonférence terrestre, calculer la longueur en stades de cette circonférence.
5. Calculer en stades le rayon de la terre.

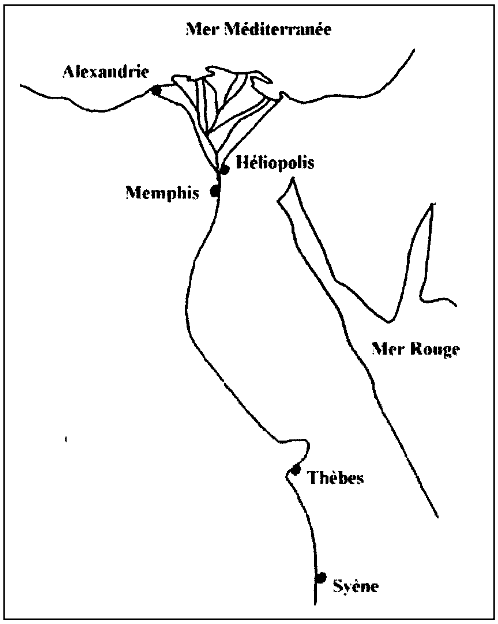
2.1.3 *Critique du résultat attribué à Eratosthène*

a. Les unités de longueurs utilisées

Le malheur est que nous ignorons la valeur du stade utilisé par Eratosthène. Voici ce que nous dit Montucla :

Au reste, un élément fort important qui nous manque ici, est l'espèce de stade qu' Era-

tosthène employa. On est d'abord porté à penser que c'est un stade Egyptien dont 60 composoient un schène, qui lui même valoit 4 miles romains ou 3024 toises, dans lequel cas ce stade valoit 50 toises 2 pieds.



Questions :

1. Sachant que la toise vaut 6 pieds, quelle est, en toises, la mesure de la circonférence terrestre obtenue par Ératosthène, si le stade qu'il emploie est le stade égyptien ?

2. Même question, dans l'hypothèse où le stade employé par Ératosthène serait le stade olympique lequel vaut, selon Montucla, environ 94 toises .

3 La toise utilisée par Montucla vaut approximativement 1,95 m. Exprimer en kilomètres les valeurs obtenues aux questions 1 et 2.

b. Les situations respectives de Syène et d'Alexandrie

Les villes de Syène (actuellement Assouan) et d'Alexandrie ne sont pas situées sur le même méridien. De plus, la mesure de la distance entre ces deux villes, qu'Eratosthène estime à 5 000 stades, n'est sûrement qu'une évaluation. Pour pouvoir obtenir une mesure précise de la circonférence terrestre par le méthode d'Eratosthène, il nous faudrait disposer de deux points A et B, dont on soit sûr qu'ils sont situés sur un même méridien, assez distants l'un de l'autre, et dont on puisse mesure la distance avec précision.

2.2 Déroulement de l'activité. Réactions des élèves

La durée prévue pour cette activité est de l'ordre d'une demi-heure. Compte tenu de ce qui est acquis lors de la première activité, le dessin proposé dans l'énoncé pour rendre compte de la mesure d'Eratosthène ne pose pas de problème aux élèves. Par contre, la discussion sur la validité de cette mesure introduit un certain sentiment de malaise. C'est, à mon sens, une situation tout à fait saine. Le malaise des élèves a plusieurs causes. Tout d'abord, ils n'ont guère l'habitude d'exercer leur esprit critique dans le cadre d'un cours de mathématique, où l'argument d'autorité (qui a l'avantage de procurer un profond sentiment de sécurité) tient souvent lieu de démonstration.

Ensuite, la discussion sur les unités de mesure, telle que la mène Montucla, pose une vraie question à laquelle aucune réponse n'est apportée dans le cadre de cette activité. Signalons à ce propos que la manipulation des stades, des toises et de leur conversions en mètres pose quelques problèmes ...

J'ai pris le parti délibérément de ne pas trancher quant à la longueur du stade utilisé par Eratosthène, en premier lieu parce que je n'ai pas d'élément assez précis et documenté sur cette question, en second lieu parce que l'intérêt m'en paraît limité pour des élèves de première. Le but n'est pas de discuter de la précision du résultat d'Eratosthène, mais plutôt de se poser quelques question sur la méthode qu'il a utilisé, ou plutôt sur la méthode que les récits qui nous sont parvenus (Théon de Smyrne, Cléomèdes, Strabon) lui attribuent. Nous ne savons pas non plus comment Eratosthène a mesuré la distance de Syène à Alexandrie (elle est de l'ordre de 850 kilomètres) et il me semble, ici aussi, plus sage de ne pas tenter de reconstitution hasardeuse de l'évaluation qu'a pu faire Eratosthène de cette distance. Il est par contre important de bien souligner la difficulté d'une telle évaluation.

3 La mesure de Picard

3.1 Texte de l'activité (document destiné aux élèves)

Au cours des années 1669-1670, l'abbé Jean Picard, membre de l'Académie des Sciences, fut chargé par celle-ci de mesurer la longueur du degré du méridien à la latitude de Paris. Diverses mesures avaient déjà été effectuées (Snellius, Riccioli), mais les résultats obtenus divergeaient. Une mesure précise était nécessaire pour permettre l'établissement de cartes détaillées.

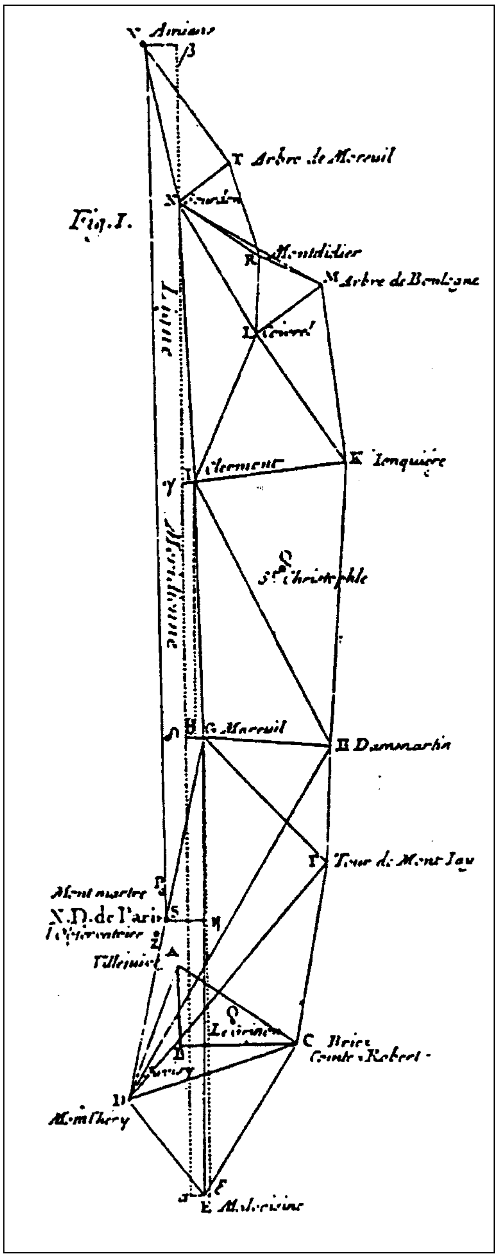
Voici comment Picard parle des mesures effectuées antérieurement à la sienne. Elles sont toutes basées sur le même principe.

Ce n'est pas d'aujourd'hui qu'on tâche de déterminer la grandeur de la Terre. Plusieurs anciens se sont signalés par cette recherche ; mais la plus mémorable entreprise qui ait été faite pour ce sujet, est celle des Arabes, qui est rapporté par leur Géographe[1] *en ces termes. « Les grands cercles de la Terre sont divisés en 360 parties, comme ceux que nous imaginons dans le Ciel : Ptolomée Auteur de l'Almageste, & plusieurs autres des Anciens, ont observé quel espace contenait sur la Terre l'une de ces 360 parties ou Dégrés, & ont trouvé qu'elle contenoit 66 milles et 2/3 ; & ceux qui sont venus après eux, ont voulu s'en éclaircir par leur propre expérience ; car s'étant assemblés par l'ordre d'Almanon dans les plaines de Sanjar, & ayant pris la hauteur du pôle, ils se séparèrent en deux troupes, les uns s'avancèrent vers le septentrion, & les autres vers le midi, allant le plus droit qu'il leur fût possible, jusqu'à ce que l'une des troupes eût trouvé le pôle plus élevé d'un Dégré, & que l'autre au contraire l'eût trouvé abaissé d'un Dégré ; ils se rassemblèrent après leur première station pour confronter leurs Observations. L'on trouva que l'une des troupes avoit compté dans son chemin 56 milles &2/3, au lieu que l'autre n'avoit compté que 56 milles justes ; mais ils demeurèrent d'accord du compte de 56 milles 2/3, pour un Dégré, si bien qu'entre les Observations des Anciens, & celle des Modernes, il y a une différence de dix milles.»* (…)

Entre les auteurs modernes, Fernel & Snellius ont été les premiers qui ne se contentant pas d'une tradition incertaine, nous ont voulu laisser leurs Observations particulières pour la grandeur du Dégré. Fernel au commencement de sa Cosmothéorie, dit qu'étant parti de Paris, il marcha directement vers le

1 Il s'agit, nous dit Picard en note, d'Abulfeda.

Nord, jusqu'à ce que par les hauteurs méridienne du Soleil, il eût trouvé la hauteur du Pole plus grande qu'à Paris d'un Dégré entier : mais soit qu'il ait voulu imiter les Arabes, ou pour quelqu'autre considération, il nous a celé le nom du lieu où il s'étoit arrêté, disant seulement que c'étoit à vingt-cinq lieues de Paris, & que pour sçavoir plus précisément cette distance, il monta dans un coche, compta tous les tours de roue jusqu'à Paris ; & qu'enfin ayant estimé ce que les inégalités & les détours des chemins avoient pû apporter d'augmentation, il jugea qu'un Dégré d'un grand cercle de la Terre contenoit 68096 pas géométriques, qui selon notre façon de mesurer, valent 56746 toises 4 pieds.



Le principe d'une telle mesure est simple en théorie. Il suffit de considérer deux lieux A et B, situés sur un même méridien, et dont la différence de latitude soit de 1°. On mesure alors la distance de A à B, qui est la longueur cherchée.

Dans la pratique, c'est compliqué à réaliser, pour plusieurs raisons. Tout d'abord, il est difficile de mesurer avec précision une distance en ligne droite dont l'ordre de grandeur est de 110 kilomètres. Il faudrait pouvoir se déplacer de façon rigoureusement rectiligne sur une telle distance (ce qui n'a rien d'évident), et de toute façon, il est fort peu probable qu'on trouve un endroit où un tel déplacement ne rencontre pas d'obstacle (taillis, rivières, etc.). D'autre part, il n'est en rien évident de s'assurer que deux endroits A et B sont sur un même méridien.

Les mesures dont rend compte Picard ne règlent pas ces problèmes. Les Arabes *se séparèrent en deux troupes, les uns s'avancèrent vers le septentrion, & les autres vers le midi,* allant le plus droit qu'il leur fût possible*, jusqu'à ce* *que l'une des troupes eût trouvé le pôle plus élevé d'un Dégré, & que l'autre au contraire l'eût trouvé abaissé d'un Dégré.* Fernel dit *que pour sçavoir plus précisément cette distance, il monta dans un coche, compta tous les tours de rouè jusqu'à Paris ; & qu'enfin ayant estimé ce que les inégalités & les détours des chemins avoient pû apporter d'augmentation, il jugea qu'un Dégré d'un grand cercle de la Terre contenoit 68096 pas géométriques, qui selon notre façon de mesurer, valent 56746 toises 4 pieds.*

A Principe de la mesure de Picard.
(voir figure ci-contre)

Les points A, B, ..., Y sont des points choisis par Picard de telle façon qu'on puisse mesurer sans difficulté les angles des triangles ABC, ACD, etc. Ces points sont donc visibles de loin, et facilement identifiables.

Ainsi :
A est le milieu du moulin de Villejuive.

B le plus proche coin du pavillon de Juvisy

C la pointe du clocher de Brie-Comte-Robert

D le milieu de la tour de Monthléry.

E le haut du pavillon de Malvoisine.

F une pièce de bois dressée exprès au haut des ruines de la tour de Monjay, & grossie de paille.

G le milieu du Tertre de Mareuil, où l'on a été obligé de faire des feux pour le marquer.

....

I le Clocher de Saint Samson de Clermont.

....

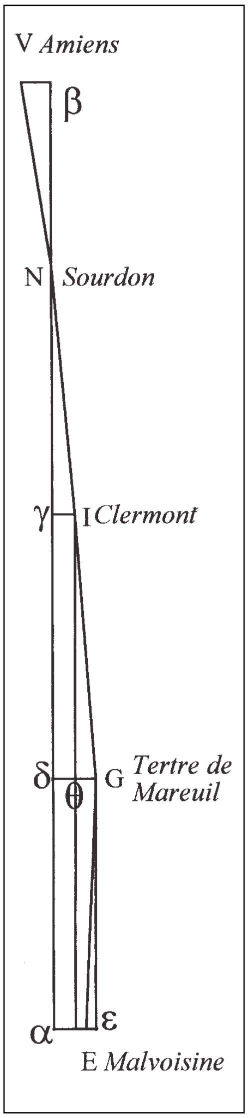
N le Clocher de Sourdon.

....

V le Clocher de Notre-Dame d'Amiens.

Cinq points jouent un rôle important : E, G, I, N et V.

Du schéma de Picard, on peut extraire le schéma suivant :



On a figuré le méridien qui passe en N. Les points β, γ, δ et α sont les projetés orthogonaux de V, I, G et E sur ce méridien. La méthode utilisée par Picard comporte trois étapes.

a. On mesure les distances VN, NI, IG et GE.

b. On mesure les angles VNβ, γNI θIG et εGE. On en déduit facilement les distances βN, Nγ, γδ et δα puis la distance βα. *Cette mesure se fait donc sans qu'il soit nécessaire de situer les points β et α sur le terrain.*

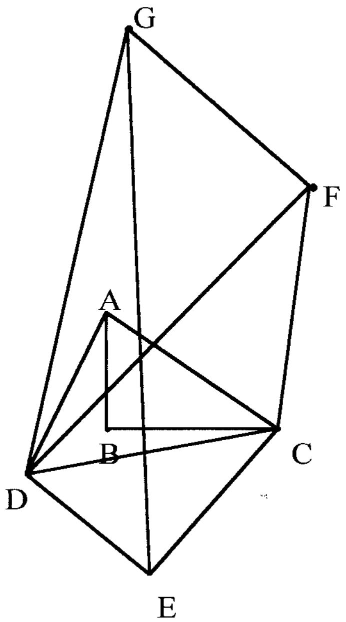
c. Il ne reste plus qu'à déterminer les latitudes φ_V et φ_E des points V et E. Ce sont aussi les latitudes des points β et α.

La longueur du degré de méridien est égale à :

$$\frac{\beta\alpha}{\varphi_V - \varphi_E}$$

B Mesure des distances EG, GI, IN et NV.

On ne s'intéresse ici qu'à la mesure de la distance GE. Les distances GI, IN et NV se calculent de manière analogue. Considérons le schéma ci-dessous :



Le segment AB constitue la base de la mesure de Picard.

Sa longueur est mesurée avec précision ce qui est possible car les points A et B sont relié par *«le grand chemin de Villejuive à Juvisy, lequel chemin étant pavé en droite ligne sans aucune inégalité considérable, & d'une longueur telle qu'on verra ci-après, est propre à servir de base fondamentale à toute la mesure qu'on y avait entreprise.»*

Picard évalue cette distance à 5663 toises.

Après quoi, il mesure les angles des triangles ABC, ACD, DEC, DCF, DFG et DEG. Les données suivantes sont extraites du texte de Picard.

Question : Compléter les blancs.

Indications : On remarquera que, pour les triangles I à V, il faut calculer les longueurs de un ou deux côtés d'un triangle dont on connaît les trois angles et un côté. On utilise donc la relation des sinus. Pour le triangle VI, on cherche la longueur d'un côté, connaissant les deux autres côté et l'angle de ces deux côtés. On utilise donc le théorème d'Al-Kashi.

I TRIANGLE ABC
Pour connaître le côté AC

CAB	*54° 4' 35"*
ABC	*95° 6' 55"*
ACB	*30° 48' 30"*
AB	*5663 toises (mes. actuelle)*
Donc	
AC	.....
BC	.....

II TRIANGLE ADC
Pour connaître DC & AD

DAC	*77° 25' 50"*
ADC	*55° 0' 10"*
ACD	*47° 34' 0"*
AC	.....
Donc	
DC	.....
AD	.....

III TRIANGLE DEC
Pour DE & CE

DEC	*74° 9' 30"*
DCE	*40° 34' 0"*
CDE	*65° 16' 30"*
DC	.....
Donc	
DE	.....
CE	.....

IV TRIANGLE DCF
Pour DF

DCF	*113° 47' 40"*
DFC	*33° 40' 0"*
FDC	*32° 32' 20"*
DC	.....

Donc

DF	.....

V TRIANGLE DFG
Pour DG & FG

DFG	*92° 5' 20"*
DGF	*57° 34' 0"*
GDF	*30° 20' 40"*
DF	.....

Donc

DG	.....
FG	.....

VI TRIANGLE GDE
Pour GE

GDE	*128° 9' 30"*
DG	.....
DE	.....

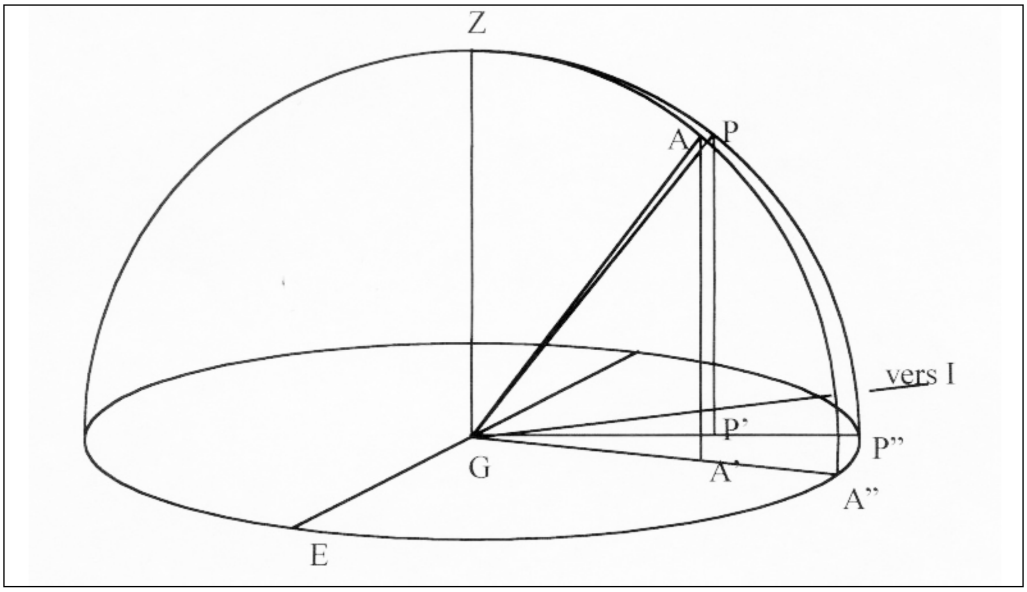
Donc

GE	.....

C Mesure de l'angle entre la droite (GI) et le méridien.

Cette mesure se fait à l'aide d'une visée astronomique.

Dans la figure ci-dessous, G est le tertre de Mareuil. On repère les directions de l'espace à l'aide d'une sphère centrée en G et de rayon R quelconque. Cette sphère coupe le plan horizontal selon un cercle centré en G.



[GP) a la direction du pôle nord céleste.
[GZ) indique la verticale.
[GP") indique la direction du nord sur l'horizon.
P' est le projeté orthogonal de P sur le plan horizontal.
Les points G, P, Z, P' et P" sont donc coplanaires. P' est sur la demi-droite [GP").

[GE) indique la direction de l'est sur l'horizon (l'angle EGP" est donc droit).
[GI) indique la direction de Clermont.

[GA) indique la direction de l'étoile polaire au moment où elle se situe le plus à l'est.
A' est le projeté orthogonal de A sur le plan horizontal.
La demi-droite [GA') coupe le cercle de centre G passant par E et P en A".

L'angle PGA est, semble-t-il connu à l'aide de mesures effectuées antérieurement. PGA = c = 2°28'.

La mesure de Picard concerne les angles A"GI et P"GP. L'angle A"GI vaut 4°55'. L'angle P"GP, la *hauteur du pôle* vaut a = 49°5'. La mesure en est faite par Picard, au moyen d'autres visées astronomiques que nous n'examinerons pas ici.

On cherche l'angle A"GP" = b, qui nous permettra de calculer l'angle P"GI.

La demi-droite [GA) donne la direction de la polaire au moment où elle se situe à l'est du pôle. A ce moment-là, le pôle et l'étoile polaire ont la même hauteur au-dessus de l'horizon, c'est à dire que les angles PGP' et AGA' sont égaux. Il est alors facile de voir (et nous l'admettrons sans autre forme de procès) que AA'P'P est un rectangle et que, par conséquent, les longueurs AP et A'P' sont égales.

L'instrument qu'utilise Picard permet de matérialiser le plan (ZAG). Ce plan coupe le cercle horizontal en un point A".

Picard laisse en place son instrument toute la nuit et est en mesure, le matin, de repérer sur l'horizon, la direction du point A".

Questions

Expression de cos *b* en fonction de *a* et *c*.

Dans les questions 1 à 4, on n'utilisera pas les valeurs numériques des angles a et c.

1 Exprimer PA^2 en fonction de R et de l'angle c. (Indication : appliquer le théorème d'Al-Kashi dans le triangle PGA).

2 On rappelle que les angles A'GA et P'GP sont égaux (à a).
En déduire que GA' = GA cos$a$ = R cos a et GP' = GP cos$a$ = R cos a

3 Exprimer $P'A'^2$ en fonction de R, a et b (utiliser de nouveau le théorème d'Al-Kashi dans le triangle P'A'G).

4 Déduire de ce qui précède que :
$$1-\cos c=(1-\cos b)\cos^2 a$$
puis que :
$$\cos b=\frac{\cos c-\sin^2 a}{\cos^2 a}.$$

Calcul de l'angle *b* et de l'angle GIθ.

On rappelle que :
a = 49°5' , c = 2° 28' et A"GI = 4 ° 55'.

5 Calculer l'angle b.
6 Calculer enfin l'angle entre le méridien

et la droite reliant le tertre de Mareuil à Clermont. Cet angle est encore égal à l'angle GIθ.

D Où l'on finit les calculs.

Picard donne les valeurs suivantes :
NV = 11 161 toises 4 pieds (*n.b.* chaque toise vaut 6 pieds).
NI = 18 907 toises.
IG = 17 564 toises.
GE = 31 895 toises.

Il donne également les angles suivants :
VNβ = 18° 55'. INγ = 2° 9' 10"
GIθ = 1° 9' EGε = 0° 26'

1 Calculer la longueur βα.

2 Picard effectue diverses corrections et retient la valeur 78 850 toises pour la longueur βα. Il évalue enfin la différence des latitudes de Malvoisine et d'Amiens à 1° 22' 55".

a. Calculer la longueur d'un degré de méridien entre Paris et Amiens.

b. La toise utilisée par Picard est la *toise du grand Châtelet*. On peut l'évaluer à 1,949 m. Quelle est la mesure en km du degré du méridien selon Picard ?

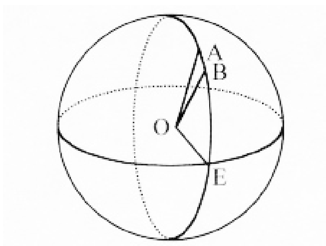
c. En admettant que la terre soit sphérique, quelle valeur peut-on en déduire de la circonférence terrestre ?

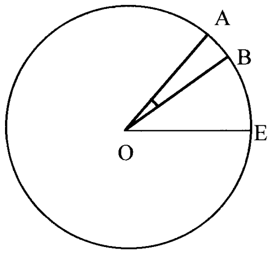
3.2 Déroulement de l'activité. Réactions des élèves

3.2.1 *Première séance (1 heure). Partie A (principe de la méthode utilisée par Picard) et partie B (calcul de la distance GE)*

3.2.1.1 *Mise en place de l'activité (20 à 25 minutes)*

Cette mise en place est essentielle. Elle se fait avant toute distribution de document aux élèves. On commence par confronter les trois dessins suivants :





Le deuxième dessin est une vue en coupe du premier. Le troisième dessin s'apparente à une carte. Pour mesurer la circonférence terrestre, il suffit de mesurer la longueur d'un arc AB d'un méridien et d'évaluer l'angle

AOB, O étant le centre de la terre. Cet angle s'obtient en calculant la différence des latitudes des points A et B.

Il faut s'assurer, indépendamment de toute carte, (pour disposer d'une telle carte, il faut au préalable connaître les dimensions de la Terre) du fait que les points A et B qu'on aura choisis sont effectivement sur le même méridien.

Deuxième type de problème : pour obtenir une mesure fiable de la circonférence terrestre, il est nécessaire que l'angle AOB ne soit pas trop petit. Dans ces conditions, la distance AB à mesurer sera importante (de l'ordre de 110 km, si AOB est de l'ordre de 1°). Même en admettant qu'il n'y ait aucun obstacle naturel entre A et B, il n'est pas certain qu'on puisse être sûr de mesurer la distance AB en ligne rigoureusement droite.

Ces problèmes sont au centre des préoccupations de Jean Picard qui effectue une mesure du méridien terrestre (plus exactement du degré du méridien terrestre) en 1669-1670.

Maintenant, il est temps de distribuer aux élèves la partie A du document. Une lecture commentée par le professeur du texte de Picard sur les mesures antérieures à la sienne permet d'insister sur leur caractère imprécis.

On peut ensuite expliquer le principe de la mesure de Picard, en insistant sur les points cruciaux suivants :

Les points situés sur le même méridien et dont on mesure les latitudes le sont par définition. Ils n'ont pas à être situés sur le terrain. Les autres mesures sont des mesures d'angles, lesquelles peuvent se faire avec précision grâce à des instruments appropriés. La seule mesure de distance sur le terrain se fait sur une distance modeste (la base AB, qui mesure 5663 toises, soit environ 10 km) et dans un endroit qui se prête à cette mesure (les points A et B sont reliés par un chemin en ligne droite et sans inégalité considérable).

On lit avec les élèves la liste des points décrits par Picard et on leur fait repérer ces points sur le schéma de Picard.

On leur fait ensuite tracer sur le dessin les segments VN, NI, IG et GE, ainsi que les méridiens qui passent par V, N, I, G. De cette façon, on fait apparaître le schéma qui figure à la fin de la partie A du document destiné aux élèves.

On détaille ensuite les trois étapes de la mesure de Picard (calcul des distances VN, NI, IG, GE, mesure des angles $VN\beta$, γNI θIG et εGE, mesure des latitudes de V et de E). On fait remarquer aux élèves que les points α et β sont, par définition, sur un même méridien et qu'on obtient la longueur $\alpha\beta$ et l'angle $\alpha O\beta$ (O étant le centre de la terre), *sans avoir à situer les points α et β sur le terrain et sans avoir à mesurer en ligne droite la distance qui les sépare*.

3.2.1.2 Partie B (30 minutes)

Les calculs demandés dans la partie B peuvent être effectués de façon autonome par les élèves. Les principales difficultés rencontrées concernent les mesures d'angles en degrés, minutes et secondes. La masse des calculs à faire nécessite de la part des élèves une organisation rigoureuse des calculs. Certains élèves ont tenté de dessiner à l'échelle les triangles de Picard.

On obtient les résultats numériques suivants :

Triangle ABC	AC = 11 012,89 toises BC = 8 953,90 toises
Triangle ADC	DC = 13 121,59 toises AD = 9 922,37 toises
Triangle DEC	DE = 8 870 toises CE = 12 389,22 toises
Triangle DCF	DF = 21 657,83 toises
Triangle DFG	DG = 25 643,40 toises FG = 12 963,59 toises
Triangle GDE	GE = 31 895,73 toises.

Les élèves ont pour consigne de finir chez eux le calcul pour la séance suivante.

3.2.2 Deuxième séance (1 heure). Calcul de l'angle entre la direction de Clermont au Tertre de Mareuil et le méridien (partie C de l'activité)

3.2.2.1 Le texte de Picard

La partie C a été élaborée à partir du texte suivant (que je n'ai pas distribué aux élèves, la lecture m'en paraissant un peu trop difficile).

Après avoir mesuré les distances particulières entre Malvoisine, Mareuil & Sourdon, & même y avoir ajouté celle d'Amiens, il falloit examiner la position de chacune de ces lignes à l'égard de la Méridienne.

Pour cet effet, au mois de Septembre de l'année 1669, nous allames sur le Tertre de Mareuil, à l'endroit marqué G, d'où l'on voyait Malvoisine d'un côté, & Clermont de l'autre, & nous mîmes le quart de cercle garni de ses deux Lunettes à plomb sur son pied, ensorte que la lunette EF demeuroit toujours dans le niveau, pendant que le plan de l'Instrument étoit tourné verticalement, & que la lunette de l'Alilade GH étoit pointée vers l'Étoile Polaire. On suivit ainsi cette Étoile jusques à la plus grande digression, où elle demeuroit un espace de temps assez sensible sans sortir du filet vertical de la Lunette avec laquelle on l'observoit, & alors, on laissa l'Instrument fixe dans sa position le reste de la nuit jusqu'à ce que le jour étant venu on pût découvrir l'endroit du bord de l'horizon, auquel la lunette EF se trouvoit pointée, & déterminer par ce moyen le vertical de la plus grande digression de l'Étoile Polaire : car on sçavoit par expérience, que quand le quart de Cercle étoit dressé à plomb, les deux Lunettes demeuroient toujours pointées dans un même vertical. Par cette Observation que l'on rëïtera plusieurs fois, on s'assura d'un point éloigné qui marquoit le vertical de la plus grande digression orientale de l'Étoile Polaire, lequel vertical faisoit avec la ligne GI un angle de 4°55' vers l'Orient : or le complément de la déclinaison de l'Étoile Polaire étoit alors de 2°28', & la hauteur du Pole au Tertre de Mareuil, ainsi qu'elle fut ensuite trouvée, est de 49°5', & par conséquent la digression de l'Etoile Polaire étoit de 3° 46' : il restoit donc encore un degré neuf minutes dont la ligne GI décline du Nord vers l'Occident ; & parce que d'ailleurs les lignes GI, GE font un angle de 178° 25' vers l'Occident, lequel angle augmenté de la déclinaison de la ligne GI ne fait que 179° 34', il s'ensuit que GE décline de 26' du Midy vers le Couchant.

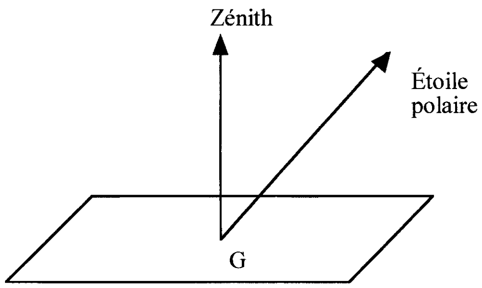
3.2.2.2 Mise en place de la figure.
(environ 25 minutes)

Cette mise en place se fait avant d'avoir communiqué aux élèves le moindre document.

Le problème posé est le suivant : on est en G (le Tertre de Mareuil). On voit le point I (le clocher de St Samson à Clermont). On veut évaluer l'angle entre la direction de Clermont et celle du nord.

1. Le problème qu'on peut poser aux élèves est le suivant : vous êtes perdu la nuit et vous devez marcher vers le nord. La nuit est claire et vous voyez les étoiles.

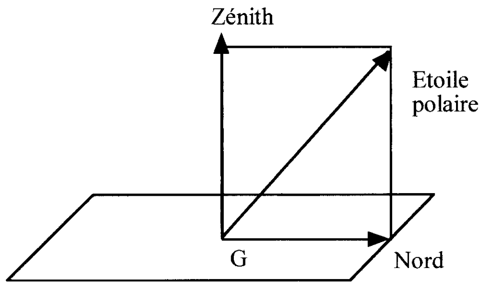
En principe, il y aura bien quelqu'un pour parler de l'étoile polaire. Le dessin qu'on peut mettre en place est le suivant :



On se situe en G. On a figuré le plan horizontal. La verticale en G définit ce qu'on appelle le zénith.

2. Bien entendu, on doit marcher vers le nord *dans le plan horizontal.*

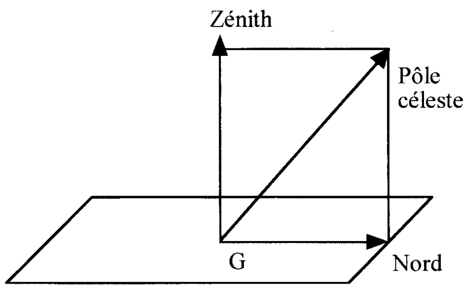
La direction du nord s'obtient donc de la façon suivante : le demi-plan défini par les deux demi-droites [GZ) et [GP) coupe le plan horizontal selon une demi-droite qui indique la direction du nord.



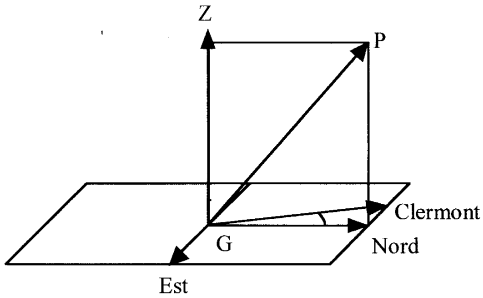
3. La question suivante à poser aux élèves pourrait être celle-ci : pourquoi l'étoile polaire indique-t-elle le nord ?

A partir de cette question, on peut faire prendre conscience aux élèves du mouvement apparent des étoiles. La polaire, au contraire des autres étoiles, est fixe, ou du moins presque fixe.

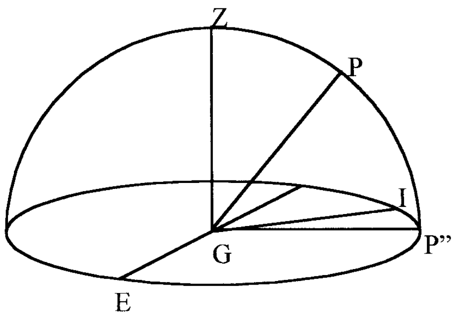
On peut alors définir le pôle nord céleste et rectifier le dessin de façon à obtenir ceci :



Finalement, on place sur notre dessin la direction de l'est et celle de Clermont. Le problème de Picard est d'évaluer l'angle marqué sur la figure ci-dessous :

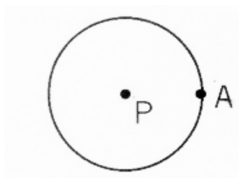


d. On fait ensuite remarquer aux élèves que notre problème ne fait intervenir que des angles. Il ne s'agit donc que de repérer des directions de l'espace. Pour repérer des angles dans le plan, il est fortement indiqué d'utiliser un cercle. Dans l'espace, on utilise une sphère. Il s'agit de mettre en place la figure suivante :



Pour repérer les directions de l'espace, à partir du point G, on considère une sphère centré en G (n'importe laquelle). Chaque demi-droite issue de G coupe la sphère en un point unique. On obtient la figure ci-dessus. L'intersection du plan horizontal et de notre sphère est un cercle. La demi-droite [GZ) donne la direction du zénith, [GP) celle du pôle céleste, [GP") celle du nord, [GE) celle de l'est, [GI) celle de Clermont. L'angle α que nous cherchons est P"GI.

e. Picard explique qu'il repère la plus grande digression orientale de la polaire. Le schéma suivant devrait éclaircir le débat :



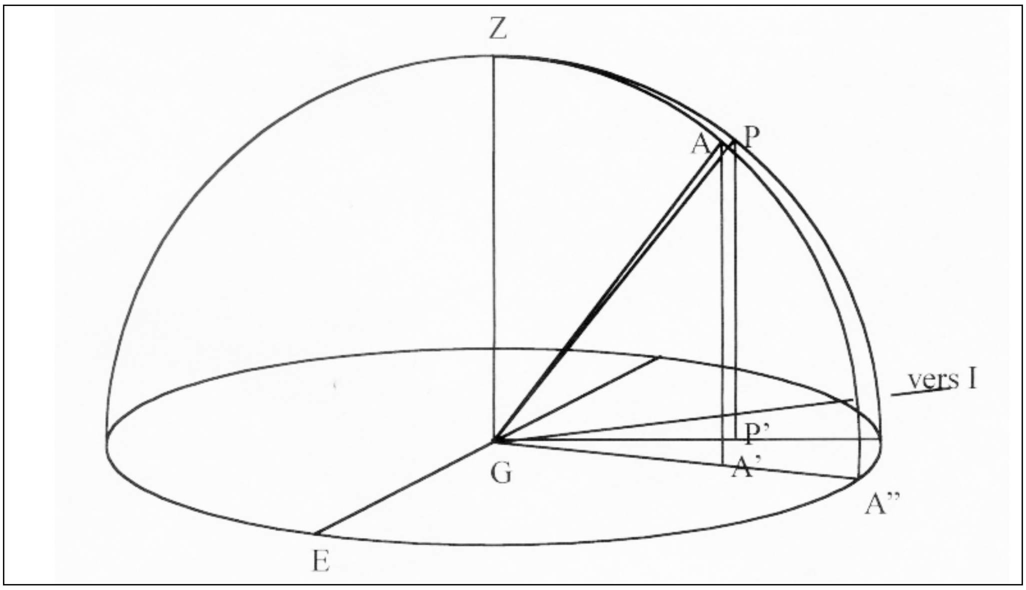
Picard observe l'étoile polaire. Son mouvement apparent est celui d'un cercle, centré autour de l'axe (GP). Picard repère la direction de la position la plus à l'est de la polaire.

f. On place maintenant sur le dessin la direction observée par Picard et on obtient la figure représentée à la page suivante.

Le fait que la polaire soit située à l'est du pôle se traduit par le fait que la droite (PA) est horizontale, c'est à dire parallèle au plan horizontal. Elle est en fait parallèle à la droite (GE). On remarquera aussi que le projeté orthogonal P' de P sur le plan horizontal est sur la demi droite [GP") et que de même A' est sur [GA").

On explique enfin que Picard mesure en fait l'angle A"GI, qu'il mesure par ailleurs l'angle P"GP (c'est la hauteur du pôle). Enfin, Picard connaît l'angle PGA (quelqu'un d'autre semble-t-il a fait cette mesure).

g. On peut maintenant donner aux élèves le



texte de la partie C de l'activité. On leur fait marquer sur la figure les angles connus et l'angle à calculer. La suite de l'activité ne pose pas de gros problème : c'est un problème de géométrique classique pour des élèves de première S.

On obtient b ≈ 3° 46' et, pour l'angle IGP' : 4° 55' – 3°46 = 1°09' (ce qui est effectivement la valeur donnée par Picard).

La partie C de l'activité est laissée à finir aux élèves pour la séance suivante.

3.2.3 Troisième et dernière séance (1 heure) : Correction de la partie C. Partie D et conclusion

On obtient :

$N\beta$ = 10 558,83 toises
$N\gamma$ =18893,66 toises
$\gamma\delta$ = 17 560,46 toises
$\delta\alpha$ = 31 894,09 toises.

On en déduit que : $\alpha\beta$ = 78 907 toises.

Picard obtient ce résultat. Il effectue diverses corrections et retient la valeur de 78 850 toises. La mesure du degré de méridien est alors : $\dfrac{78\,850}{1+\dfrac{22}{60}+\dfrac{55}{3600}} \approx 57057$ toises.

Cette mesure correspond à 111,204 km. Ce qui donne, dans l'hypothèse où la terre est assimilée à une sphère, une circonférence de 40 033 km.

Pour conclure, il reste à essayer de critiquer le résultat de Picard, et essayer, enfin, de répondre à la question légitime des élèves : combien mesure, *pour de vrai*, le méridien terrestre. J'ai pris le parti, tout au long du déroulement de l'activité, de ne pas répondre à cette question, me contentant de dire que le résultat de Picard est de l'ordre de 40 000 km.

On peut soumettre aux élèves quelques précisions.

Tout d'abord, Picard part du principe que la Terre est sphérique. On sait (les élèves savent) que ce n'est pas tout à fait exact, qu'elle est aplatie aux pôles. Lorsque Picard effectue sa mesure, personne ne s'en doute. Les expériences de Richer, faisant apparaître que la longueur d'un pendule qui bat la seconde n'est pas la même à Paris qu'à Cayenne, datent de 1672 (2 ans après la mesure de Picard). Ces expériences font apparaître une différence de la pesanteur entre ces deux points, suggérant que Cayenne est plus loin que Paris du centre de la Terre.

L'interprétation de ces résultats est au centre d'une polémique au 18ème siècle dans les cercles scientifiques français, entre les tenant de la physique newtonienne (qui soutenaient que la terre est aplatie aux pôles) et les tenant de la physique cartésienne (qui soutenaient qu'elle est au contraire allongée). La controverse fut tranchée par des mesures du degré de méridien effectuées en Laponie (Maupertuis, 1736-37), au Pérou (Bouguer, La Condamine, 1736-1743) et en Afrique du Sud (La Caille, 1752).

La Terre est aplatie aux pôles.

Parmi les critiques faites à Picard, signalons celles de Maupertuis, qui portent sur les observations astronomiques de Picard. Maupertuis adopte les «mesures terrestres» de Picard (ne trouvant rien à redire) mais tient pour peu sûres ses mesures de latitudes.

Une autre mesure fameuse, et dont il faut bien sûr parler aux élèves, est celle qu'ont effectuée Delambre et Méchain entre 1792 et 1798 entre Barcelone et Dunkerque. Il s'agissait d'établir un étalon du mètre, lequel était défini en 1791 comme la dix millionième partie du quart du méridien terrestre [2]. Autrement dit, par définition, le méridien terrestre mesure 40 000 kilomètres.

La précision de la mesure de Delambre et Méchain n'étant pas suffisante, la définition du mètre a évolué. En 1889, la définition du mètre change une première fois : le mètre devient seulement la longueur de l'étalon déposé au pavillon de Breteuil à Sèvre. Nouvelle définition en 1960 : 1 mètre égale 1 650 763,73 fois la longueur d'onde, dans le vide, de la radiation orange de l'atome de krypton-86. La définition actuelle du mètre date de 1983. Le mètre est la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant 1/299 792 458 seconde.

Conclusion

Le temps consacré à l'ensemble de ces activités est de l'ordre de 6 heures. Ces activités ont été conçues dans le cadre des anciens programmes de 1ère S, à l'époque où l'horaire hebdomadaire comportait 6 heures de mathématiques. Les nouveaux horaires (restreints) et programmes (copieux) peuvent être un élément dissuasif pour entreprendre une activité aussi longue.

Ceci dit, le travail effectué par les élèves s'insère bien dans le cadre du programme de

2 Cette définition est inconnue de la plupart des élèves. Il m'a été donné d'entendre des étudiants d'IUFM s'extasier sur le fait que la mesure du méridien terrestre soit exactement de 40 000 km !

1ère S (comme application du produit scalaire) et la géométrie qui y est pratiquée est bien celle qu'on fait usuellement pratiquer aux élèves de cette classe.

Par contre, la perspective dans laquelle ces activités se situent me semblent formatrice pour les élèves, essentiellement parce que la question posée (quelle est la forme de la Terre, et quelles sont ses dimensions ?) est une vraie question et que les textes qui sont proposés donnent des réponses qui sont elles-mêmes sujettes à caution. Même les résultats obtenus par Picard ne peuvent pas être tenus pour certains. A la différence cependant de ce qui nous est parvenu d'Eratosthène, nous avons là un texte scientifique documenté. Les méthodes de mesure utilisées sont décrites avec précision, les lieux où ces mesures ont été faites sont bien identifiés, de sorte que quiconque voudrait vérifier les résultats obtenus par Picard pourrait le faire. C'est tellement vrai que certaines mesures ont été refaites par la suite (par exemple, les mesures de latitudes d'Amiens et de Paris par Maupertuis). Mon expérience récente des TPE en classe de terminale S m'a permis de constater qu'il est indispensable de faire comprendre aux élèves la différence entre un texte de style journalistique et un texte scientifique. Il me semble que les activités présentées ici peuvent aider à faire cette distinction.

Bibliographie

Guedj D. Le mètre de monde Editions du seuil 2000

Montucla Histoire des mathématiques 2e ed 1799-1802

Verdet J.P. Astronomie et Astrophysique. Textes essentiels Larousse 1993

[On y trouvera le texte de Ptolémée et les textes de Picard dont je me suis servi dans ces activités.]