DE LA POSSIBLE INFLUENCE DE L'ENVIRONNEMENT INFORMATIQUE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

Etude d'un exemple

Michelle KITTEL
Lycée Couffignal, Strasbourg
Gérard KUNTZ
Irem de Strasbourg

Avant-propos

La seule lecture du texte qui suit ne peut rendre compte de la richesse considérable des figures en mouvement. Il invite à les construire et à les animer, seule façon de juger sainement de l'intérêt du travail en environnement informatique.

Cet article est destiné aux lecteurs qui n'ont pas d'expérience de travail en environnement informatique. Ou qui doutent de l'intérêt de ce type d'activités. Voici ce que nous leur proposons. Qu'ils demandent à un (ou une) collègue connaissant Cabri de réaliser avec eux sur un ordinateur les diverses constructions proposées dans l'article et les animations qu'il tente de décrire. Ils apprendront en une heure trente les principales fonctionnalités de CABRI et ils découvriront les étonnantes images mentales nées de la dynamique des figures crées. Ils verront que la mise en oeuvre de Cabri n'est pas une entreprise insurmontable et que son apport à l'enseignement des mathématiques est irremplaçable. Nous parions que ceux qui feront l'expérience n'en resteront pas là...

L'article est aussi une mise en garde. Le travail en environnement informatique ne garantit ni la pertinence, ni l'intérêt d'une activité. Il est des sites mathématiques et des CDROM qui conduisent à de véritables régressions…

Le paysan qui défriche une nouvelle aire bute sur d'agaçantes zones empierrées qui courent au long du champ. L'archéologue y décèle une structure ancienne que la photo aérienne dessine dans sa globalité au soleil rasant. Le regard informé et le choix d'un environnement favorable comptent pour beaucoup dans la mise en évidence d'une situation potentiellement riche. Il en est de même dans l'enseignement des mathématiques.

Voici un exercice de Seconde. Il invite à étudier et à comparer des aires. Son intérêt dépend beaucoup des consignes données. Si on exclut l'outil informatique, il met surtout en évidence la grande difficulté d'une majorité d'élèves de Seconde à calculer des expressions algébriques, à prévoir leurs évolutions et à les comparer. Avec un grapheur, la difficulté du calcul initial demeure. Il reste à interpréter les courbes que trace le logiciel : comment comparer deux aires dans ce cadre ? Sous cet éclairage, le problème demeure relativement pauvre bien qu'il mette en œuvre une démarche qu'il est indispensable de maîtriser. C'est avec un logiciel de géométrie dynamique (Cabri par exemple) qu'il livre sa véritable profondeur. Les changements de cadres et de registres se multiplient. L'information prend toutes sortes de visages. Sa concentration sur les différentes zones de l'écran est impressionnante. Les liens entre les différentes natures d'information sont palpables. Beauté, densité et variété de l'activité mathématique s'imposent au plus blasé.

Ce problème a une histoire. L'idée initiale se trouve dans la « situation 22 » du classeur du professeur (Belin, classe de Seconde). Michelle Kittel en a tiré un énoncé pour le soumettre aux élèves de l'option « Mathématiques en environnement informatique » du lycée Couffignal à Strasbourg. Elle a résumé les observations faites en cours d'activité(on les trouvera plus loin).

Gérard Kuntz a proposé le texte de Michelle Kittel *(sauf la question 4)* lors d'une journée de formation, aux PLC2 de l'IUFM de Clermont Ferrand, puis, plus tard, aux formateurs de mathématiques (Irem et IUFM) de l'Académie de Créteil. L'article qui suit résume les enrichissements successifs apportés par ces différents acteurs à une situation de départ sans relief apparent. Devant l'accueil très positif réservé à cette activité lors des journées de formation, Gérard Kuntz y a ajouté des développements personnels ainsi qu'une comparaison avec le texte de l'ouvrage de Belin. En raison des enrichissements apportés à la situation de départ, Michelle Kittel projette de proposer une nouvelle version du problème à des élèves de Première S [1].

On trouvera dans l'encadré ci-contre le texte élaboré par Michelle Kittel pour ses élèves de Seconde.

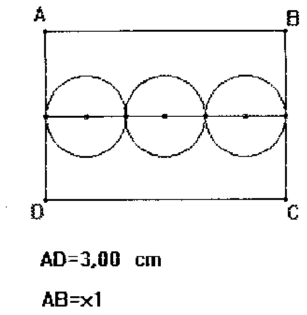
Des énoncés métamorphosés

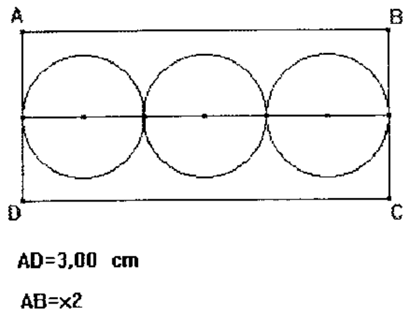
Le texte est bref. Il n'est pas découpé en questions et sous-questions. Il décrit la situation à l'aide de figures, sans préciser ce qui est évident visuellement. Aucune indication de méthode. Les résultats ne sont pas suggérés. Cette forme d'énoncé est possible car l'outil informatique intelligemment mis en œuvre, fait naître dans l'esprit des élèves des images mentales, des interrogations et des conjec-

1 Cet article est une belle illustration d'un thème d'Edgar Morin, « l'écologie des idées ». Un texte rédigé par un auteur est lancé dans le public. Il passe au crible de la réflexion et de l'imaginaire des lecteurs, des débats qu'il suscite, des articles qu'il inspire. Le texte de départ, inspiré par les lectures, l'expérience vécue et les rencontres de l'auteur, lui échappe et vit sa vie propre, qu'il aurait difficilement imaginée.

TROIS DISQUES DANS UN RECTANGLE.

1) Quel est le problème posé ?
ABCD est un rectangle ayant un côté fixe AD=3 cm et un côté variable AB=x cm.
On veut placer trois disques isométriques à l'intérieur de ce rectangle comme sur les deux dessins ci-dessous :





Le but est ***d'étudier*** *et de* ***comparer*** *l'aire des 3 disques et l'aire restante du rectangle lorsque le côté AB varie.*
2) Expliquez ce qu'on peut trouver à l'aide de Cabri.
3) Etudiez ce qu'on peut trouver à l'aide de Graph'x.

REMARQUE.
C'est VOUS qui posez les questions et qui donnez les réponses pour arriver au but !!

4) Et si les disques n'étaient plus centrés sur la médiatrice de [AB] ?

tures qui remplacent avantageusement le guidage tatillon des énoncés classiques.

Personne parmi ceux à qui il a été soumis n'a émis le moindre doute à propos des *non dits* de l'énoncé. Les *deux* figures suffisent pour se convaincre que les cercles sont centrés sur la médiatrice de [AB], et pour prendre en compte les tangences observées. La persistance de ces propriétés dans les deux figures n'est pas étrangère à la conviction qui en résulte. En proposant une double figure, l'auteur a traduit sur papier la dynamique de la figure informatique.

L'environnement informatique rend possible de profondes modifications des énoncés, et pas uniquement en géométrie. Dans le n° 45 de Repères-Irem, J-A Roddier récrit en une ou deux phrases, des énoncés récents d'arithmétique du baccalauréat [2]. L'usage

2 Conjectures en arithmétique.

d'Excel ramène les textes à leur plus simple expression. Tous les résultats (et certains autres…) que les anciens énoncés détaillaient, sont visibles à l'écran ! Il reste à les interpréter, puis à les démontrer. De plus, les démonstrations issues de l'observation de la feuille de calcul sont bien plus « naturelles » que celles qui sont proposées au baccalauréat (la plupart des élèves n'y auraient pas pensé).

Le « problème ouvert », dont les vertus ont été maintes fois soulignées, peut assez facilement émerger dans l'environnement informatique [3].

Constructions de la figure avec CABRI [4] et affichage des valeurs numériques associées

A y regarder de près, l'énoncé contient deux messages que l'on peut ressentir comme contradictoires. L'affirmation de l'initiative de l'élève (pour poser les questions et y répondre) se heurte à un encadrement dont la discrétion cache mal le caractère contraignant. Les logiciels (et l'ordre d'usage) sont imposés. La figure est décrite de façon ordonnée : d'abord le rectangle, ensuite les disques placés à l'intérieur. La variable choisie est soulignée de façon insistante (à trois 3 reprises).

Sous sa forme actuelle, le texte du problème induit naturellement une construction qui en suit la chronologie. C'est ainsi que l'ont interprété unanimement les PLC2 [5] de Clermont. Plus sensible au message de liberté proclamé par le texte, l'un des formateurs de Créteil a pris l'initiative d'une construction à partir du cercle central et de deux points diamétralement opposés. Le rayon du cercle est alors devenu la variable du problème. Le rectangle a été construit dans un second temps. A-t-il trahi l'intention initiale ou en a-t-il gommé la contradiction ? Le débat fut long et passionné, sans véritable accord final. L'importance de la forme de l'énoncé proposé a été soulignée : c'est une variable didactique fondamentale. Nous jouerons sur cette variable dans la suite de l'article.

La construction la plus fréquemment mise en œuvre consiste à mettre en place le segment [AD] et sa médiatrice, puis un *point variable I* de cette médiatrice (point sur un objet). Les outils de CABRI permettent alors le tracé du rectangle dynamique ABCD sans aucune difficulté. Il faut ensuite partager [OI] en 3 (ou 6) parties égales (O est le milieu de [AB]). Le tracé par O d'un droite auxiliaire (d) pour créer une situation de Thalès s'impose rapidement. Mais le report de segments isométriques à partir de O pose des problèmes inattendus. Plusieurs binômes de PLC2 se croient obligés de reporter des segments de longueur 1 centimètre. L'idée qu'une symétrie produise des segments isométriques à partir d'un segment quelconque ne semble pas aller de soi. La possibilité de tracer un cercle de centre désigné passant par un point désigné achève la construction de la figure. Le déplacement de I sur (d) déforme la figure en maintenant les dépendances et les propriétés (cercles isométriques tangents et tangents à 2 côtés du rectangle). La perte des propriétés quand I varie met en évidence des erreurs de construction : la sanction du logiciel est impitoyable !

Une autre construction évite le recours à la situation de Thalès. Elle consiste à placer

3 Il y faut de nombreuses conditions. On verra plus loin un contre-exemple saisissant.

4 Les collègues peu familiers de CABRI trouveront en annexe la construction pas à pas avec le logiciel.

5 Est-ce le reflet de l'enseignement qu'ils ont reçu au fil de leurs études ? Une formation qui privilégie la docilité ?

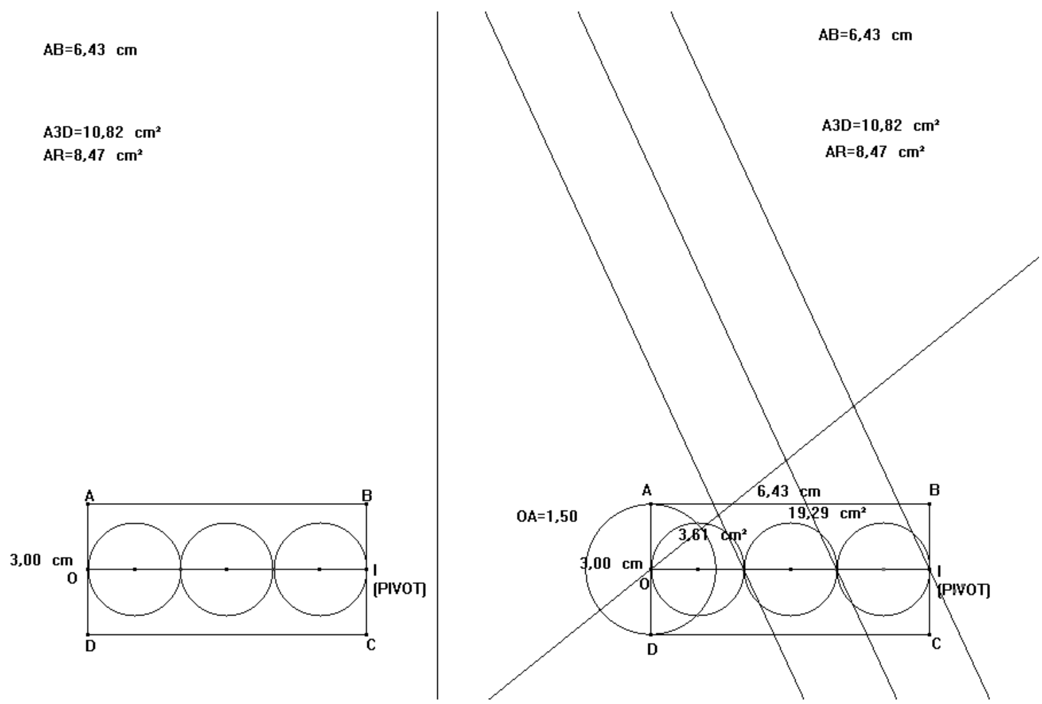


FIGURE 1

un point E sur la médiatrice de [AD]. E est le centre du premier cercle (il passe par O). Une suite de symétries centrales met en place les points utiles, y compris le point I précédent. On peut alors compléter le rectangle et tracer les cercles. Mais il n'est plus possible de déplacer I avec la souris : c'est E qui est devenu le pivot de cette figure dynamique. Cette deuxième construction est plus rapide. Elle semble moins naturelle dans le contexte proposé : elle s'écarte en effet de la chronologie implicite du texte de l'exercice (l'ordre de construction des cercles et du rectangle est indifférent). Peu d'utilisateurs y ont pensé. Elle présente un inconvénient technique important : la figure est bien plus sensible aux déplacements de E qu'à celles de I (I subit un déplacement six fois plus important que E). La première construction permet une observation beaucoup plus fine des variations des différentes valeurs numériques en jeu dans le problème. La mise en évidence de valeurs particulières (maximum, zéro, un) en est grandement facilitée. Il faut arbitrer entre la simplicité de la construction et celle de son utilisation. Pour utiliser au mieux les évaluations d'aires disponibles sur Cabri [6], il faut redéfinir ABCD

6 Cabri évalue l'aire d'un disque et d'un polygone désignés .

comme un polygone. On obtient sans calcul *l'affichage dynamique* des longueurs AB et AD ainsi que celui des aires du rectangle ABCD et d'un des disques de la figure. La calculatrice de Cabri permet alors l'évaluation dynamique et l'affichage de l'aire des 3 disques (A3D) et de l'aire restante (AR), différence entre l'aire du rectangle et celle des 3 disques.

Il reste alors à l'écran la figure dynamique débarrassée des constructions auxiliaires et des valeurs numériques devenues inutiles (elles ont été *cachées*), et les 3 valeurs numériques AB, A3D, AR (cf. copie d'écran). La somme d'initiatives, de connaissances et d'outils mathématiques mis en œuvre pour arriver à ce stade, est considérable et le traitement d'informations intense. On ne s'est vraiment pas contenté de « faire joujou » avec l'ordinateur ! La figure 1 qui suit, traitement d'informations en acte, présente les constructions et les affichages réalisés (à droite) et la figure finale, ramenée à l'essentiel (à gauche). Il lui manque simplement de faire défiler les valeurs numériques quand le lecteur déplace le pivot I de la figure !

Variables et fonctions.

Quand on pointe vers une des trois zones de l'écran où sont affichés AB, A3D et AR, la même légende apparaît dans les 3 cas: « ce nombre ». Cabri masque ainsi (comment pourrait-il en être autrement ?) une dissymétrie essentielle entre AB d'une part, A3D et AR d'autre part.

AB est certes un nombre, mais un nombre *variable*, c'est à dire une *variable*. Quand on l'introduit dans la calculatrice, il apparaît soudain avec la dénomination habituelle (une lettre) d'une variable : a, b et c . *Tout ceci doit être soigneusement clarifié avec des élèves de Seconde.*

A3D et AR *dépendent* de AB. Cela ne suffit pas pour qu'elles soient *des fonctions de AB*. A chaque valeur de AB (prise dans[0,9]) correspond une figure unique, donc des aires uniques : voilà ce qui leur confère ce statut (le raisonnement se substitue ici au logiciel, bien incapable de passer en revue tous les réels entre 0 et 9 !).

Pour marquer la différence entre variable et fonction, il serait judicieux de lier l'affichage de AB à la figure et de situer A3D et AR dans une autre zone de l'écran. Ou de séparer leurs zones d'affichage comme sur la figure 2. On pourrait même écrire : A3D(AB) et AR(AB).

Les deux fonctions mises en évidence ont des vertus intéressantes pour des élèves de Seconde : elles existent *indépendamment de toute formule de calcul*. Cela remet en cause le lien (oh! combien solide et pernicieux dans l'esprit de trop nombreux élèves de lycée) *entre fonction et expression algébrique.* Cabri permet le passage d'un nombre à son image par chacune des deux fonctions sans qu'il soit nécessaire à l'utilisateur *d'exprimer* A3D et AR en fonction de AB [7].

On peut aussi considérer A3D et AR comme des fonctions *du point B*, décrivant le segment [OL], de longueur 9 cm, porté par la médiatrice. C'est un pas utile vers les transformations ponctuelles, fonctions de *variable ponctuelle à valeur ponctuelle*. Puis vers les fonctions d'un ensemble quelconque vers un ensemble quelconque [8].

---

7 L'expression algébrique existe bien entendu. On sera obligé de la calculer pour l'introduire dans le grapheur.

8 On les rencontre très naturellement en programmant dans un langage structuré.

Une dernière remarque à propos de l'élaboration de la figure et des valeurs numériques associées : l'énoncé indique que les 3 disques sont *INTERIEURS* au rectangle. Or, telle qu'elle a été réalisée, la figure dynamique n'interdit pas aux disques d'en sortir, ni à A3D et AR d'exister. Fallait-il la verrouiller ? Il aurait suffi pour cela de déclarer I comme « point sur segment [OL] ». Mais personne, dans les différents groupes où l'activité fut proposée, n'y a pensé *au départ*. Preuve que l'environnement informatique favorise, même chez des sujets expérimentés, l'action immédiate au détriment d'une réflexion prospective.

Interpréter l'évolution des valeurs numériques affichées

Le travail réalisé jusqu'ici permet d'aborder la question centrale du problème : *étudier* et *comparer* deux aires. Deux cadres sont mis en évidence à l'écran : le cadre géométrique et le cadre numérique. Ils sont liés. L'œil passe de l'un à l'autre ou les embrasse simultanément selon les besoins.

Point n'est besoin d'informatique pour l'étude de A3D : l'aire d'un disque croît avec son rayon (on peut inclure le petit disque dans le grand). Mais A3D est indispensable quand viendra le moment de *comparer* les aires.

L'évolution de AR ne relève pas de l'évidence. Partant de zéro, elle commence par croître jusqu'à la valeur 8.59, s'y maintient pendant que AB est compris entre 5.56 et... 5.90, puis décroît jusqu'à la valeur 5.80 quand I varie de O à P. Il est intéressant de noter la quasi-« stationnarité » de AR au voisinage d'un maximum. La pseudo-« stationnarité » constatée est liée au fait qu'un écran graphique est fait de gros grains, les pixels… Voilà d'excellentes observations (et questions associées) pour les élèves.

Jusqu'ici, le cadre numérique était suffisant pour étudier la fonction non prévisible. Mais il oblige à de pénibles contorsions visuelles lorsqu'il s'agit de *comparer* A3D et AR. Il faut repérer le (ou les) moment(s) où deux zones d'écran variables affichent le même nombre, puis échangent leur primauté… Problème totalement déconnecté du précédent (l'évolution de chaque quantité). Et pourtant. La bascule a lieu entre 5.72 et 5.74, donc en pleine zone de pseudo-stagnation de AR ! Impossible de gagner en précision (pixel oblige). Avant la bascule, AR est supérieur à A3D, après, c'est l'inverse.

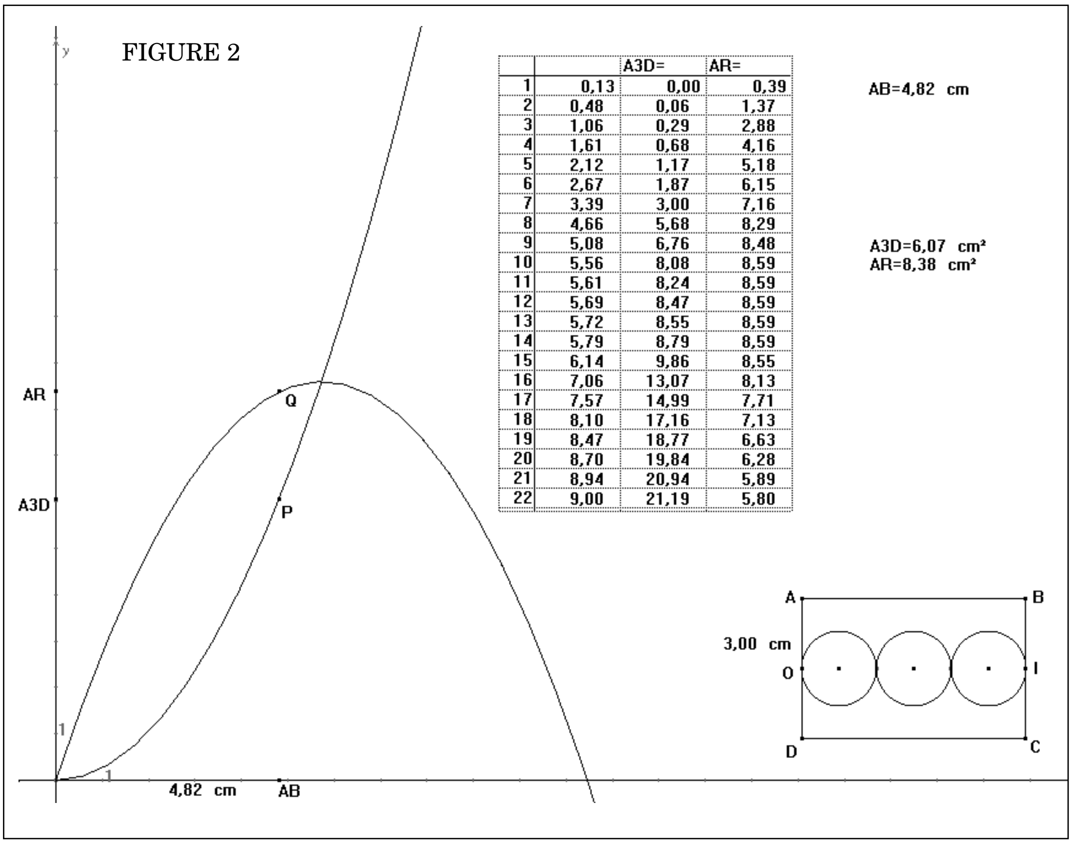
On peut utiliser l'outil TABLEAU (changement de registre dans le cadre numérique) pour échapper à la difficulté d'une observation simultanée. Mais aucun gain de précision n'est possible : le passage d'un pixel au suivant près de l'inversion de tendance représente un saut important pour AB : entre deux pixels contigus, il n'y a …rien [9] !

Le cadre graphique permet un intéressant changement de regard. Il suffit de *reporter* AB sur l'axe horizontal, A3D et AR sur l'axe vertical, puis de construire les points P et Q de coordonnées (AB, A3D) et (AB, AR). Le lieu [10] de P et celui de Q (quand I varie) est tracé par CABRI à la demande ! On obtient l'écran suivant (voir la Figure 2 au verso).

9 Alors qu'entre deux points distincts, il y en a une infinité d'autres…

10 Ce très commode outil de CABRI nécessite de sérieuses explications auprès des élèves utilisateurs. Il a sur l'outil TRACE un gros avantage : Le lieu est un OBJET CABRI et à ce titre, il est recalculé de façon dynamique au fil des évolutions de la figure.

FIGURE 2



		A3D=	AR=
1	0,13	0,00	0,39
2	0,48	0,06	1,37
3	1,06	0,29	2,88
4	1,61	0,68	4,16
5	2,12	1,17	5,18
6	2,67	1,87	6,15
7	3,39	3,00	7,16
8	4,66	5,68	8,29
9	5,08	6,76	8,48
10	5,56	8,08	8,59
11	5,61	8,24	8,59
12	5,69	8,47	8,59
13	5,72	8,55	8,59
14	5,79	8,79	8,59
15	6,14	9,86	8,55
16	7,06	13,07	8,13
17	7,57	14,99	7,71
18	8,10	17,16	7,13
19	8,47	18,77	6,63
20	8,70	19,84	6,28
21	8,94	20,94	5,89
22	9,00	21,19	5,80

CABRI donne alors sa pleine mesure : quand on déplace I, les points AB, A3D et AR varient comme précédemment, mais de plus, P et Q se déplacent corrélativement sur les courbes représentatives des deux fonctions (les lieux de P et Q) ! On voit que les deux courbes se coupent en un point unique (les deux aires sont alors égales). La position relative des deux courbes avant et après l'intersection permet de *comparer* (avec un grand confort visuel) les deux aires (Q au-dessus de P équivaut à AR > A3D).

Il convient de prendre la mesure de la *densité d'informations* sur l'écran précédent. Toutes ces informations sont *liées les unes aux autres* et *varient simultanément avec I* (le tableau seul est inerte).

Les comprendre, les interpréter en fonction du problème est une expertise capitale. Les élèves qui s'y attachent ne perdent vraiment pas leur temps.

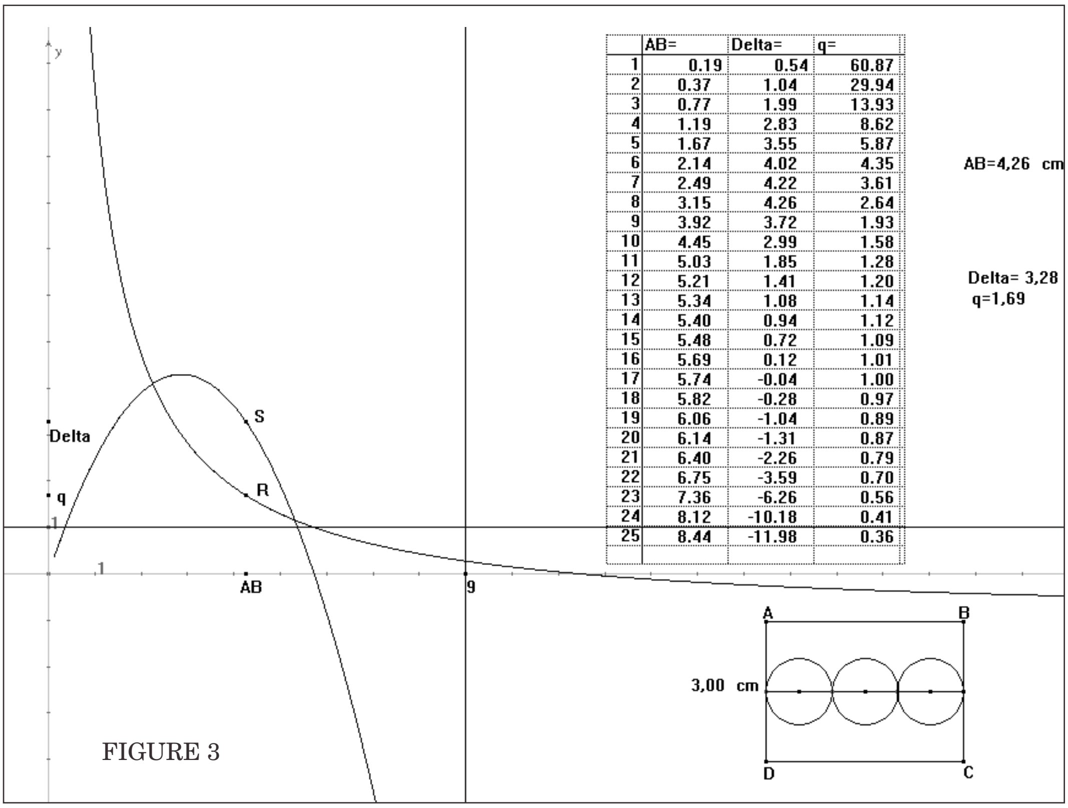
Il ne leur reste plus qu'à *résumer leurs observations* (c'est le difficile compte-rendu d'activité) et à en tenter une démonstration. A moins que des variantes intéressantes des démarches précédentes ne relancent la réflexion.

Et si on changeait de fonction ?

Pour comparer deux nombres positifs ou nuls, on peut suivre leurs évolutions simultanées (c'est ce qui vient d'être fait), mais on peut aussi comparer *leurs différences à zéro ou leur quotient à un.* On obtient alors l'écran ci-dessous, qui redit à sa manière les résultats précédents (Figure 3).

Sur cet écran, delta représente AR – A3D, q signifie $\frac{AR}{A3D}$. Les coordonnées respectives de R et S sont (AB,q) et (AB,delta). On remarquera que CABRI donne AB en centimètres, delta en centimètres carrés et q sans dimension. Belle cohérence du logiciel.

Dans la nouvelle représentation, la comparaison de AR et A3D revient à l'étude de la position du lieu de S par rapport à l'axe horizontal ou de celle du lieu de R par rapport à la droite Δ d'équation ($y = 1$).



	AB=	Delta=	q=
1	0.19	0.54	60.87
2	0.37	1.04	29.94
3	0.77	1.99	13.93
4	1.19	2.83	8.62
5	1.67	3.55	5.87
6	2.14	4.02	4.35
7	2.49	4.22	3.61
8	3.15	4.26	2.64
9	3.92	3.72	1.93
10	4.45	2.99	1.58
11	5.03	1.85	1.28
12	5.21	1.41	1.20
13	5.34	1.08	1.14
14	5.40	0.94	1.12
15	5.48	0.72	1.09
16	5.69	0.12	1.01
17	5.74	-0.04	1.00
18	5.82	-0.28	0.97
19	6.06	-1.04	0.89
20	6.14	-1.31	0.87
21	6.40	-2.26	0.79
22	6.75	-3.59	0.70
23	7.36	-6.26	0.56
24	8.12	-10.18	0.41
25	8.44	-11.98	0.36

FIGURE 3

Ces courbes coupent respectivement (Ox) et Δ en deux points dont l'abscisse correspond à la longueur OI pour laquelle les deux aires sont égales. Au moins sur le plan théorique. En déplaçant I, on obtient bien la valeur q = 1, mais alors, delta vaut… – 0,04 cm². Et sur le pixel suivant, delta saute à 0,04 cm². Les mathématiques de l'écran graphique ne sont décidément pas celles du plan mathématique ! Approximation et discontinuité de l'écran graphique apparaissent en pleine lumière.

Il serait dommage de passer à côté d'une incidente de grand intérêt. Le tracé du lieu de S n'atteint pas l'origine du repère (pourquoi ?), mais en déplaçant I vers O, S parcourt l'arc non dessiné du lieu. Il s'agit donc d'une question technique qu'un expert saura résoudre.

En revanche, la courbe de S s'envole vers les sommets quand I s'approche de O. On peut forcer q à… 432.1 avant qu'il ne vire, au pixel suivant à « inexistant » ! Quand q est crédité de la valeur 432.1, A3D s'affiche 0.08 et AR 0 ! Quand on augmente la précision on obtient : AR = 0.00018. On respire mieux !

Toujours est-il qu'on va faire découvrir aux élèves de Seconde une situation très étonnante : le rapport de deux nombres très voisins de 0 peut devenir très grand. Mais si on fait le rapport dans l'autre sens, il sera très voisin de …0. Le rapport de deux nombres très voisins de zéro dépend de leur ordre de grandeur.

Il n'est pas inutile de rappeler que $\frac{0}{0}$ n'a aucun sens (« inexistant » dans CABRI). Les images mentales créées à l'occasion de cette situation géométrique seront précieuses quand viendra la notion de « forme indéterminée » en Première et Terminale.

Une fois encore, nous avons changé de cadre en éclairant au passage une question d'analyse.

Et si on simplifiait la figure ?

Sommes-nous au bout du travail en environnement CABRI ? Que nenni ! L'inventivité des formateurs de Créteil est sans bornes. « On aurait pu se contenter d'une figure plus simple, un rectangle contenant un seul cercle ». Cette remarque paraît évidente une fois formulée. Il faut croire qu'elle ne l'est pas vraiment : elle a été proposée par un seul enseignant parmi la cinquantaine qui ont successivement étudié la situation. Elle évite ainsi la construction de Thalès. L'ordre de construction est indifférent. On obtient immédiatement l'aire du disque, celle du rectangle, donc l'aire restante (calculatrice de CABRI). On peut alors réfléchir à l'incidence d'une multiplication par 3 sur l'évolution d'une grandeur, sur la comparaison de deux grandeurs, leur différence ou leur quotient. Sur le passage des courbes représentatives issues de la situation simplifiée à celles de la situation qui vient d'être traitée : les abscisses et les ordonnées sont multipliées par 3, donc les courbes sont homothétiques !

Si cette réflexion paraît trop rude, il suffit de multiplier l'abscisse et les deux aires par 3 (outil « calculatrice ») et l'on obtient les valeurs de la figure complète à partir de la figure simplifiée !

Bien entendu, tous les objets évoqués peuvent être construits et comparés « de visu ».

Et si les disques n'étaient plus centrés sur la médiatrice de [AB] *?*

Soit T un point de [OA] et δ la perpendiculaire en T à (OA). Si les cercles sont centrés sur δ, la seule chose qui change (les disques sont intérieurs au rectangle) est *leur rayon maximal TA et le segment [TM], de longueur 6TA sur lequel I peut évoluer (*il remplace le segment précédent [OL]). On passe en effet de la situation de la figure 2 à la situation actuelle par la translation de vecteur $\overrightarrow{OT}$. Toutes choses sont donc égales (la translation conserve les aires des disques, donc la différence des aires, celle du rectangle étant inchangée) sauf *l'ensemble de définition des fonctions A3D1 et AR1* (à nouvelles fonctions, nouvelles notations !) Une utile réflexion sur la définition d'une fonction (l'ensemble de définition est partie intégrante de la fonction).

On peut bien sûr vérifier tout cela en faisant une nouvelle figure CABRI… que le raisonnement rend inutile.

Et si on changeait la longueur de [AD] *?*

Cela revient à introduire *un paramètre*, la longueur OA. Profitons-en pour intégrer à cette dernière figure tous les éléments mis en lumière précédemment. A varie sur une droite verticale (OA est affiché), donc I est un « point sur le segment » [OL] de longueur 6OA. Le reste à l'identique.

A chaque choix de A (donc de OA) correspondent des courbes de P et Q définies sur le segment [0,OL] (I étant déclaré sur [OL], *l'ensemble de définition* des deux fonctions est pris en compte par CABRI (voir la figure 4 de la page suivante). Quand A (donc OA) varie, la courbe de P ne change évidemment pas : seule varie *la longueur* de l'arc de parabole tracé. En revanche, la courbe de Q est modifiée (ainsi que son ensemble de définition) : en déplaçant A avec la souris, l'élève voit défiler *une famille de courbes (paraboles) dépendant du paramètre OA (ou AD) et dessinées en temps réel.* Mieux que par un discours sur les fonctions et leur ensemble de définition, l'élève voit cette notion « en actes », sous ses yeux ! Il aurait été dommage de le priver de ce spectacle créateur d'images mentales très suggestives.

Il reste à espérer que le lecteur, condamné aux figures inertes (le papier ne permet pas encore l'animation dynamique...), compensera sa frustration en construisant lui-même la séquence animée avec CABRI. Il pourra alors mesurer l'impact de telles images sur qui cherche à comprendre les mathématiques.

Influence du changement de logiciel sur l'activité. Comparaison avec CABRI

Changer de logiciel, c'est *se contraindre à changer de regard sur le problème étudié.* Un grapheur trace toutes les courbes que vous voulez, pourvu que vous en fournissiez l'équation !

Nous voici ramenés au cadre algébrique et au calcul d'expressions algébriques. Le travail avec CABRI nous pousse à introduire d'emblée le paramètre a (AD = 2a) et à choisir comme variable x = AB = OI. On obtient alors : $A3D = 3\pi\,(\frac{1}{2\pi})^2$ et $AR(x) = 2ax - \frac{\pi x^2}{12}$ les deux fonctions étant définies sur [0, 6a].

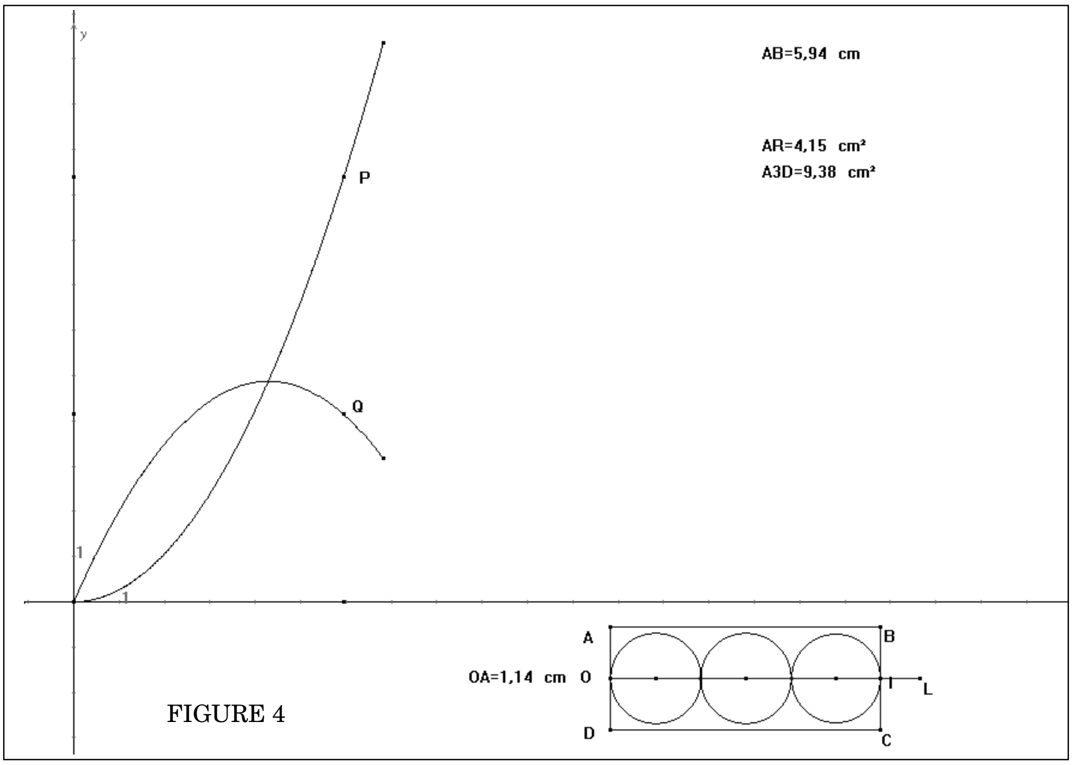


FIGURE 4

Pour chaque valeur de a, le grapheur trace les courbes, qui sont évidemment celles rencontrées dans Cabri. Rien n'empêche d'introduire *delta*(x) = $2ax - \frac{\pi x^2}{6}$ ou q(x) = $\frac{24a}{\pi x} - 1$

comme précédemment, avec les mêmes représentations, réflexions, et conclusions. L'expression de q(x) permet de mieux comprendre pourquoi sa courbe décollait si fort au voisinage de zéro.

Mais on a perdu, dans cet environnement toute la dynamique des liens entre figure, valeurs numériques et courbes représentative. L'ensemble est devenu terriblement *statique*. Bien que l'interprétation des courbes soit une compétence importante en mathématiques, le sujet s'est considérablement *appauvri* par rapport au travail avec CABRI.

Et si on démontrait ce que montrent les logiciels ?

En Seconde, l'étude des fonctions du second degré (autres que f(x)=x^2) n'est pas au programme : il faut donc se contenter de ce que montrent les logiciels (sauf à se ramener, à titre d'exercice à ce cas, en mettant l'expression sous forme canonique). En revanche, la comparaisons des aires est à la portée de quiconque manie un minimum de calcul algébrique.

$delta(x) = 2ax - \frac{\pi x^2}{6} = \frac{\pi}{6}(12a - \pi x)$ et $q(x) = \frac{24a}{\pi x} - 1$ sur [0,6a].

Résoudre $delta(x) > 0$, $delta(x) = 0$ ou $delta(x) < 0$ ne représente pas une performance exceptionnelle, x étant positif ou nul (on est ramené à des inéquations du premier dégré). La valeur de seuil qui apparaît est $\frac{12a}{\pi}$ soit $\frac{18}{\pi}$ dans le cas où 2a = 3. On retrouve la valeur approchée (entre 5.72 et 5.74) donnée par CABRI.

Les résultats concordent bien sûr si on raisonne à partir de q(x).

En tant que démonstration des résultats constatés avec des logiciels, le court travail qui vient d'être fait est indispensable. Mais si la résolution du problème se résumait à cette seule démonstration, elle serait d'une pauvreté accablante (bien qu'irréfutable), au regard de tout ce que recèle la situation qu'il décrit.

Et si on proposait cette activité à une classe de seconde ?

Michelle Kittel a fait travailler ses élèves de Seconde sur cette activité. Voici les conditions de l'expérimentation et ses principales observations.

« Les élèves ont travaillé par deux et l'information a circulé de groupe en groupe : il n'est pas interdit de discuter du problème avec d'autres; seul le compte rendu final est propre au binôme. Je m'*oblige* à des interventions très ponctuelles, uniquement en cas de blocage : il est toujours difficile de ne pas donner à l'élève une réponse qui « tue » l'activité...

Le temps total consacré à ce problème a été de sept heure trente : 6 heures pour la recherche (avec prise de notes en cours d'activité), une heure trente pour le compte rendu. Soit environ 4 séances de 2 heures espacées de quinze jours [11].

Avec cette classe et à la période de l'année où l'activité s'est déroulée, je n'avais pas abordé le calcul formel avec DERIVE. L'utilisation de ce logiciel aurait apporté un volet de plus au problème, mais même avec une « bonne » classe de Seconde, l'absence actuelle de familiarité avec le calcul algébrique élémentaire empêche d'utiliser ce type de logiciel de manière intéressante et utile (sauf peut-être en fin d'année).

Face à des disques qui « sortent du rectangle », les élèves ont sans difficulté trouvé la contrainte qu'il fallait imposer à la figure ($AB \leq 9$). La redéfinition du point « sur un segment » de longueur donnée n'a posé aucun problème : la maîtrise de CABRI était acquise grâce à des travaux antérieurs (sans cela, la difficulté du problème, ajoutée à la non-maîtrise du logiciel, auraient conduit à l'échec).

C'est seulement avec le logiciel GRAPH'X qu'ils ont pensé à faire la différence des aires et qu'ils ont tracé les trois courbes (les deux aires et leur différence). Le cadre algébrique n'est pas étranger à cette initiative : face à des expressions algébriques *explicites* [12] et à des inéquations, ils ont retrouvé des attitudes qui ont montré antérieu-

11 L'espacement des séances (sur deux mois) oblige les élèves à gérer la durée, ce qui est une compétence importante.

12 Avec Cabri, l'absence de ces expressions algébriques explicites a empêché l'idée d'émerger.

rement leur efficacité dans ce cadre. J'étais contente de les voir transformer le problème de la comparaison de deux expressions algébriques en l'étude de la position relative de deux courbes, puis en en celle de la position d'une courbe par rapport à Ox : le transfert de connaissances avait opéré.

Les compte rendus ont été parfois décevants si on les compare à l'activité déployée face aux machines (les fichiers électroniques recueillis étaient excellents). Tout se passe comme si, dès qu'une étape est franchie, (« comprise » disent les élèves), elle perd de son intérêt et on peut en oublier le cheminement. Sur les quinze compte rendus d'activité, deux étaient excellents, sept corrects, six franchement insuffisants.

Ces élèves ont évidemment *fait des mathématiques,* mais ils ont de la peine à *dire ces mathématiques* (ou n'en voient pas l'intérêt).

C'est à la fois la force et la faiblesse de l'environnement informatique, de conduire à une activité mathématique intense et peu explicite. Sur papier, pour faire des mathématiques il faut les *dire*, car on ne sait pas bien les *montrer* ! »

... et à une classe de troisième ?

Cette activité pourrait servir à introduire, en fin de Troisième, la notion générale de fonction et à faire découvrir, au-delà de la droite, la courbe représentative d'une fonction [13]. La notion d'aire y est connue ainsi que le calcul d'aires simples. L'affichage de ces aires avec Cabri ne présente guère de difficultés (cela fait partie de l'initiation au logiciel). Dès lors, on peut faire réfléchir les élèves aux questions suivantes :

a) dans quelles limites doit varier I (donc le nombre OI) pour satisfaire aux exigences de l'énoncé (les trois disques sont censés être à l'intérieur du rectangle) ? Comment imposer ces limites à I dans le cadre du logiciel ?

b) Quel est la nature du lien entre I (donc OI) et les aires affichées ?

L'existence d'une aire *unique* associée à *chaque point I d'un intervalle* (et à chaque nombre de [0,9]) définit une « fonction ».

L'idée de reporter la longueur OI sur un axe horizontal et l'aire correspondante sur un axe vertical n'est pas étrangère aux élèves de Troisième : ils ont fait cela pour une fonction affine. Cabri possède la commande qui rend ce report automatique. Les points P et Q des figures précédentes s'obtiennent simplement. On peut alors utiliser la commande TRACE ou la commande LIEU (qui systématise la trace) pour faire apparaître un tracé, la courbe représentative de la fonction (avec son ensemble de définition).

Viennent alors les inévitables questions :

1) Que signifie le fait qu'un tel tracé aille vers la droite et le haut ? À droite et en bas ? On aborde ainsi, sur un exemple, la notion générale de fonction croissante ou décroissante, déjà rencontrée avec les fonctions affines.

2) Que représente l'intersection des deux courbes ? Que signifie le fait qu'une courbe soit « au dessus d'une autre » ?

On ne fait que généraliser des réflexions et des connaissances rencontrées avec des fonctions affines et des droites, mais cette

13 Ce travail reste à faire. Il n'a pas été expérimenté avec une classe.

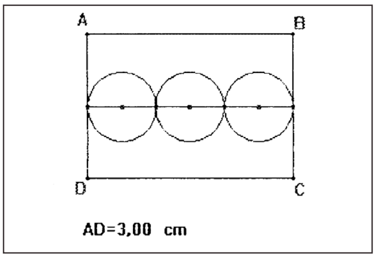
généralisation prépare le travail à venir et consolide les connaissances de la classe. Et tout ceci se fait à partir d'une fonction non confondue avec une « formule algébrique » !

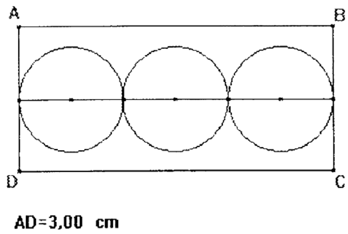
Et si on modifiait l'énoncé ?

Gommons la contradiction signalée au départ de l'article et insistons sur *l'initiative des élèves et l'ouverture du problème.* Voici (encadré ci-contre) une proposition…

QUEL EST LE PROBLÈME POSÉ ?

On veut placer trois disques isométriques à l'intérieur du rectangle ABCD comme sur les dessins ci-dessous. La longueur de AD est de 3 cm. B est mobile sur la perpendiculaire en A à (AD).





A l'aide des différents logiciels dont vous disposez, étudiez et comparez l'aire des trois disques et l'aire restante du rectangle (l'aire du rectangle moins l'aire des trois disques).

Rédigez et démontrez vos observations.

Et si les 3 disques n'étaient pas centrés sur la médiatrice de [AB] ?

Et si AD avait une longueur autre que 3 cm ?

Est-ce le même problème ? Présente-t-il les mêmes difficultés ? Quel est le coût d'une plus grande liberté ? Nous laissons au lecteur le soin de réfléchir à ces importantes questions.

Autre énoncé possible, *sans figure*. Il pourrait s'écrire ainsi :

On veut placer trois disques isométriques C_1, C_2, C_3 *à l'intérieur d'un rectangle* ABCD. *La longueur de* AD *est de 3 cm.* B *est mobile sur la perpendiculaire en* A *à* (AD). C_1, C_2, C_3 *sont centrés sur la médiatrice de* [AD]. C_2 *est tangent à* C_1 *et* C_3. C_1 *est tangent à* (AD) *et* C_3 *à* (BC).

A l'aide des différents logiciels dont vous disposez, étudiez et comparez l'aire des trois disques et l'aire restante du rectangle (l'aire du rectangle moins l'aire des trois disques).

Rédigez et démontrez vos observations.

Et si les 3 disques n'étaient pas centrés sur la médiatrice de [AB] ?

Et si AD avait une longueur autre que 3 cm ?

Une difficulté importante est introduite par cette rédaction pour la plupart des élèves. Traduire un texte dense en français courant en figure géométrique ne va pas de soi, en ces temps de faible maîtrise de la langue…

Il serait intéressant de soumettre les trois énoncés à différents groupes d'élèves et d'étudier leur influence (compréhension, durée du décodage, stratégies induites etc.). Il faudrait voir en particulier si, comme nous le suggérons, les deux derniers textes poussent à des constructions plus variées que le premier. Et à des stratégies auxquelles nous n'aurions pas pensé…

Une question jamais soulevée par les utilisateurs mérite attention. Pourquoi *trois* disques ? Et pas un ou quatre ? La seule raison convaincante (du point de vue de l'auteur du texte) est que ce choix conduit habituellement à l'utilisation de la construction de Thalès pour partager un segment. Un partage en deux, quatre ou en une puissance de deux se fait directement avec la commande « milieu » de CABRI. Mais on a vu que la construction de Thalès est évitable par l'usage de symétries centrales et que le problème peut être ramené, dans tous les cas et sans perte de généralité, à un seul disque…

On est d'autant plus interloqué en revenant à la source du problème, la situation 22 de Belin, pages 127 et 128 (situations logicielles sur CABRI-GEOMETRE II.)…

Retour à la source

Voici (encadré ci-contre) le texte de Belin. On est loin d'un problème ouvert ! Le balisage est contraignant. La figure dynamique est fournie : on perd le plaisir de la construction et l'intéressant débat sur l'énoncé n'a plus d'objet. AS est imposé : 6 cm (pourquoi ?). Est-ce qu'il va de soi que f et g sont des *fonctions ?* Quand on déplace B, AB varie, certes, mais aussi les rayons des cercles. Pourquoi la variable est-elle nécessairement AB et pas le rayon d'un des cercles ? Pourquoi limiter la comparaison des aires à la seule question posée ? (le cas où les trois disques occupent plus de la moitié du rectangle). Pourquoi se priver d'autres fonctions « naturelles », différence et quotient ? Pourquoi ne pas exploiter les expressions algébriques de f(x) et g(x) obtenues pour représenter les courbes et comparer les deux approches ?

Pourquoi proposer (situation 21) *le même problème avec… deux disques et le même énoncé, au mot près ?* Seule différence, dans la figure dynamique fournie : la longueur AS n'est pas indiquée ! (elle est de l'ordre de 5 cm). On en trouve une valeur approchée en plaçant B en S et en lisant la valeur affichée de AB. Cette variante (insignifiante…) mérite-t-elle un second énoncé ou s'agit-il de faire du « volume » ? Pourquoi ne pas écrire à peu de frais, des variantes avec 1, 2, 3, 4…,n disques ? Tout cela est consternant.

Voilà comment on transforme une situation à fort potentiel, susceptible de développements remarquables, en un texte d'une pauvreté affligeante, pesamment encadré, destiné sans doute essentiellement à assurer des notes convenables à la plupart des élèves. Certainement pas à leur apprendre la démarche scientifique, à les former et à les faire réfléchir.

On le voit, l'environnement informatique ne présente nullement, à lui seul, une garantie de qualité de l'enseignement des mathématiques. De très remarquables logiciels (CABRI par exemple) peuvent être dramatiquement sous-utilisés, dans une activité corsetée et débarrassée de tout ce qui fait son intérêt! Mais la rencontre d'une situation et d'un logiciel à fort potentiel entraîne parfois des élèves (et leur professeur), dans un climat de liberté et de dialogue, vers des découvertes décisives pour leur formation scientifique. Ils apprennent à imaginer, à regarder, à analyser, à établir des liens, à débattre, à donner des pro-

ÉTUDE DE 3 DISQUES DANS UN RECTANGLE.

1. Définir une variable.

Ouvrir la figure FCT3DIS.FIG.

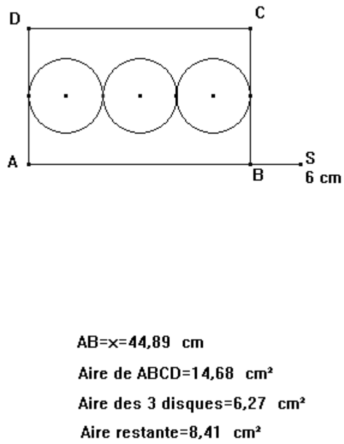


FIGURE DYNAMIQUE FCT3DIS. FIG FOURNIE

ABCD est un rectangle. Le point B appartient au segment [AS]. AD=3 cm.
On veut étudier les variations des aires des disques et de la partie coloriée du rectangle.
On choisit AB comme variable que l'on note x. On désigne par f la fonction qui à x fait correspondre l'aire des 3 disques et par g celle qui fait correspondre à x l'aire non coloriée du rectangle ABCD .
Déplacer B pour observer les éléments mobiles et les éléments fixes de la figure.

2. Représenter graphiquement les fonctions associées aux aires.

Sur quels intervalles les fonctions f et g sont-elles définies.
Construire les points F(x,f(x)) et G(x,g(x)) (utiliser l'outil « report de mesure »).
Représenter graphiquement les deux fonctions f et g (utiliser l'outil « lieu »).

3. Comparer graphiquement les aires.

Pour quelles valeurs de x les trois disques occupent-ils plus de la moitié du rectangle ? (déplacer le point B et lire les valeurs recherchées sur le graphique)

4. Résoudre algébriquement le problème.

Exprimer f(x) et g(x) en fonction de x.
Résoudre, par le calcul, l'inéquation correspondant à la partie 3.
Comparer les valeurs avec les valeurs approchées obtenues à la partie 3.

longements au problème, à le formuler autrement. La curiosité aiguisée, les voilà qui tentent de comprendre, donc de démontrer. L'environnement informatique donne alors sa pleine mesure et transforme profondément l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Les voici revitalisés, ré-enchantés, redevenus passionnants.

BIBLIOGRAPHIE.

1. L'environnement Cabri-Géomètre, outil de médiation sémiotique pour la notion de graphe d'une fonction. Rossana Falcade. Petit'x n° 58 . p.47-81. 2002.

2. Un milieu graphique pour l'apprentissage de la notion de fonction au lycée. Isabelle Bloch. Petit'x n° 59. p. 25-46. 2002.

3. Systèmes sémiotiques de représentation liés au concept de fonction. Hitt-Espinosa Fernando. Annales de didactique et de sciences cognitives. Volume 6. p. 7-26.1998.

4. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Raymond Duval. Annales de didactique et de sciences cognitives. Volume 5. p. 37-65. 1991.

5. Graphiques et équations : l'articulation de deux registres. Raymond Duval. Annales de didactique et de sciences cognitives. Volume 1. p. 235-253. 1988.