ARITHMETIQUE EN TERMINALE S SPECIALITE MATHS : QUEL(S) ENSEIGNEMENT(S) ?

Lætitia RAVEL
IMAG, Université de Grenoble

L'arithmétique vient de réapparaître, après près de 20 ans d'absence, dans les programmes de mathématiques du collège et du lycée. A la rentrée 1998, des contenus d'arithmétique sont réapparus au programme de la classe de terminale S spécialité mathématiques. A la rentrée 1999, ce sont les programmes de la classe de troisième qui ont intégré des notions d'arithmétique. Enfin, depuis la rentrée 2001, les nombres premiers sont au programme de la classe de seconde.

Notre recherche [1] se situe au niveau de la classe de terminale S spécialité mathématiques et cet article a pour objectif de montrer que la réintroduction de l'arithmétique dans cette classe s'est faite avec une grande variabilité, les enseignants ayant fortement investi l'espace de liberté dont ils disposent par rapport au programme pour construire leur cours.

INTRODUCTION :

Lors de la réintroduction d'un nouveau savoir dans les contenus mathématiques à enseigner à un niveau donné, le programme précise, dans un premier temps, ce que le professeur est tenu de faire. Il est la première référence à laquelle un enseignant est lié pour construire son cours. Seulement ce programme n'est ni monolithique, ni exhaustif ; il laisse une certaine place à l'interprétation.

Un professeur qui doit enseigner un objet de savoir mathématique donné, fait des choix et prend des décisions :

Quels sont les choix possibles pour un enseignant lorsqu'il souhaite mettre en place le

1 Cet article s'appuie sur les résultats de notre mémoire de DEA EIAH-D (Environnements Informatiques d'Apprentissage Humain et Didactique) préparé sous la direction de Jean-Luc Dorier au sein de l'équipe DDM du laboratoire Leibniz-IMAG à Grenoble.

cours d'arithmétique dans sa classe de spécialité ?

Mais du fait de la position de cet enseignant dans l'institution scolaire, ses choix et ses décisions vont dépendre d'un ensemble de contraintes institutionnelles diverses (le temps dont dispose l'enseignant est, par exemple, une contrainte institutionnelle très forte) :

A quels systèmes de contraintes est soumis l'enseignant de spécialité quand il fait ses choix pour le cours d'arithmétique ?

Cependant l'enseignant dispose, au sein de cette institution, d'sun espace de liberté, plus ou moins grand :

Quelles sont alors les marges de manœuvre possibles pour un enseignant devant faire un cours d'arithmétique ? Les enseignants de spécialité vont-ils « investir » l'espace de liberté qu'ils conservent par rapport au programme de la même manière ou non ?

Afin d'apporter des éléments de réponse à ces questions, nous avons voulu savoir comment les enseignants se sont situés par rapport aux instructions officielles et aux manuels de spécialité. Or, *ce passage du texte du programme aux cours des enseignants est loin d'être transparent* car une fois le programme écrit, le savoir mathématique en jeu va subir de multiples transformations avant d'être enseigné.

Pour comprendre les transformations opérées par les manuels et les enseignants sur le savoir d'arithmétique présenté dans le programme, nous allons dans un premier temps montrer quelles ont été les conditions de réintroduction de ce savoir en nous appuyant sur une analyse comparative du dernier programme d'arithmétique en vigueur avec celui de 1998. Puis, une analyse de trois manuels (Déclic, Transmath et Terracher) ainsi que celle d'un questionnaire destiné à des enseignants de terminale S spécialité mathématiques permettront de mettre en évidence certaines de ces transformations et d'apporter des réponses aux questions posées précédemment. Ces différentes analyses nous donneront également les moyens d'identifier quels sont les écarts entre le texte du savoir, le contenu des manuels et celui des cours des enseignants et quelles peuvent être les conséquences de tels écarts s'ils existent.

Avant de procéder à l'analyse du nouveau programme d'arithmétique et des conditions de la réintroduction de celle-ci, notons que *l'arithmétique est un objet de savoir qui peut être enseigné en privilégiant plus ou moins certains de ses aspects*. Ainsi, l'arithmétique peut occuper différentes fonctions dans l'ensemble des mathématiques enseignées à un niveau donné suivant l'aspect que l'on souhaite mettre en avant comme objet d'enseignement.

Nous allons présenter trois [2] fonctions que nous qualifierons respectivement de fonction *structurelle*, fonction *diversité des modes de raisonnements possibles* (que nous nommerons fonction raisonnement dans la suite de cet article) et fonction *mise en avant de l'aspect algorithmique de l'arithmétique* (ou fonction algorithmique) :

Fonction structurelle *:* L'arithmétique est un domaine des mathématiques qui peut conduire à et s'appuyer sur l'étude de plusieurs

2 Il peut en exister d'autres. Nous avons choisi celles qui nous semblaient les plus intéressantes pour un enseignement d'arithmétique en terminale S.

exemples de structures algébriques, comme l'anneau des entiers relatifs, l'anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, ainsi que des exemples de relations.

Fonction diversité des modes de raisonnements *:* Les démonstrations ou les exercices d'arithmétique peuvent être l'occasion, comme le souligne Egret, de rencontrer toutes sortes de raisonnements :

> «Le cours d'arithmétique en Terminale S spécialité nécessite relativement peu de prérequis. Il permet d'approfondir ou de travailler différentes sortes de raisonnements : raisonnement exhaustif, raisonnement par disjonction de cas, raisonnement par récurrence, raisonnement par l'absurde, raisonnement par condition nécessaire, par condition suffisante, par condition nécessaire et suffisante.» (Egret 1999, p.95)

Fonction mise en avant de l'aspect algorithmique *:* On trouve en arithmétique de nombreux algorithmes dont les plus connus sont l'algorithme d'Euclide, l'algorithme des soustractions successives, le crible d'Eratosthène.

Remarquons que ces différentes fonctions, notamment la fonction raisonnement et la fonction algorithmique, ne s'opposent pas. Par exemple, faire une démonstration constructive (ce qui favorise la fonction algorithmique) c'est faire un raisonnement particulier (et donc mettre également en avant la fonction raisonnement de l'arithmétique).

Cependant, dans la suite de cet article, nous considèrerons que les démonstrations constructives ou les exercices à résoudre de façon algorithmique permettent de travailler plus spécifiquement sur l'aspect algorithmique de l'arithmétique que sur le raisonnement. Car si ces deux fonctions de l'arithmétique ne s'excluent pas mutuellement, le programme, les manuels et les enseignants les opposent dans les choix qu'ils font comme nous allons le voir dans la suite de cet article, ceci expliquant notre distinction entre ces deux aspects de l'arithmétique.

UN NOUVEAU PROGRAMME, DE NOUVEAUX MANUELS : QUELLE(S) FONCTION(S) OCCUPÉE(S) PAR L'ARITHMÉTIQUE ?

Le programme

Une comparaison du programme actuel avec le dernier programme de terminale scientifique dans lequel se trouvaient des contenus d'arithmétique (celui de 1971), montre que ceux-ci ont des orientations radicalement différentes.

En 1971, l'étude de l'arithmétique s'intégrait dans l'étude des structures algébriques, celle de la construction des différents ensembles de nombres et dans l'étude de leurs propriétés. A cette époque, en terminale C, l'arithmétique était en effet enseignée en privilégiant un aspect théorique et en adoptant le point de vue des structures algébriques, à l'image de l'esprit de la réforme des mathématiques modernes.

> «Chaque fois que l'occasion s'en présentera on mettra en évidence, sur les exemples étudiés dans les différents chapitres, les structures de groupe, sous-groupe, anneau, corps, espace vectoriel, ainsi que les isomorphismes et homomorphismes (noyau), automorphismes rencontrés.»
> (préambule du programme de 1971)

Le chapitre d'arithmétique, avec les ensembles $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, fournit de tels exemples à étudier. La rédaction en elle-même du programme est assez succincte mais une rubrique «commentaire général» en fin de programme précise ce qui est attendu :

«Les notions d'ensembles et de relation restent en classe de terminale des notions premières.»

«La construction de **Z** est au programme ; c'est le seul exemple de symétrisation à donner.»

«L'ensemble des multiples d'un entier relatif a est un sous-groupe du groupe additif **Z**, il est stable par multiplication, on le notera a**Z** ; la relation dans **Z** : $x_2 - x_1 \in a\mathbf{Z}$ est une relation d'équivalence. Pour $n \in \mathbf{N}^*$ on définira et on étudiera l'anneau **Z**/*n***Z**[...]»

Aujourd'hui, les structures algébriques et les notions d'ensemble et de relation ne sont plus des objets d'enseignement dans le secondaire. En terminale S spécialité, l'arithmétique ne peut donc plus occuper cette fonction structurelle[3] comme cela était le cas jusque dans les années 80 et son enseignement va donc être abordé sous un angle totalement différent de celui de 1971.

Dans le nouveau programme, l'arithmétique est présentée sous un aspect algorithmique. En effet, alors que le mot «algorithme» était absent du programme d'arithmétique de 1971, il en devient en 1998 l'un des principaux éléments. L'accent fortement mis sur cet aspect algorithmique se retrouve à deux niveaux : au niveau du contenu en lui-même du programme d'arithmétique et au niveau des objectifs et des capacités valables pour l'ensemble du programme de terminale S. Les citations suivantes, extraites du programme actuel, illustrent clairement cette tendance :

«L'objectif est de donner aux élèves un minimum cohérent de notions élémentaires permettant l'élaboration d'algorithmes simples et fondamentaux.» (Introduction au paragraphe d'arithmétique du chapitre enseignement de spécialité)

«Dans l'ensemble du programme, il convient de mettre en valeur les aspects algorithmiques des problèmes étudiés [...] On explicitera ce type de démarche sur quelques exemples simples : construction et mise en forme d'algorithmes, comparaison de leur performance pour le traitement d'un même problème [...] La mise en valeur des aspects algorithmiques et l'emploi des calculatrices programmables ont été évoqués [...] : il convient aussi d'utiliser les matériels informatiques existant dans les établissements [...] et d'habituer les élèves, sur des exemples simples, à mettre en œuvre une démarche algorithmique avec méthode [...]» (Objectifs et capacités valables pour l'ensemble du programme)

Les compétences des élèves attendues sur les algorithmes ne se limitent pas à savoir les utiliser et les manipuler comme outils de résolution de problème. Un enseignement de la démarche algorithmique est introduit même si la maîtrise d'une telle démarche ne peut être exigée.

Il apparaît ainsi clairement dans les programmes que l'arithmétique doit occuper, en terminale S, la fonction algorithmique et que cette nouvelle orientation s'inscrit par ailleurs dans un processus plus général dont la problématique est de développer l'enseignement de l'aspect algorithmique des mathématiques chaque fois que cela est possible — l'arithmétique étant alors un chapitre tout désigné pour mettre en œuvre cette volonté.

3 Le programme actuel précise en effet que «toute introduction de **Z**/n**Z** est hors programme.»

Précisons tout de même, avant de conclure cette analyse comparative, que nous n'avons relevé aucun indice faisant explicitement référence à la *fonction raisonnement* dans le programme actuel d'arithmétique. Cette fonction de l'arithmétique *n'est pas «visible» mais la question de son existence reste cependant une question ouverte* car le programme ne fait que donner un cadre qui peut se décliner selon une certaine variabilité d'interprétation et au sein duquel les enseignants disposent d'un espace de liberté.

Les manuels

Nous pouvons évaluer à trois niveaux au moins l'adéquation des manuels à «l'esprit» du nouveau programme d'arithmétique :

• **Existence de démonstrations constructives** [4] des théorèmes d'arithmétique quand cela est possible car elles sont basées sur des algorithmes (Bilgot, 1998). Ce type de démonstration peut être utilisé pour démontrer trois des théorèmes importants du cours d'arithmétique : la division euclidienne, la décomposition d'un entier en facteurs premiers et le théorème de Bézout.

• **Utilisation de moyens informatiques et exemples de programmation** dans les chapitres d'arithmétique comme cela est suggéré dans le programme. En faisant travailler les élèves sur les liens entre algorithmes mathématiques et programmation en langage machine, on peut avoir un moyen de faire vivre l'aspect algorithmique de l'arithmétique. En effet, l'initiation à la programmation permet de mettre en avant la structure des algorithmes mathématiques et de mettre en œuvre une démarche algorithmique.

• Présence d'**exercices** dans lesquels :
— un algorithme est l'objet d'étude de l'exercice.
— un algorithme est une technique de résolution de l'exercice.

Pour voir de quelles façons les trois manuels [5] que nous avons choisis d'analyser prennent en compte et mettent en œuvre cette fonction algorithmique de l'arithmétique, nous avons fait une analyse [6] de la partie «cours», de la partie «travaux pratiques» et de la partie «exercices» de l'ensemble des chapitres d'arithmétique de ceux-ci. Cette analyse nous permet de constater que *ces trois manuels ont intégré de manières fort différentes les trois points mentionnés ci-dessus.*

En ce qui concerne *les démonstrations*, aucun des manuels étudiés n'a fait le choix de ne proposer que des démonstrations constructives quand cela pouvait être fait. Ils en présentent tous quelques unes sans que cela soit systématique :

Théorème de Bézout : la démonstration constructive s'appuyant sur l'algorithme d'Euclide étendu est donnée uniquement par M_1. M_2 et M_3 donnent une preuve qui

4 Voir annexe 1.

5 Dans la suite de cet article, nous codons les trois manuels analysés de la façon suivante : M1 : Déclic, M2 : Transmath et M3 : Terracher.

6 Pour des raisons de place, nous ne pouvons pas ici expliciter toute la méthodologie de notre mémoire de DEA. L'analyse des manuels que nous avons faite se compose en fait d'une analyse écologique de la partie cours et de la partie travaux pratiques et d'une analyse praxéologique des exercices des chapitres d'arithmétique. Nous en rendons compte ici de façon synthétique en gommant l'aspect « technique » du travail.

se sert de façon sous-jacente de la notion d'idéal de **Z**[7].

Division euclidienne : l'algorithme des soustractions successives n'est proposé par aucun des trois manuels. Ils lui préfèrent une démonstration non constructive utilisant plus ou moins explicitement le caractère archimédien de **N**.

Décomposition d'un entier naturel en facteurs premiers : la démonstration constructive s'appuyant sur le principe de «descente» de l'algorithme d'Euclide est présentée dans M_2 et M_3 alors que M_1 démontre ce théorème par récurrence.

Pour ce qui est de l'intégration de *l'outil informatique* dans les chapitres d'arithmétique, les trois manuels ont, là également, des positions variables. Remarquons tout d'abord qu'ils présentent tous les programmes en langage machine des principaux algorithmes au programme de spécialité. Cependant, la donnée de ces programmes n'est pas toujours l'occasion d'effectuer un véritable travail sur la notion de démarche algorithmique. En effet, seul M_2 en permet une première approche. Ce manuel propose des TP de programmation dans lesquels il est d'abord demandé de faire un travail théorique sur l'algorithme mathématique à programmer — afin de le formaliser — avant de passer à l'étape de traduction de cet algorithme à l'algorithme de programmation en langage machine.

De même, dans *les exercices*, la fonction algorithmique de l'arithmétique n'est pas toujours mise en avant. En effet, mises à part quelques exceptions dans M_1 (nous reviendrons sur ce point à la fin de ce paragraphe), aucun exercice de M_2 ou de M_3 n'a pour objet d'étude un algorithme.

Par ailleurs, en ce qui concerne les exercices dont une des techniques de résolution est algorithmique, on constate que très peu de tâches n'offrent qu'une technique algorithmique pour être résolues. Ce sont uniquement les tâches *résoudre une équation du type au + bv = d*, *passer de l'écriture en base dix d'un nombre à une écriture en une base différente de dix* et *trouver la décomposition en facteurs premiers d'un entier naturel*. Celles-ci sont diversement présentes dans les manuels. Prenons l'exemple de la résolution d'une équation du type au + bv = d : M_1 propose 23 exercices sur ce thème, M_3 en donne 11 et M_2 seulement 1.

Ainsi, par le choix des exercices proposés et le nombre de ceux «consacrés» à tel ou tel type de tâche, les manuels vont privilégier plus ou moins certaines notions du programme.

Notre analyse d'exercice a montré que les trois manuels ne mettent pas tous l'accent sur les mêmes notions, ce qui influence la vie de la fonction algorithmique. Le nombre d'exercices portant sur la résolution d'une équation du type au + bv = d proposés dans les trois manuels en est une illustration exemplaire.

Revenons sur le cas de M_1. Ce manuel est le seul à proposer des exercices à résoudre «*Avec ordinateur*» à la fin de chaque chapitre d'arithmétique. En voici deux exemples :

> «Écrire un programme pour générer les nombres premiers jusqu'à un nombre entier naturel N donné» (M_1, 74 p.42)

7 Cf. annexe 1.

«Donner un contre-exemple de l'affirmation : $2^{2n} + 15$ est premier pour tout entier naturel n.» (M_1, 76 p.42)

Ces exercices ouvrent la voie à des types de tâches rarement présents dans les manuels et qui peuvent contribuer à la mise en œuvre de l'aspect algorithmique. Ils permettent en effet de :

1. Étudier la démarche algorithmique en tant qu'objet car cela est nécessaire pour pouvoir programmer.
2. Avoir accès à tout un domaine numérique jusque là hors d'atteinte, celui des grands nombres.
3. Mettre en place des démarches de recherches «pratiques» en utilisant les capacités calculatoires des machines. Ces démarches donnent la possibilité d'aborder un problème mathématique sous un angle différent de celui qui est généralement proposé. On ne doit pas démontrer un résultat mais on peut soit le vérifier expérimentalement, soit le conjecturer, soit se faire une opinion sur son degré de véracité ou encore l'infirmer en trouvant un contre-exemple que l'on n'aurait pas pu trouver «à la main».

Malgré cette particularité de M_1, on constate qu'*aucun des trois manuels ne propose un choix d'activités, de travaux pratiques ou d'exercices s'inscrivant nettement dans l'orientation du programme* concernant la mise en avant de l'aspect algorithmique de l'arithmétique. Cela est certainement dû à une réelle difficulté à construire des exercices permettant de faire vivre cette fonction. En effet, la volonté du programme de mettre en avant l'aspect algorithmique est, comme nous l'avons déjà souligné dans la première partie de cet article, une approche nouvelle de l'arithmétique et il est difficile de trouver des références utilisables dans ce domaine pouvant servir à la construction d'exercices «algorithmiques» [8] pour les chapitres d'arithmétique de terminale S spécialité mathématiques. Les manuels de 1971 sont la principale source de référence d'exercices d'arithmétique disponible pour les manuels actuels. Une comparaison rapide de M_1, M_2 et M_3 avec Queysanne-Revuz (1971), nous a d'ailleurs montré que bon nombre d'exercices des années 70 (exceptés ceux portant explicitement sur $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$) se retrouvent presque mot pour mot dans les manuels d'aujourd'hui. Une des difficultés de ces exercices est souvent liée au raisonnement à utiliser lors de leur résolution. En conséquence, ces exercices vont privilégier l'aspect raisonnement en général sans mettre spécifiquement en avant l'aspect algorithmique de l'arithmétique.

Comme nous venons de le voir, l'enseignement de l'arithmétique qui est présenté dans les manuels ne semble pas axé vers la mise en avant de cette fonction de l'arithmétique pourtant clairement préconisée dans le programme. Elle vit tout de même épisodiquement dans les manuels, avec des variabilités non négligeables, mais sa place dans le cours d'arithmétique reste mal définie.

En revanche, l'analyse des manuels nous montre que *l'arithmétique occupe de façon plus nette la fonction raisonnement* alors que comme nous l'avons dit plus haut, cet aspect n'apparaissait pas explicitement dans le programme.

Plusieurs facteurs permettent d'expliquer ce phénomène. Tout d'abord, *le cours d'arithmétique permet de faire des raisonnements peu employés dans le reste du pro-*

8 Nous appelons exercice «algorithmique» un exercice qui contribue à faire vivre la fonction algorithmique de l'arithmétique.

gramme comme les raisonnements par l'absurde (pour démontrer l'infinité de l'ensemble des nombres premiers) ou les raisonnements par disjonction de cas. Ce dernier type de raisonnement est très utilisé pour résoudre les exercices consistant à *montrer qu'un nombre entier N(n), n appartenant à **N**, est divisible par un nombre entier m*. C'est d'ailleurs le type de tâche le plus couramment [9] demandé dans les manuels. L'arithmétique est aussi un domaine privilégié pour faire travailler les élèves sur le raisonnement par récurrence en dehors du cadre des suites. En effet, un des théorèmes fondamentaux du cours, l'existence de la décomposition en facteurs premiers d'un entier naturel, peut se démontrer par récurrence (démonstration proposée par M_1) et ce type de raisonnement est souvent utilisé pour la résolution des exercices de divisibilité.

Par ailleurs, dans les exercices d'arithmétique, les connaissances en jeu sont généralement déjà connues (ou familières) des élèves et les résultats du cours sont en nombre limité. L'un des intérêts de l'arithmétique est que l'on peut ainsi proposer aux élèves des exercices pouvant se rapporter à chacun des types de raisonnement énumérés dans la citation d'Egret (nous en donnons des exemples ci-dessous). Une des réelles difficultés pour les élèves dans ces exercices repose alors plus sur l'anticipation du type de raisonnement qu'il va falloir utiliser et sur son organisation que sur la difficulté des notions abordées.

Raisonnement exhaustif :

«Trouver tous les couples d'entiers naturels non nuls inférieurs à 300 dont le PGCD est 15 et dont la différence est 105» (M_1, 10 p.72)

Raisonnement par disjonction de cas :

«n est un entier, montrez que $n(n^6 - 1)$ est divisible par 7» (M_2, 31 p.131)

Raisonnement par récurrence :

«Montrer que, pour tout entier naturel, $n^5 - n$ est divisible par 5» (M_3, 47 p.27)

Raisonnement par l'absurde :

«Prouvez que la somme de deux fractions irréductibles dont les dénominateurs sont premiers entre eux ne peut pas être un entier.» (M_2, 80 p.134)

Raisonnement par condition nécessaire et suffisante :

«Décomposition d'un carré, d'un cube...
Soit $n = p_1^{a_1} \dots p_r^{a_r}$. Montrer que
a) n est un carré si et seulement si les entiers $a_1, \dots, a_r$ sont pairs ;
b) n est un cube si et seulement si $a_1, \dots, a_r$ sont multiples de 3» (M_3, 20 p.25)

Nous constatons donc *un décalage entre les attentes du programme et leur mise en œuvre dans les manuels*. On peut alors se demander comment les enseignants vont réagir face à ce décalage, c'est-à-dire, comme le souligne le titre de l'article, quel type d'enseignement ils vont mettre en œuvre dans les classes. *Le cours d'arithmétique sera-t-il l'occasion d'effectuer un travail de fond, avec des élèves de bon niveau et intéressés par les mathématiques, sur le raisonnement ? Indépendamment* [10] *de ce premier point, l'arithmétique sera-t-elle enseignée en privilégiant, comme cela est préconisé dans le programme, son aspect algorithmique ?*

9 Dans notre étude praxéologique des trois manuels, nous avons analysé 418 exercices. Parmi ces exercices, 79 relèvent de ce type de tâche. La seconde tâche la plus demandée (trouver le pgcd de deux nombres entiers a et b) comporte 56 exercices. Toutes les suivantes comptent moins de 35 exercices.

10 Cette indépendance n'existe pas en théorie dans la mesure où, comme nous l'avons dit, l'algorithmique est une forme spécifique de raisonnement parmi d'autres. En pratique, ces deux choix ont néanmoins tendance à être exclusifs comme nous allons le voir à plusieurs reprises dans la suite de cet article.

UN QUESTIONNAIRE AUX ENSEIGNANTS DE TERMINALE S SPÉCIALITÉ

C'est en voulant apporter des réponses aux questions précédentes que nous avons construit le questionnaire présenté en annexe 2. Son analyse montre, comme nous allons le voir dans cette deuxième partie, que ces questions restent ouvertes, même s'il ressort assez nettement des réponses que la fonction raisonnement semble être en concurrence avec la fonction algorithmique et avoir les faveurs de nombreux enseignants.

Présentation du questionnaire

Nous avons élaboré ce questionnaire afin de *confronter nos hypothèses* issues des analyses de programmes et de manuels *avec la réalité des choix des enseignants* dans l'organisation de leur enseignement d'arithmétique dans leurs classes de terminale S spécialité mathématiques.

Ce questionnaire se compose de quatre catégories de questions :

— **des questions sur les sources de travail de l'enseignant** afin de savoir à quels ouvrages il se réfère pour préparer ce cours nouveau d'arithmétique.

— **des questions autour des choix de démonstration des théorèmes d'arithmétique** : par ces questions, nous voulons savoir si l'enseignant privilégie les démonstrations constructives des trois principaux théorèmes d'arithmétique, ce qui n'est pas, rappelons-le, le cas dans les manuels que nous avons analysés.

— **des questions concernant le pgcd** : la manière de calculer un pgcd [11] est une autre différence importante entre le programme actuel et celui de 1971. Aujourd'hui, le programme indique que l'algorithme d'Euclide doit être privilégié par rapport à la décomposition en facteurs premiers pour le calcul d'un pgcd. Ce choix du programme peut s'expliquer par le fait que l'algorithme d'Euclide est plus efficace que la décomposition en facteurs premiers en terme de programmation. Cependant, ce n'est qu'en utilisant des ordinateurs que cette problématique peut être réellement abordée avec les élèves, les capacités d'une calculatrice étant trop limitées pour cela. Cette série de questions sur le pgcd nous permet d'identifier la position des enseignants par rapport à ces choix faits dans le programme et de voir quelle(s) position(s) ils ont adopté sur ce sujet avec les élèves, dans la réalité de leur enseignement.

— **des questions sur l'utilisation des calculatrices et des moyens informatiques** : ces questions ont pour objectif de savoir de quelle façon chaque enseignant a intégré et géré les outils informatiques dans son cours d'arithmétique. Nous avons vu en effet dans la partie précédente que l'usage de moyens informatiques peut jouer un rôle important dans la mise en avant de la fonction algorithmique de l'arithmétique, ce qui n'est pas toujours pris en compte dans les manuels.

11 Nous n'avons pas développé ce point précis dans la première partie de cet article. Pour une étude de cette question, se rapporter à notre mémoire de DEA.

Analyse des réponses des enseignants

Cette analyse repose sur les 27 questionnaires qui nous ont été retournés par des enseignants affectés dans 20 établissements répartis sur 6 académies différentes.

Nous citons en italique les réponses données mot pour mot par les enseignants. Dans le cas contraire, nous donnons une formulation reflétant leurs opinions.

a. *Les questions sur les sources de travail de l'enseignant*

Il est intéressant de remarquer que les enseignants utilisent en moyenne cinq ou six références différentes et que très peu (4 enseignants) se contentent des manuels de spécialité. Le fait que la réintroduction de l'arithmétique en terminale soit très récente peut expliquer la volonté des enseignants d'avoir recours à plusieurs ouvrages pour se faire une opinion sur ce nouveau programme. Ceci montre par ailleurs que **les enseignants disposent avec ces ouvrages d'un espace de liberté conséquent par rapport au programme** pour préparer leurs cours et que, en travaillant avec des ouvrages des IREM ou de l'APMEP, fréquemment cités comme source, ils auront à leur disposition plus de moyens de mettre en œuvre la fonction algorithmique. En effet, les ouvrages des IREM et de l'APMEP que nous avons consultés proposent une réflexion sur l'enseignement de ce nouveau programme d'arithmétique en terminal S spécialité et sur la place des algorithmes dans ce cours, ce qui tend à prouver qu'il existe un potentiel permettant de faire vivre l'aspect algorithmique de l'arithmétique dans les classes.

Cependant, ce point de vue est à nuancer par le fait que des enseignants citent également comme références des manuels des années 70 (un cinquième des enseignants), des ouvrages universitaires (4 enseignants) ou des connaissances personnelles et universitaires (4 enseignants). Ces ouvrages qui abordent l'arithmétique sous un aspect structurel et théorique, hors programme aujourd'hui, peuvent cependant fournir un grand nombre d'exercices d'arithmétique que l'on peut tout à fait donner (en les adaptant si besoin est aux exigences du nouveau programme) aux élèves d'aujourd'hui. Ces exercices mettent généralement en avant la fonction raisonnement.

La suite de notre analyse montrera que la coexistence en classe de ces deux aspects de l'arithmétique n'est pas si aisée et que des contraintes fortes pèsent sur les projets des enseignants et leur enseignement effectif.

b. *Les questions autour des choix de démonstration des théorèmes d'arithmétique.*

Dans un premier temps, ces questions nous permettent de constater que les démonstrations sont très souvent données dans le cours d'arithmétique. En effet, tous les enseignants interrogés ont fait avec les élèves la démonstration du théorème de Bézout, tous sauf deux celle du théorème de la division euclidienne et plus des 4/5 celle de l'existence de la décomposition d'un entier naturel en facteurs premiers. Le fait que quasiment toutes les démonstrations soient faites en cours peut s'expliquer par différents facteurs :
— les démonstrations d'arithmétique de spécialité demandent généralement peu de prérequis et peuvent donc être faîtes rigoureusement en cours,
— la classe de terminale S spécialité est un îlot particulier car les élèves sont, pour la plupart, généralement bons en mathématiques et se destinent souvent à des études scientifiques dans le supérieur, ce qui peut inciter les enseignants à les préparer aux exigences de cet enseignement.

Ces arguments montrent que la **fonction raisonnement de l'arithmétique bénéficie de facteurs favorables pour vivre au sein d'une classe de spécialité mathématiques**.

Par ailleurs, les enseignants choisissent plus fréquemment que les manuels les démonstrations constructives des trois principaux théorèmes d'arithmétique. Ils sont près des 3/4 à avoir choisi ce type de démonstration dans le cas du théorème de Bézout, 2/3 pour l'existence de la décomposition en facteurs premiers, mais seulement 5 dans le cas de la division euclidienne. Notons aussi que 2 enseignants ont donné exclusivement des démonstrations constructives.

Dans les classes, il semble donc qu'au niveau du choix des démonstrations, l'aspect algorithmique soit nettement plus privilégié que dans les manuels.

c. *Les questions concernant le pgcd.*

Nous avons vu dans la présentation du questionnaire que l'algorithme d'Euclide est plus performant en terme de programmation que la décomposition en facteurs premiers. Pour connaître la position des enseignants sur ce sujet, nous leur avons tout d'abord demandé, dans la question F1, de choisir une méthode pour calculer le pgcd du couple d'entiers (11 475 , 9 750)[12]. Dans cet exemple, la décomposition en facteurs premiers et l'algorithme d'Euclide semblent être équivalents en terme de coût de calcul. Les enseignants sont donc amenés à se prononcer sur leur préférence personnelle quant à l'utilisation de l'une ou l'autre des techniques de recherche de pgcd. Un enseignant n'a pas répondu à cette question, 5 ne choisissent pas de méthode particulière, 8 choisissent l'algorithme d'Euclide et 8 la décomposition en facteurs premiers. Les 5 enseignants qui ne prennent pas position estiment que les deux méthodes, à vue d'œil sont équivalentes. Mais le plus significatif sont les réponses données par les 16 autres enseignants. Il est surprenant de remarquer que pour les enseignants qui choisissent la décomposition en facteurs premiers, celle-ci est, de **façon évidente**, plus simple alors que ceux qui préfèrent l'algorithme d'Euclide, se positionnent déjà dans une problématique d'enseignement et font référence aux élèves et à l'usage de la calculatrice. Nous citons ci-dessous certaines des réponses d'enseignants :

— Les arguments d'un enseignant ayant choisi la décomposition en facteurs premiers : *La décomposition en facteurs premiers : il est immédiat que* 11 475 *est multiple de* 25*, puis que* 11 475/25 = 459 *est divisible par* 9*. Finalement* 51 = 3×17 *et l'on obtient sans peine* 11 475 = $25\times3^3\times17$*. De même,* 195/15 = 13*, d'où* 9 750 = $2\times3\times5^3\times13$*. On obtient ainsi le PGCD de façon très légère.*

— Les arguments de deux enseignants ayant préféré l'algorithme d'Euclide : *La plus judicieuse en terme de programmation. Cette méthode convient autant aux grands nombres qu'aux petits.*
Pour ce calcul, la méthode utilisant l'algorithme d'Euclide me parait plus judicieuse. Pour les TS, elle me semble formatrice ; elle met en œuvre :
– la technique de l'algorithme que l'on retrouve dans d'autres situations.
– L'usage de la calculatrice (programme..)
– Un travail rapide et efficace.

Ces trois citations sont représentatives de l'ensemble des réponses que nous avons obtenues à cette question. Elles montrent clairement que la culture mathématique des enseignants leur fait préférer la décomposition en

12Dans cette question, le choix du couple d'entiers est une variable importante. Nous avons appliqué les deux techniques de recherche de pgcd aux couples d'entiers proposés dans les trois manuels actuels que nous avons analysé et au manuel de 1971. Le couple (11 475, 9 750) a été choisi car c'est un de ceux qui permettent le moins de privilégier une technique par rapport à l'autre.

produit de facteurs premiers pour la recherche d'un pgcd. Cela n'est pas étonnant car l'ancien programme d'arithmétique qu'ont suivi les enseignants (voir même enseigné pour les plus âgés) privilégiait la décomposition en produit de facteurs premiers. Cette méthode, avec une bonne dextérité en calcul mental, se révèle très efficace, comme le montre la première citation. Le programme actuel se positionne en rupture face à cette «culture» en mettant l'accent sur l'algorithme d'Euclide (et ce, dès la classe de troisième où l'algorithme d'Euclide ou celui des soustractions successives est la technique institutionnalisée pour simplifier les fractions).

Cela permet d'expliquer les réponses données par les enseignants qui ont préféré l'utilisation de l'algorithme d'Euclide sur l'exemple que nous leur proposons. En effet, alors que nous voulions connaître leurs choix personnels sur cet exemple, leurs réponses s'appuient sur les pratiques des élèves et les instructions officielles qui souhaitent mettre l'accent sur l'aspect algorithmique de l'arithmétique. Cette position des enseignants, partagés entre leur culture mathématique et les orientations du nouveau programme, est très bien illustrée par la réponse suivante :

L'intérêt est d'avoir les deux méthodes bien sûr ! ***Ici, il est évident que la 1ère parait plus simple*** [13] *(!) mais il y a au moins autant de divisions à effectuer et encore avec de la malice.* ***J'ai cependant systématiquement utilisé la seconde qui me semble plus dans «l'esprit du programme»*** *et qui permet surtout aux élèves d'arriver à une bonne dextérité dans le maniement de l'algorithme d'Euclide.*

Cette problématique du choix de la technique de recherche d'un pgcd et des raisons de ce choix fait encore l'objet des questions suivantes. Mais, contrairement à la question F1, les questions F2 et F3 interrogent les enseignants non plus sur leur point de vue personnel mais sur ce qu'ils ont fait en classe.

Revenons tout d'abord brièvement sur la question A2, concernant l'ordre d'introduction des deux techniques de recherche de pgcd. 4/5 des enseignants interrogés introduisent le pgcd après avoir introduit les nombres premiers. Sans consigne claire de l'enseignant ou de l'énoncé d'un exercice, rien ne permet donc a priori de favoriser l'utilisation de l'algorithme d'Euclide plutôt que celle de la décomposition en facteurs premiers. Cependant, la question F2 montre que 3/4 des enseignants ont conseillé une méthode de recherche de pgcd aux élèves. Parmi ces enseignants :

– 7 ont conseillé *l'algorithme d'Euclide car il m'avait semblé que c'était celle que conseillaient les commentaires du programme* ou car *il est indispensable dans beaucoup de démonstrations*.

– 5 ont conseillé de choisir en fonction de l'exercice et du contexte,

– 5 ont conseillé de choisir la méthode selon les nombres donnés. *Selon l'observation des 2 nombres, et «l'inspiration» de l'élève quant à la décomposition des nombres, il faut opter pour la plus rapide. Décomposition en facteurs premiers pour les petits nombres, algorithme d'Euclide pour les autres et pour la programmation.*

– 2 ont conseillé la décomposition en facteurs premiers.

Notons pour commencer qu'il est surprenant que deux enseignants conseillent aux élèves l'utilisation préférentielle de la décomposition en facteurs premiers dans la

13 C'est nous qui soulignons.

recherche d'un pgcd alors que le programme stipule clairement que «pour les déterminations de pgcd et de ppcm, on évitera le recours systématique à la décomposition en facteurs premiers». Ces deux enseignants nous semblent avoir été fortement influencés par leur culture mathématique (ils font parti des quatre enseignants ayant déjà eu à enseigner l'arithmétique avant que celle-ci ne disparaisse pendant près de vingt ans des contenus d'enseignement).

Dans l'ensemble, la moitié des enseignants ayant conseillé une technique de recherche de pgcd aux élèves leur demandent de faire preuve de recul et d'autonomie quant au choix de la méthode la mieux adaptée à l'exercice à résoudre. Les facteurs pouvant aider les élèves à faire leur choix sont de deux ordres :
– Le contexte de l'exercice : les élèves doivent pouvoir analyser l'exercice pour se prononcer sur la méthode la plus efficace par rapport à question posée mais surtout par rapport à la suite de l'exercice. Il est par exemple plus judicieux d'utiliser l'algorithme d'Euclide quand l'on doit résoudre une équation diophantienne par la suite.
– La taille des nombres proposés : par leurs réponses [14], on peut penser que les enseignants ayant donné ce type de conseil rentrent dans la problématique que nous avons mis en avant dans la présentation de ce questionnaire à savoir que l'algorithme d'Euclide est privilégié actuellement dans l'enseignement pour des raisons de programmation et d'utilisation et de développement des outils informatiques. Le rôle de la question F3 est de questionner ce propos.

14voir la seconde citation proposée en illustration des réponses des enseignants ayant conseillé de choisir en fonction de la taille des nombres.

Les réponses à la question F3 montrent que ce point est rarement soulevé par les enseignants devant les élèves. Dans cette question, nous attendions des enseignants qu'ils nous indiquent s'ils avaient abordé ou non avec leurs élèves la notion de coût de calcul des deux méthodes de recherche de pgcd. Or, en répondant à cette question, 12 enseignants ont donné une réponse du type *choisir en fonction de la situation* sans faire de remarque sur le coût des deux algorithmes et 5 n'ont fait aucun commentaire en classe. Seuls 10 enseignants ont abordé le point de l'efficacité respective des deux méthodes en précisant que l'algorithme d'Euclide est plus économique sur le plan des calculs en général en donnant les explications suivantes :
– On a comparé l'efficacité sur des exemples (5 réponses)
– *La règle étant le minimum de calcul si possible, l'algorithme d'Euclide est plus économique sur le plan des temps de calcul en général* (1 réponse)
– *l'algorithme d'Euclide est plus simple, plus rapide et convient même quand la décomposition s'avère très coûteuse, par exemple :* 10100-1 *ou* 10200-1 (2 réponses)
– *l'algorithme d'Euclide est la meilleure méthode pour Bezout et pour la programmation* (1 réponse)

Mais le point le plus important soulevé par cette question est la réponse faite par un enseignant n'ayant pas fait de commentaire aux élèves. Voici la façon dont il justifie sa décision : *N'ayant pas pu les mettre en œuvre sur des grands nombres, avec les ordinateurs, les problèmes de temps de calcul, de coût de calcul qui se posent ne me paraissent pas suffisamment parlants pour les élèves.*

Cet argument nous semble particulièrement intéressant et confirme que les capacités des calculatrices ne sont pas suffisantes pour réellement mettre en évidence la rapidité de l'algorithme d'Euclide par rapport à la décomposition en facteurs premiers sur les nombres qu'elles peuvent traiter. Cela pose alors le problème de la pertinence de la volonté affichée par le programme (et relayée par les manuels) de favoriser l'algorithme d'Euclide plutôt que la décomposition en facteurs premiers par rapport à ce que l'on peut faire concrètement en classe sur ce sujet. Du même coup, cela pose également le problème de la pertinence de l'aspect algorithmique de l'arithmétique tel qu'il est mis en avant dans le programme.

d. Les questions sur l'utilisation des calculatrices et des moyens informatiques.

Notre questionnaire comporte deux types de questions relatives à la calculatrice. Dans un premier temps, les questions B, C, D et E font un bilan de l'utilisation des calculatrices et des moyens informatiques par les enseignants dans leurs classes. Il est ensuite proposé, dans la question G, un exercice d'arithmétique inhabituel extrait de Déclic qui, s'il est dans l'esprit du programme actuel, est cependant particulier dans la mesure où l'arithmétique y apparaît essentiellement comme un outil de résolution et que la tâche demandée consiste à d'écrire un programme.

L'analyse des réponses aux questions B, C, D et E montre que les 3/4 des enseignants ont demandé à leurs élèves de programmer en moyenne trois algorithmes d'arithmétique sur leurs calculatrices. Parmi ces enseignants, tous ont fait programmer au moins une fois l'algorithme d'Euclide mais très peu en ont profité pour travailler avec les élèves sur la notion de démarche algorithmique. Les programmes les plus demandés sont :

– Calcul du pgcd (avec l'algorithme d'Euclide) : 16 fois
– Test de primalité : 9 fois
– Calcul des coefficients u et v de Bézout : 8 fois
– Décomposition en facteurs premiers : 8 fois
– Division euclidienne : 7 fois
– Liste de tous les diviseurs d'un nombre : 7 fois

Un seul enseignant sur les 27 ayant répondu a donné aux élèves des explications sur les langages de programmation : *Explication de quelques structures logiques (if...then...else, boucle...) mais pas d'exigence de résultats de programmation en DS (trop d'inégalités entre calculatrices)*. Par ailleurs, aucun n'a utilisé de moyens informatiques autre que la calculatrice pendant le cours d'arithmétique.

Notre hypothèse selon laquelle les liens existants entre programmation et algorithme peuvent être un moyen de privilégier l'aspect algorithmique de l'arithmétique semble donc être invalidée par les pratiques en classe. En effet, en classe, les programmes sont des outils de contrôle, fournis presque toujours par les enseignants. Ils ne sont pas travaillés en eux-mêmes, ils sont exclusivement utilisés pour vérifier des réponses et ne servent pas à trouver des contre-exemples ou pour travailler sur des conjectures. Or nous avons vu dans la première partie de cet article que c'est en s'appuyant sur ces points qu'il est possible de donner une orientation algorithmique à l'enseignement de l'arithmétique en spécialité. Nous avons donc, en fin de questionnaire, proposé un exercice atypique extrait de Déclic qui aborde ces points :

«Le mathématicien Lagrange conjectura la propriété suivante : *tout nombre impair*

		Pour vous, est-ce un exercice d'arithmétique ?				
		OUI	**NON**	**PP**	**PR**	**TOTAL**
Poseriez vous un tel exercice ?	**OUI**	6	5	3	0	14
	NON	5	5	1	1	12
	PR	1	0	0	0	1
	TOTAL	12	10	4	1	

$n \geq 5$ peut s'écrire sous la forme $n = 2p + q$, avec p et q entiers premiers. Par exemple : $51=2\times23 + 5$.
Écrire un programme permettant, pour un entier impair $n \geq 5$ donné, de déterminer un couple (p ; q) de nombres premiers tels que $n = 2p + q$.
(Cette conjecture n'est toujours pas démontrée.)» (Déclic, 73 p.80)

Nous donnons les réponses à cette question G sous forme du tableau ci-dessus. Dans ce tableau, PP signifie «ne se prononce pas» et PR «n'a pas répondu».

12 enseignants pensent que cet exercice est un exercice d'arithmétique, 10 estiment que ce n'en est pas un, 4 ne se sont pas prononcés et 1 n'a pas souhaité répondre à cette question. Nous avons classé dans «Ne se prononce pas» les enseignants qui donnaient des éléments de réponses à la question mais qui ne prenaient pas explicitement position. Voici les commentaires qu'ils ont fait :

– Cet exercice peut effectivement être rattaché à l'arithmétique de terminale S [..] Le principal travail consiste cependant à construire l'algorithme et le programme.
– Il me semble que l'on peut faire réfléchir à un tel exercice en arithmétique [...]
– Cet exercice mobilise des compétences en arithmétique [...] Mais son principal intérêt me semple plutôt être dans l'utilisation de l'informatique pour essayer de prendre en défaut cette conjecture.
– Cet exercice me paraît très intéressant, dans l'hypothèse où avec plus de temps, j'aurai pu faire un peu 'd'algorithmique' avec eux [...]

Nous allons maintenant donner les arguments avancés par les enseignants ayant pris position.

Raisons qui font que certains enseignants le considèrent comme un exercice d'arithmétique :

– On travaille dans **N**.
– Il y a les notions de nombres premiers et de nombres impairs.
– Il y a un test de primalité.
– C'est un exercice d'arithmétique dans son énoncé et dans le travail demandé.
– D'abord l'arithmétique me semble un domaine dans lequel on peut initier nos élèves à la programmation. Ensuite une des méthodes de résolution qui ne s'applique guère facilement

dans d'autres domaines que l'arithmétique est la méthode des essais.
– Bien sûr, évidemment.

Raisons qui font que certains enseignants ne le considèrent pas comme un exercice d'arithmétique :

– C'est plus un problème d'informatique ou de programmation.
– *C'est en trop grande rupture avec les raisonnements demandés en Terminale S spécialité*, ce n'est donc pas un exercice d'arithmétique de terminale S spécialité mathématiques [15].
– *Je considère que l'exercice proposé ne relève pas de l'arithmétique (contrairement à la conjecture sous-jacente) car sa résolution ne me semble pas mettre en œuvre des propriétés des structures algébriques de* **N** *et* **Z** *(en dehors, évidemment, du caractère fini des parties bornées qui assurent la terminaison des algorithmes). J'estime qu'il s'agit plus d'un exercice d'algorithmique.*

Ces réponses nous montrent que les enseignants se positionnent essentiellement par rapport à trois points pour justifier leur opinion sur cet exercice : **le rôle de la programmation par rapport à l'arithmétique, le type de raisonnement à mettre en œuvre et leur définition de l'arithmétique.**

Remarquons par ailleurs que des arguments d'un même type sont avancés à la fois pour défendre le fait que cet exercice est un exercice d'arithmétique et pour défendre le fait qu'il n'en est pas un. En effet, pour ce qui est du premier point mentionné ci-dessus, des enseignants estiment que c'est un exercice d'arithmétique dans le travail qui est demandé (à savoir écrire un programme pour «tester» une conjecture d'arithmétique) alors que certains pensent justement que ce travail relève plus d'un exercice d'informatique ou de programmation que d'un exercice d'arithmétique. Nous retrouvons au travers de ces arguments la problématique soulevée précédemment dans cet article, à savoir : ici, l'arithmétique a un rôle d'outil pour résoudre l'exercice ; ce n'est pas l'objet de l'exercice car l'énoncé demande uniquement d'écrire un programme. Ce type d'argument a plus souvent été avancé pour dire que cet exercice n'est pas un exercice d'arithmétique que pour le contraire. Ainsi, **le fait que l'arithmétique soit un outil pour résoudre un exercice amène bon nombre d'enseignants à ne pas considérer cet exercice comme faisant parti des exercices d'arithmétique**.

Les avis des enseignants qui se sont appuyés sur le deuxième point divergent également. Pour un enseignant, le fait que cet exercice fasse appel à la méthode des essais, qui est, selon lui, surtout une méthode d'arithmétique, suffit pour répondre positivement à la question posée. Par contre, **pour d'autres enseignants, le raisonnement demandé dans cet exercice est beaucoup trop éloigné des raisonnements « classiques » d'arithmétique de la classe de terminale S**. Il n'y a donc pas non plus de consensus à ce sujet là. Par ailleurs, cet argument rejoint, comme nous le verrons dans l'analyse de la seconde partie de cette question, une préoccupation constante des professeurs qui est de préparer au mieux leurs élèves au Baccalauréat.

Le dernier type d'argument est très intéressant et pose un véritable problème : celui de la définition de ce qu'est l'arithmétique. Pour beaucoup d'enseignants, le fait de travailler

15 Cet argument est caricatural de l'opposition qu'il peut exister entre ce que nous avons appelé les fonctions « raisonnement » et « algorithmique » de l'arithmétique.

dans **N** ou **Z**, ou de parler de nombres impairs ou de nombres premiers suffit à faire de cet exercice un exercice d'arithmétique. Cependant, pour d'autre, un exercice est un exercice d'arithmétique uniquement dans la mesure où il met *en œuvre des propriétés des structures algébriques de **N** et **Z***.

En ce qui concerne la seconde partie de la question, 14 enseignants pourraient poser cet exercice aux élèves (sous conditions pour certains), 12 ne le poseraient pas et 1 n'a pas répondu à la question.

Les résultats à cette question sont relativement surprenants. En effet, ce nouveau type d'exercices nous était apparu comme marginal lors de l'étude des manuels. De plus, au vue des réponses des enseignants aux questions relatives à l'usage de la calculatrice, il semblait peu probable qu'autant de professeurs se déclarent prêts à poser un tel exercice aux élèves. Cependant, les réponses à la question D nous permettent d'affirmer que même s'ils peuvent donner un tel exercice en classe, quasiment aucun d'entre eux ne l'a fait. Notons par ailleurs que la moitié des 10 enseignants ayant répondu que cet exercice n'est pas, selon eux, un exercice d'arithmétique ont tout de même précisé dans cette question qu'ils pourraient poser un tel exercice à des élèves, alors qu'à peu près la même proportion (5 sur 12) adoptent la position inverse.

Voici maintenant les réponses faites par les enseignants à cette question :

Ceux qui le donneraient invoquent les raisons suivantes :

– Pour l'aspect recherche.
– Intérêt de la programmation pour *dépasser les limites des outils mathématiques ou pour montrer ce que l'informatique peut apporter aux mathématiques.*
– Car c'est intéressant de temps en temps de réfléchir à un algorithme pour développer chez les élèves logique, clarté, rigueur.
– Pour l'aspect algorithmique.
– en DM.

Ils émettent cependant parfois des réticences et posent des conditions sur la manière dont ils le donneraient :
– *La conjecture est intéressante, c'est un résultat simple d'apparence mais difficile à démontrer. Cependant l'aspect programmation n'est pas attirant.*
– *Le côté algorithme est intéressant et est dans l'esprit de cette spécialité mais par manque de temps, il pourrait, peut-être, être posé en DM.*
– *Il pourrait éventuellement être posé mais qu'aux élèves férus d'informatique.*
– *Éventuellement et de façon facultative car ça pourrait amuser les élèves.*

Ceux qui ne poseraient pas cet exercice aux élèves avancent les arguments suivants :

– ***L'objectif est de préparer les élèves au Bac*** [16] *et cet exercice n'est pas dans l'esprit d'un exercice du Bac. Il est plus important de* ***former les élèves aux raisonnements difficiles que l'on rencontre dans les exercices d'arithmétique****, en particulier dans ceux donnés au Bac.*
– *L'algorithmique n'est pas rentrée dans les classes du lycée et l'objectif n'est pas d'en faire (sauf au niveau des algorithmes d'Euclide et d'Eratosthène).*
– Les élèves ont des calculatrices différentes et les lycées ne sont pas équipés en matériel informatique.
– *On ne fait pas de programmation avec les*

16 C'est nous qui soulignons.

élèves et on n'a pas de formation à ce sujet.
– Exercice trop dur.
– Préférence pour les exercices de réflexion.
– Par manque de temps et les horaires de mathématiques diminuent.
– Les élèves n'y verraient pas d'intérêt.
– Il n'est pas intéressant à mes yeux de chercher à «l'aveuglette» un couple (dont l'existence n'est pas assurée de surcroît).

De même que pour la question précédente, des arguments sont avancés pour soutenir deux positions contraires. Ainsi, l'aspect algorithme et l'aspect recherche de cet exercice rebutent ou au contraire intéressent les enseignants. Les raisonnements à mettre en œuvre dans un tel exercice sont une raison évoquée aussi bien en sa faveur qu'en sa défaveur. Pour certains enseignants, un raisonnement algorithmique permet de développer clarté, rigueur et logique tandis que d'autres estiment que ce n'est pas un exercice de réflexion.

Par ailleurs, nous retrouvons fortement dans les réponses, les traces des contraintes extérieures qui pèsent sur les enseignants : le fait d'avoir à préparer les élèves au Baccalauréat, le temps disponible en spécialité et le fait que les horaires de mathématiques diminuent.

Mais le type d'argument qui nous intéresse le plus est celui qui porte sur le bien fondé de la place d'un tel exercice dans le cadre de l'enseignement de l'arithmétique en terminale S spécialité mathématiques. Un des enseignants qui ne poserait certainement pas un tel exercice par manque de temps précise cependant qu'il le trouve intéressant et, surtout, dans l'esprit de cette spécialité. D'un autre coté, un enseignant, lui, dit clairement qu'il ne poserait pas un tel exercice car l'algorithmique n'est pas rentré dans les classes du lycée et que *l'objectif n'est pas d'en faire* (sauf au niveau des algorithmes d'Euclide et d'Eratosthène). Nous pouvons donc nous interroger sur la viabilité de la nouvelle fonction de l'arithmétique en terminale si l'aspect algorithmique de l'arithmétique est uniquement exploité en classe lorsque les élèves appliquent l'algorithme d'Euclide ou celui d'Eratosthène. Cette interrogation est aussi présente quand des enseignants écrivent qu'ils ne poseraient pas un tel exercice car les élèves ont tous des calculatrices différentes, ou car les lycées ne sont pas équipés en matériel informatique ou même encore car ils ne sont pas eux-mêmes formés à ces nouveaux outils. **Nous sommes ici en face de contraintes de l'environnement scolaire qui peuvent être un frein à la viabilité de la fonction algorithmique de l'arithmétique et qui expliquent en partie sa faible existence dans les classes**.

CONCLUSION

Comme nous l'avons montré dans cet article, les moyens possibles pour privilégier la fonction algorithmique de l'arithmétique existent mais ils sont souvent peu exploités que ce soit par les manuels ou par les enseignants.

*Espace de liberté des enseignants :
Quelle(s) conséquence(s) sur la vie
des savoirs ?*

L'analyse des réponses à notre questionnaire a permis de montrer que les enseignants disposent en arithmétique d'un espace de liberté considérable pour construire leur cours. Nous avons en effet eu l'occasion de constater l'existence d'un éventail de choix qui peuvent être généralement très différents. Cependant, trois contraintes ont semblé peser fortement sur les enseignants :

— Des contraintes «extérieures» à l'arithmétique ne permettant pas aux enseignants de faire nécessairement les choix qu'ils souhaitent. **Ce sont des contraintes de type «matériel» dues au système d'enseignement**. Un enseignant les énumère dans le questionnaire : les élèves n'ont pas tous les mêmes moyens [17] *(calculatrice, PC ...). De plus, les moyens au Lycée sont tels qu'il est très difficile d'utiliser la programmation pour ce type de question (*classes surchargées *;* matériel désuet*...). D'autre part :* la diminution des horaires de math ne favorise pas cette démarche. Contraintes auxquelles il convient d'ajouter la suivante qui est donnée par un autre enseignant : *L'objectif est de préparer les élèves au bac. [...] Cet exercice (question G) n'est absolument pas dans l'esprit d'un exercice à 5 points du bac [...]*

— **Des contraintes institutionnelles** liées aux problèmes de la formation des enseignants à l'utilisation des nouvelles technologies.

— **Des contraintes d'ordre «idéologique»** quant à l'utilisation des calculatrices et de l'informatique en classe. La citation qui suit, bien qu'illustrant une position extrême, montre la nature de ces contraintes : *Je ne poserai pas un tel exercice (question G) à mes élèves. Je n'ai pas de 'passion' particulière pour les outils de calcul et je préfère toujours ce qui s'obtient par la réflexion et le raisonnement sans qu'il soit nécessaire d'utiliser une 'machinerie lourde'.*

Les différents choix faits par les enseignants nous semblent avoir des implications futures importantes et non similaires en terme de savoir qui va être enseigné de manière effective aux élèves. En effet, plusieurs enseignants, ont, dans leurs commentaires, parlé spontanément de la place du raisonnement en arithmétique. Nous allons en citer certains ayant mentionné ce sujet dans leur réponse au questionnaire :

En arithmétique, la nécessité de maîtriser le raisonnement me paraît très intéressant pour la formation scientifique des élèves.

Il me semble plus important de les former (les élèves) au raisonnement difficile qu'on rencontre dans les exercices d'arithmétique en particulier dans ceux donnés au bac.

Ce cours d'arithmétique est un ***lieu privilégié pour 'apprendre à raisonner*** [18] ***'*** *on peut d'ailleurs faire une* ***typologie des différents exercices****.*

Pour ma part j'ai mis l'accent sur la démonstration et le raisonnement. ***J'ai utilisé l'arithmétique pour leur enseigner les rudiments du raisonnement****.*

L'arithmétique occupe de fait plus «naturellement» dans les manuels et dans les classes la fonction raisonnement, d'autant plus que, dans une certaine mesure, ceci est favorisé par l'ensemble des contraintes citées précédemment. En effet, les représentations des enseignants sur les mathématiques les conduisent souvent à privilégier l'aspect raisonnement de l'arithmétique comme l'a montré l'analyse des réponses au questionnaire. De même, les contraintes de temps, de préparation au baccalauréat mais aussi le fait qu'en arithmétique on manipule des objets simples tout en mettant en œuvre des raisonnements complexes tendent à favoriser cette fonction dans les classes. De plus, insister sur l'aspect raisonnement de l'arithmétique peut être justifié par le

17 C'est l'enseignant qui souligne.

18 C'est nous qui soulignons.

fait que les enseignants de spécialité mathématiques en terminale S ont le légitime souci de préparer les élèves à l'enseignement des mathématiques dans les filières scientifiques après le baccalauréat.

Au delà de ce constat, il convient cependant de se poser un certain nombre de questions : Y a-t-il incompatibilité d'existence entre ces deux fonctions dans les classes, à savoir que si l'on veut faire vivre l'arithmétique sous un angle raisonnement, l'empêche-t-on nécessairement de vivre sous un angle algorithmique [19] ? Dans quelle mesure la fonction raisonnement entre-t-elle en concurrence avec la fonction algorithmique ? Une démonstration constructive étant un type de raisonnement, n'y a-t-il pas des moyens de faire exister, en classe, la fonction algorithmique à travers la fonction raisonnement en proposant des exercices «avec ordinateur» ou des exercices portant sur des algorithmes non vus dans la partie cours ? Sur quelles bases peut-on construire de tels exercices ? La fonction algorithmique est-elle condamnée à s'effacer au profit de la fonction raisonnement dans les prochaines années ?

Ces questions restent, à mon sens, pour le moment ouvertes. Une analyse approfondie des pratiques des enseignants, de la réalité de l'enseignement [20] de l'arithmétique en terminale S et de l'évolution des programmes d'arithmétique de la classe de troisième à celles du lycée permettra sans doute d'apporter des premières réponses.

19 Rappelons que cette opposition est faite par les manuels et les enseignants alors que ces deux fonctions n'ont théoriquement pas de raison de s'opposer.

20Ceci fait actuellement l'objet de notre travail de thèse au cours duquel nous sommes allée observer (durant l'année scolaire 00/01) deux enseignantes pendant toutes leurs séances d'arithmétique.

ANNEXE 1

Voici deux démonstrations du théorème de Bézout, que l'on peut trouver dans les manuels actuels de terminale S spécialité. La démonstration proposée par M_3 *fait référence de façon sous-jacente aux idéaux de* $\mathbf{Z}$ *et celle proposée par* M_2 *utilise l'algorithme d'Euclide. Cette dernière méthode algorithmique est plus dans l'esprit du programme actuel d'arithmétique que la première.*

Théorème : Pour tous entiers naturels non nuls a et b, il existe des entiers relatifs u et v tels que : au + bv = PGCD(a ; b) (M_1, p.51)

Démonstration proposée par M_3 *:*

En effet, considérons G l'ensemble des *entiers naturels non nuls* de la forme : am + bn ($m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$)

- G est non vide, puisque G contient $|a|$ (avec n = 0 et m = +1 ou – 1) ; donc G admet un plus petit élément d : il existe $u \in \mathbf{Z}$ et $v \in \mathbf{Z}$, tels que au + bv = d.
- Puisque au + bv = d, tout diviseur commun à a et b divise d ; donc D (le pgcd de a et b) divise d. On en tire, en particulier : D £ d.
- Montrons alors que d divise a et b : la division euclidienne de a par b s'écrit : a = dq + r, avec 0 < r < d. On en tire :
$$r = a - dq = a - (au + bv)q = a(1 - qu) + b(-vq)$$
Cette dernière égalité montre que r est de la “forme am + bn”.
Or r vérifie $0 \le r < d$; r ne peut être non nul (ce serait alors un élément de G strictement inférieur à d), donc r = 0.
Cela prouve que d divise a, et on établit de même que d divise b.
- Conclusion : d est un diviseur commun à a et b vérifiant $D \le d$, donc D = d, et il existe deux entiers u et v tels que au + bv = D.

Démonstration proposée par M_1 *:*

- Si b divise a, alors PGCD(a ; b) = b et $a \times 0 + b \times 1 = b$.
Si a divise b, alors PGCD(a ; b) = a et $a \times 1 + b \times 0 = a$.
- Si a ne divise pas b et b ne divise pas a, on applique l'algorithme d'EUCLIDE au couple (a ; b). Avec les notations des divisons euclidiennes, on obtient :
$r_1 = a - bq_1 = au_1 + bv_1$, avec $u_1 = 1$ et $v_1 = -q$.
$r_2 = b - r_1q_2 = b - (a - bq_1)q_2 = -aq_2 + b(1 + q_1q_2)$
Ainsi $r_2 = au_2 + bv_2$, avec $u_2 = -q_2$ et $v_2 = 1 + q_1q_2$.
Ensuite, $r_3 = r_1 - r_2q_3 = a - bq_1 - [-aq_2 + b(1 + q_1q_2)]q_3$.
Ainsi $r_3 = au_3 + bv_3$, avec $u_3 = 1 + q_2q_3$ et $v_3 = q_1 - q_3 - q_1q_2q_3$.
En poursuivant ce processus, on montre que, pour tous les restes r_p obtenus jusqu'au reste non nul r_n : $r_p = au_p + bv_p$, où u_p et v_p sont des entiers relatifs qui s'expriment en fonction de $q_1, q_2, \dots, q_p$. On obtient ainsi $r_n = au_n + bv_n$, or r_n = PGCD(a ; b)

Ce procédé permet d'obtenir une valeur particulière de u et une valeur particulière de v (démonstration constructive) ; ce qui prouve l'existence d'un couple (u ; v).

ANNEXE 2 : Questionnaire

Actuellement en DEA EIAHD à l'université Joseph Fourier de Grenoble (DEA de didactique des disciplines scientifiques), j'ai choisi comme thème de mémoire la réintroduction de l'arithmétique en classe de terminale S spécialité. Je vous adresse le questionnaire que j'ai élaboré dans le cadre de ce mémoire. En le remplissant, n'hésitez pas à faire toutes les remarques et commentaires que vous souhaitez (vous pouvez au besoin ajouter une feuille). Je vous remercie sincèrement pour votre aide et le temps que vous voudrez bien accorder à ce projet.

Nom-Prénom : *Depuis quand enseignez-vous ? :*
Nom de l'établissement :
Quel manuel utilisez-vous en classe de spécialité Maths ? :
Quelles sont vos sources de travail pour la partie arithmétique de l'enseignement de spécialité ? :

A) Dans votre cours d'arithmétique :

1. Avez-vous donné une démonstration de la division euclidienne ? O / N
   Si oui, était-elle basée :
   ◊ sur la méthode des soustractions successives ?
   ◊ sur les propriétés de **N** relatives à la relation d'ordre ≤ (plus grand élément) ?
   ◊ sur la propriété d'Archimède ?
   ◊ autre (précisez) :
2. A quel moment avez-vous introduit la notion de pgcd ?
   ◊ Avant d'avoir introduit les nombres premiers.
   ◊ Après.
3. Avez-vous donné une démonstration du théorème de Bézout ? O / N
   Si oui, quels en étaient les éléments importants ? :
   ◊ $E = \{am + bn \,/\, (m,n) \in \mathbf{Z}^2\}$ et la division euclidienne.
   ◊ l'algorithme d'Euclide.
   ◊ autre (précisez) :
4. Avez-vous donné une démonstration du théorème d'existence de la décomposition d'un entier naturel $n \geq 2$ en produit de facteurs premiers ? O / N
   Si oui, laquelle avez-vous retenue ? :
   ◊ par récurrence.
   ◊ la méthode de «descente».
   ◊ par l'absurde.
   ◊ autre (précisez) :

B) Avez-vous demandé aux élèves de programmer certains algorithmes sur leur calculatrice ? O / N
   Si oui, lesquels ?

   Cela a-t-il donné lieu à des activités ou à des corrections en classe ? O / N

C) Dans les exercices que vous avez donnés en arithmétique, jugez-vous que l'usage de la calculatrice en était un élément :
◊ dont on pouvait se passer ?
◊ assez important ?
◊ important ?
◊ indispensable ?

D) Avez-vous proposé à vos élèves des exercices ou des activités dans lesquels la calculatrice était indispensable ? O / N
Si oui, la raison en était : ◊ travail sur les grands nombres.
◊ TP ou exercice de programmation.
◊ autre(s) (précisez) :

E) Avez-vous utilisé d'autres moyens informatiques ? O / N
Si oui, lesquels (ordinateur, tableur, logiciel de calcul...) ?
Les exercices faits avec un ordinateur auraient-ils pu être faits avec une calculatrice ?

F) 1. Pour le calcul du pgcd de 11 475 et 9 750, entre la méthode utilisant la décomposition en facteurs premiers et celle utilisant l'algorithme d'Euclide, y en a-t-il une qui vous semble plus judicieuse (économique) que l'autre ? Pourquoi ?
On donne ci-dessous les résultats des «calculs» :
— *décomposition en facteurs premiers de* 11 475 *et* 9 750 *:*
$11\,475 = 3^3 \times 5^2 \times 17$ et $9\,750 = 2 \times 3 \times 5^3 \times 13$
— *algorithme d'Euclide appliqué à* (11 475 , 9 750) *:*
$11\,475 = 9\,750 + 1\,725$ $1\,125 = 600 + 525$
$9\,750 = 1\,725 \times 5 + 1\,125$ $600 = 525 + 75$
$1\,725 = 1\,125 + 600$ $525 = 75 \times 5$
2. D'une manière générale, avez-vous conseillé à vos élèves une méthode de recherche de pgcd plutôt qu'une autre ? O / N
Si oui, laquelle et pourquoi ?

3. Avez-vous fait à vos élèves des commentaires sur l'efficacité respective de ces deux méthodes pour le calcul d'un pgcd ?
Si oui, lesquels ?

G) Voici un énoncé d'exercice :

«Le mathématicien Lagrange conjectura la propriété suivante : *tout nombre impair $n \geq 5$ peut s'écrire sous la forme $n = 2p + q$, avec p et q entiers premiers.*
Par exemple : $51 = 2 \times 23 + 5$.
Écrire un programme permettant, pour un entier impair $n \geq 5$ donné, de déterminer un couple (p ; q) de nombres premiers tels que $n = 2p + q$.
(Cette conjecture n'est toujours pas démontrée.)»

Jugez-vous que cet exercice est un exercice d'arithmétique ? Pourquoi ?

Poseriez-vous un tel exercice à vos élèves ? Pourquoi ?

BIBLIOGRAPHIE

ARTAUD M. (1997), Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques, in Association pour la recherche en Didactique des Mathématiques (éd.), *Actes de la IXe école d'été de didactique des mathématiques.*

BILGOT J.F., MONCORGE D., NOAILLES J., NOIRFALISE R. (1998), *Arithmétique en terminale S, enseignement de spécialité nouveau programme*, Publications du CRDP Auvergne, IUFM de Clermont-Ferrand.

CHEVALLARD Y. (1980), *La transposition didactique*, Ed. La Pensée Sauvage, 1991, Grenoble.

COULANGE L. (2001), Evolutions du passage arithmétique-algèbre dans les manuels et les programmes du 20ème siècle. Contraintes et espaces de liberté pour le professeur, *Petit X*, n°57, pp.61-78.

EGRET M.A. (1999), Problèmes d'écriture de démonstrations chez des élèves de lycée en arithmétique, in M. Bailleul (éd.), *Actes de la Xe école d'été de didactique des mathématiques*, IUFM de Caen.

IREM DE POITIERS, *Enseigner l'arithmétique*, 2000

RAVEL L. (2000), *Des programmes ... à la classe, en passant par les manuels - Étude de la réintroduction de l'arithmétique en terminale S spécialité*, mémoire de DEA de didactique des mathématiques, Université Joseph Fourier, Grenoble.

RODDIER J.A. (2002), Conjectures en Arithmétique, *Repères-Irem*, n°46, pp. 91-106.

MANUELS SCOLAIRES

Math, enseignement de spécialité, terminale S, collection Terracher, édition Hachette, 1998

Math, TermS, spécialité, collection Transmath, édition Nathan, 1998

Maths, terminale S, enseignement de spécialité, collection Déclic, édition Hachette, 1998

Mathématique, tome 1 Nombres Probabilités, terminales C E, collection Queysanne-Revuz, édition Fernand Nathan, 1971