ISOMETRIES ET PAVAGES

Groupe Géométrie
Irem de Montpellier

Dans l'enseignement, l'étude des transformations du plan peut se faire suivant deux approches : une approche ponctuelle, où sont travaillés les algorithmes de construction de figures et une approche globale, où sont étudiés les effets de ces transformations sur des figures. Dans cet article, nous nous intéressons au second aspect en étudiant les isométries du plan sur des pavages.

En classe de troisième au collège, l'élève achève l'étude des isométries par la rotation ; des activités sur des pavages sont un terrain propice à un réinvestissement de toutes ses connaissances sur les quatre isométries du plan. Les pavages peuvent aussi faire l'objet de riches activités au collège comme la recherche du motif minimum qui engendre le pavage ou bien l'analyse des isométries qui permettent de construire le pavage à partir d'un motif, mais nous ne développerons pas ici ces deux types de problèmes.

Cet article présente quelques réflexions théoriques sur les pavages du plan et leurs motifs ; suivies d'activités pour les élèves, extraites d'une brochure [5] de l'IREM de Montpellier sur les transformations.

QUELQUES REFLEXIONS SUR LES PAVAGES

D'une façon générale, paver le plan, c'est le recouvrir complètement sans chevauchement.

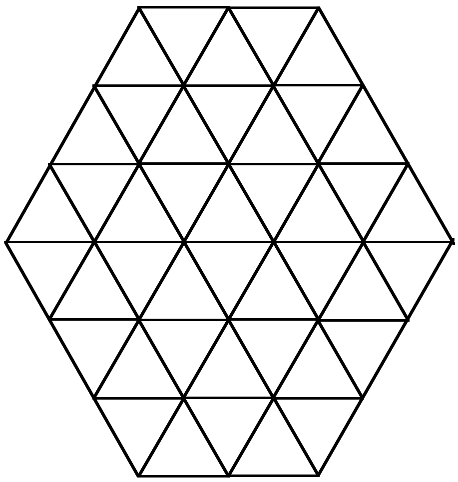
Dans l'étude des transformations, il est intéressant de considérer les pavages du plan par des polygones réguliers. On utilise des pavages respectant deux conditions :

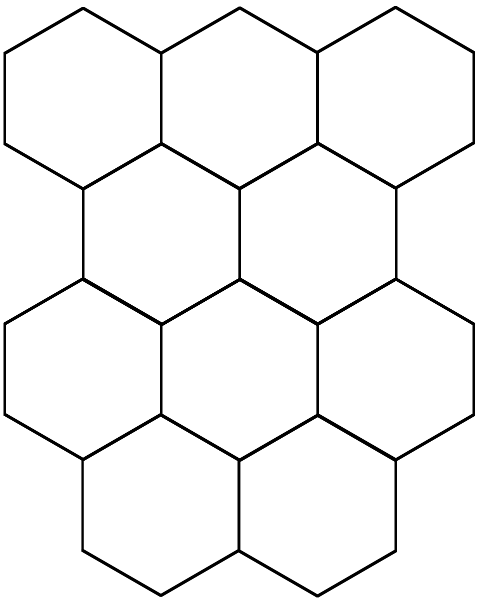
— un sommet d'un polygone n'est en contact qu'avec des sommets d'autres polygones.

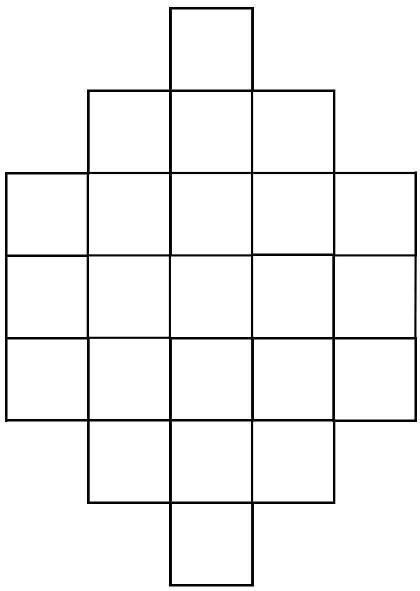
— on retrouve la même configuration autour de chaque sommet.

Sous ces conditions, on démontre qu'on ne peut réaliser que trois types de pavages utilisant un seul polygone régulier et huit types de pavages utilisant plusieurs polygones réguliers ; ces pavages sont dits réguliers et semi-réguliers.

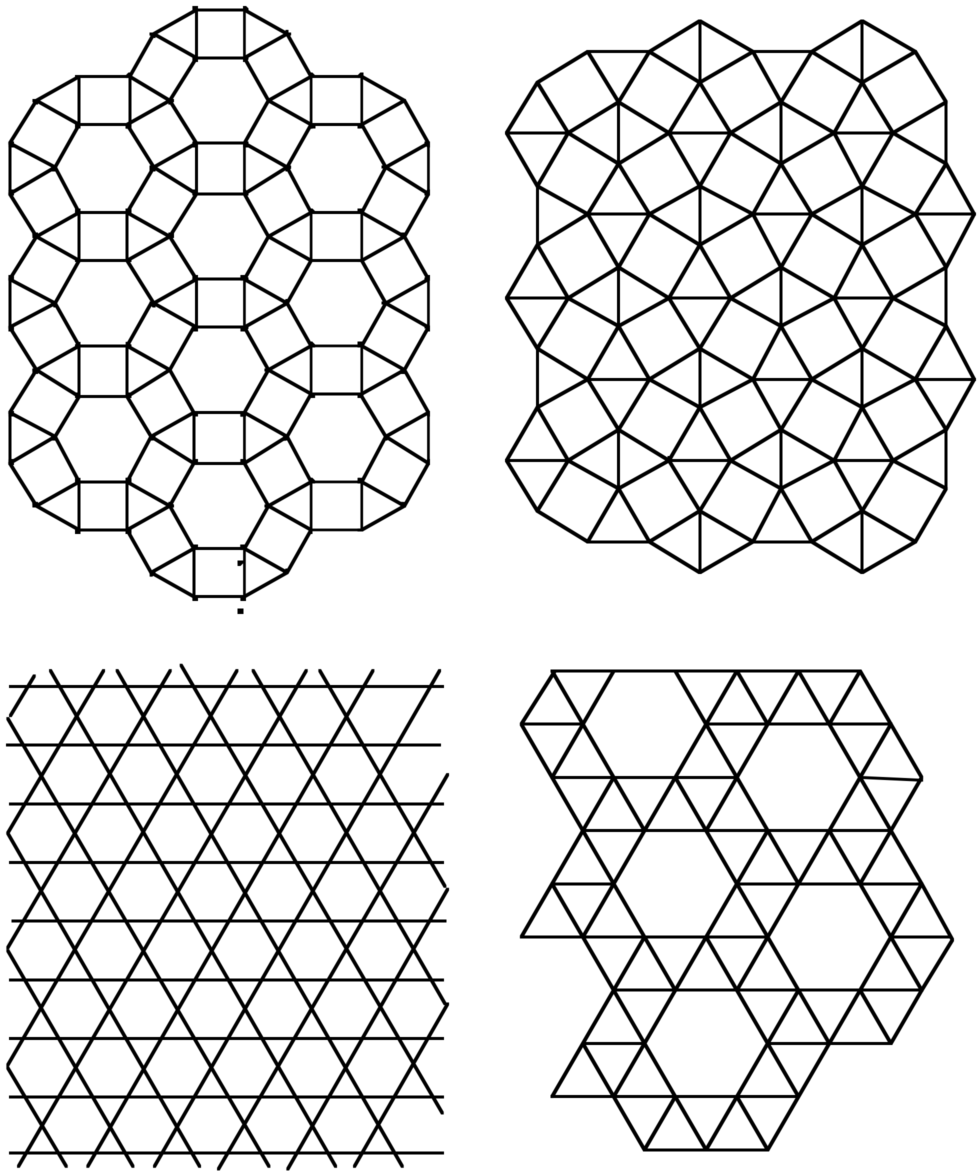
Voici, les trois pavages réguliers :



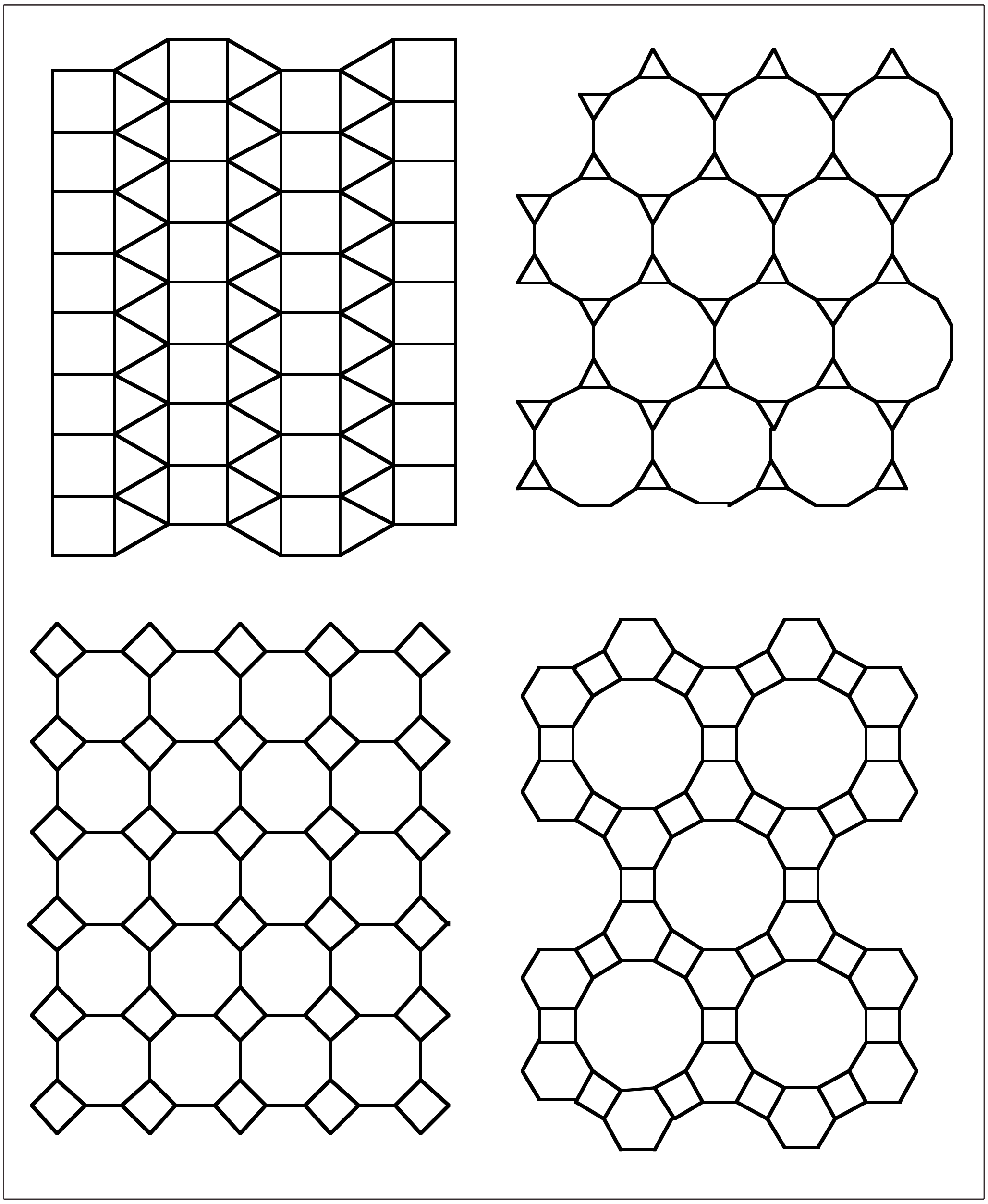




Quatre des huit pavages semi-réguliers…

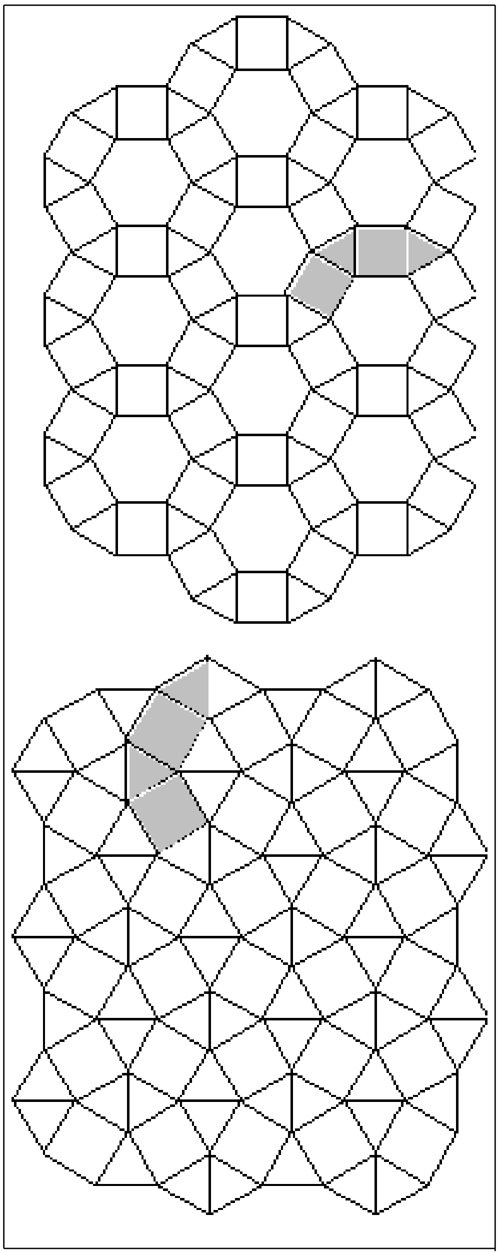


… les quatre derniers pavages semi-réguliers.



Ces pavages possèdent la propriété d'être invariants par deux translations, dont les vecteurs ont deux directions différentes ; on peut remarquer que de nombreux pavages qui possèdent cette propriété ne sont pas réguliers ni semi-réguliers.

L'intérêt des pavages de ces deux types dans l'étude des transformations est qu'ils permettent de mettre en évidence les isométries sur des figures familières : carrés, triangles,...



POURQUOI TRAVAILLER SUR DES PAVAGES ?

De par leurs propriétés de répétition, les pavages constituent une structure du plan que nous pouvons utiliser comme cadre de travail sur les isométries ; pour cela, nous sommes amenés à considérer dans le pavage un motif, c'est-à-dire un polygone formé par la réunion de plusieurs polygones réguliers adjacents, que nous pourrons retrouver sur le pavage.

Pour être pédagogiquement efficace, il nous semble important que le motif remplisse deux conditions :

— être ni trop simple, ni trop compliqué.

— ne pas présenter de centre ou d'axe de symétrie.

Ces conditions nous ont amenés à utiliser deux pavages semi-réguliers dont les dessins et les motifs sont donnés ci-contre.

Ces pavages présentent un avantage majeur par rapport à un travail sur papier blanc, à savoir que la figure image par la transformation n'est pas tracée, mais les segments constituant cette figure le sont, et de plus par rapport à d'autres types de pavages la régularité de ces pavages garantit l'isométrie. L'élève n'a pas de nouveau tracé à réaliser, il lui suffit de découvrir sur le dessin les sommets et les côtés qui vont lui donner l'image cherchée.

La recherche et la mise en évidence d'une transformation associant deux figures isométriques, est l'occasion d'insister sur la caractérisation de cette isométrie : axe, centre de symétrie, vecteur de la translation, centre et angle de la rotation.

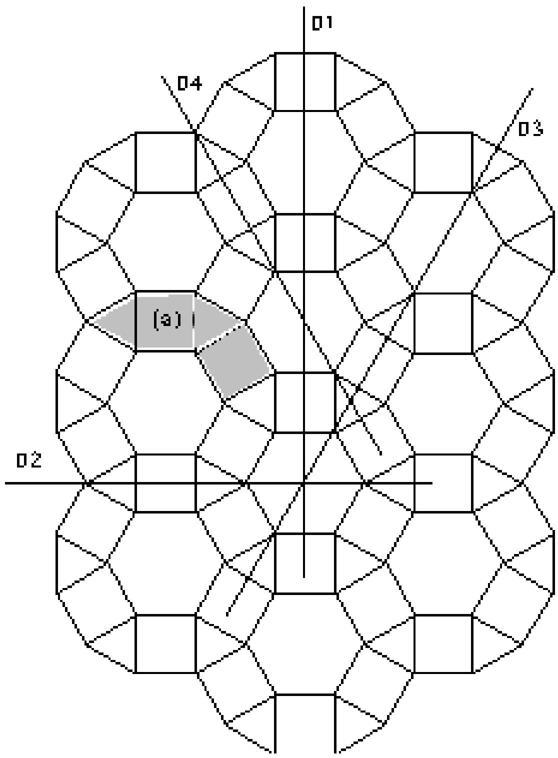
Le fait que l'image d'un motif soit contenue dans le pavage facilite la mise en œuvre de successions d'isométries et permet l'introduction des compositions d'isométries. L'élève peut suivre les différentes étapes avant d'aboutir à l'image finale.

DEUX TYPES D'ACTIVITES

Nous proposons deux types d'activités, après avoir expliqué aux élèves ce qu'est un pavage et un motif dans un pavage.

FICHE TYPE I : RECHERCHE DE FIGURES

On considère un pavage et un motif dans ce pavage ; l'activité consiste à mettre en évidence dans le pavage les transformés du motif par des isométries, et à justifier.



Il est à remarquer que ces activités ne se limitent pas à la mise en évidence de figures ou de transformations, mais trouvent leur intérêt dans les justifications fournies par les élèves.

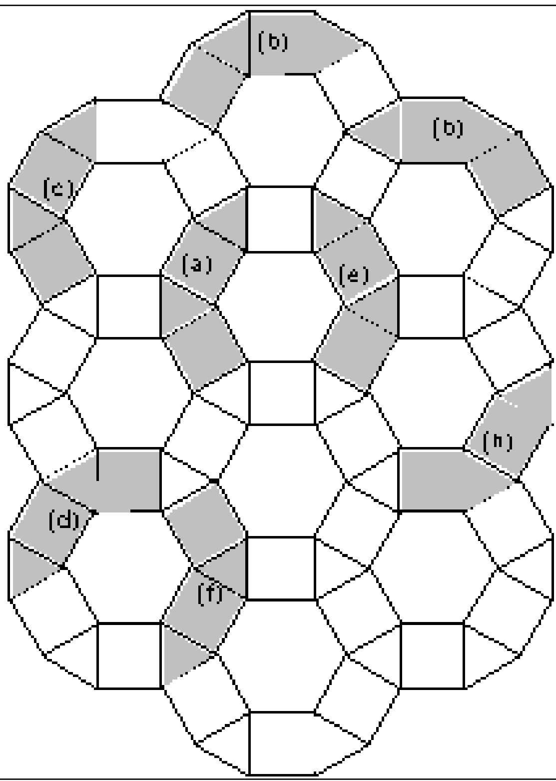
CONCLUSION

Les activités proposées dans cet article utilisent le fait que les pavages structurent le plan d'un maillage très précis qui permet, avec un minimum de constructions usuelles, d'associer par des isométries ou des compositions d'isométries des polygones choisis comme motifs.

Dans ces activités, les constructions de base des isométries disparaissent au profit d'un guidage visuel très précis. L'élève peut s'exprimer sur les transformations dans un cadre expérimental, ce qui n'exclut pas le recours éventuel aux algorithmes de définition des transformations et aux instruments.

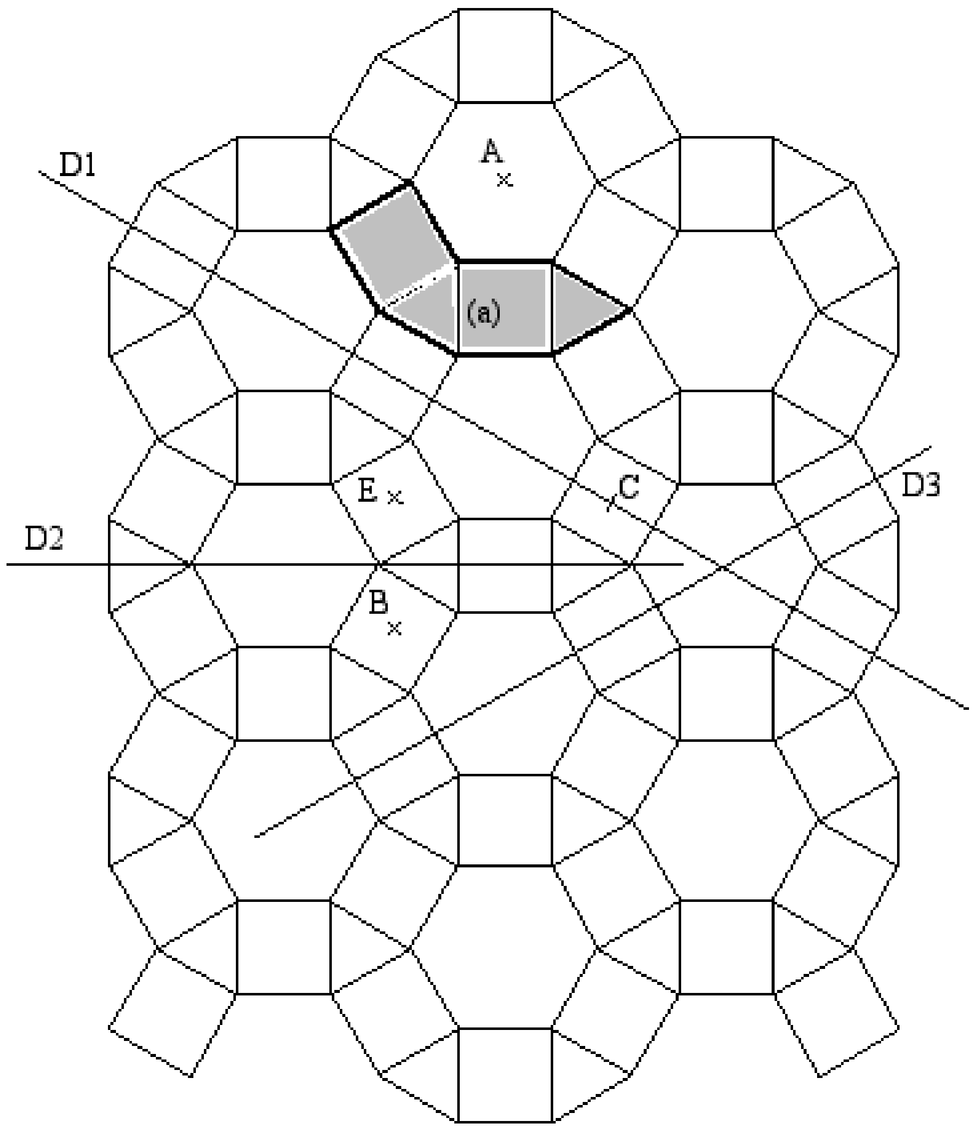
FICHE TYPE II : RECHERCHE DE TRANSFORMATIONS

On considère un pavage et plusieurs motifs isométriques ; l'activité consiste à trouver l'isométrie ou les compositions d'isométries qui associent ces motifs.



ACTIVITÉ 1 : Colorier la figure transformée de la figure (a) par la symétrie par rapport :

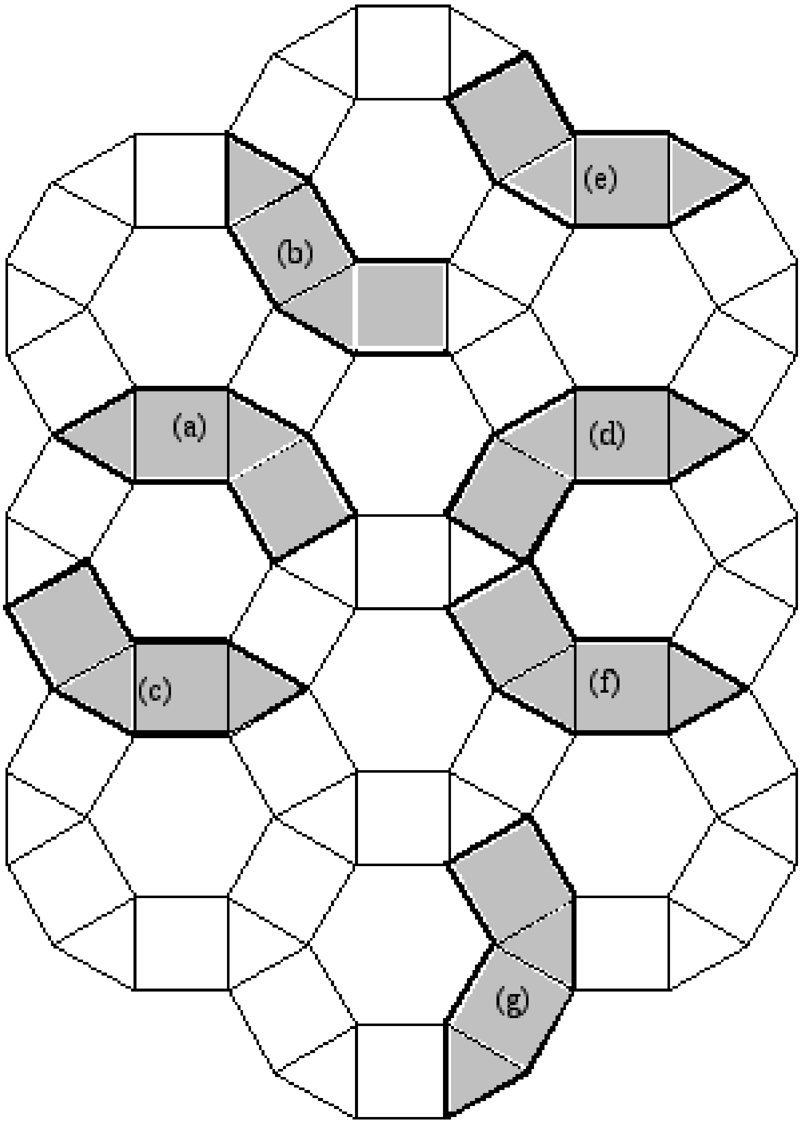
1°) À la droite D1 ; on la notera (b).
2°) À la droite D2 ; on la notera (c).
3°) À la droite D3 ; on la notera (d).
4°) Au point A ; on la notera (e).
5°) Au point B ; on la notera (f).
6°) Au point C ; on la notera (g).
7°) Au point E ; on la notera (h).



ACTIVITÉ 2 : Par quelle symétrie passe-t-on :

de la figure(a) à la figure (b) ?
de (a) à (c) ?
de (a) à (d) ?
de (a) à (e) ?
de (a) à (f) ?
de (a) à (g) ?

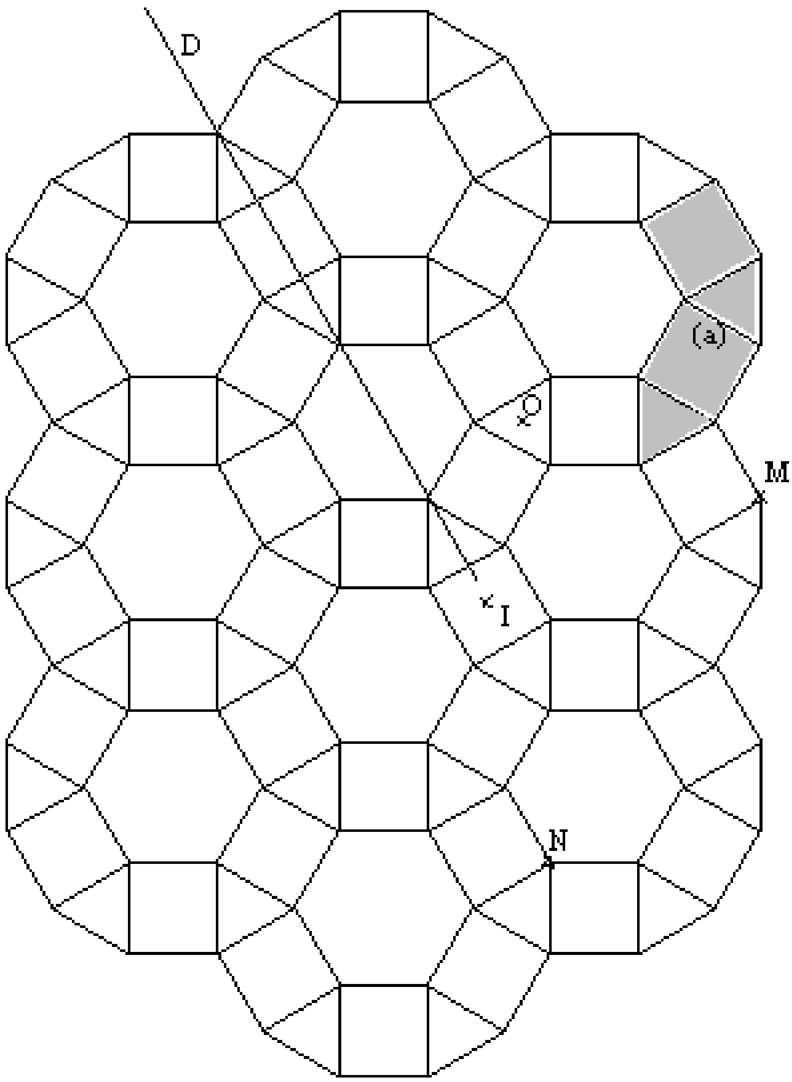
On tracera et on nommera dans chaque cas l'axe ou le centre de la symétrie.



ACTIVITÉ 3 : Mettre en évidence en utilisant des couleurs différentes :

1°) L'image (b) de la figure (a) par la symétrie de centre I.
2°) L'image (c) de la figure (a) par la symétrie d'axe D.
3°) L'image (d) de la figure (a) par la rotation de centre O et d'angle 120° de sens direct.

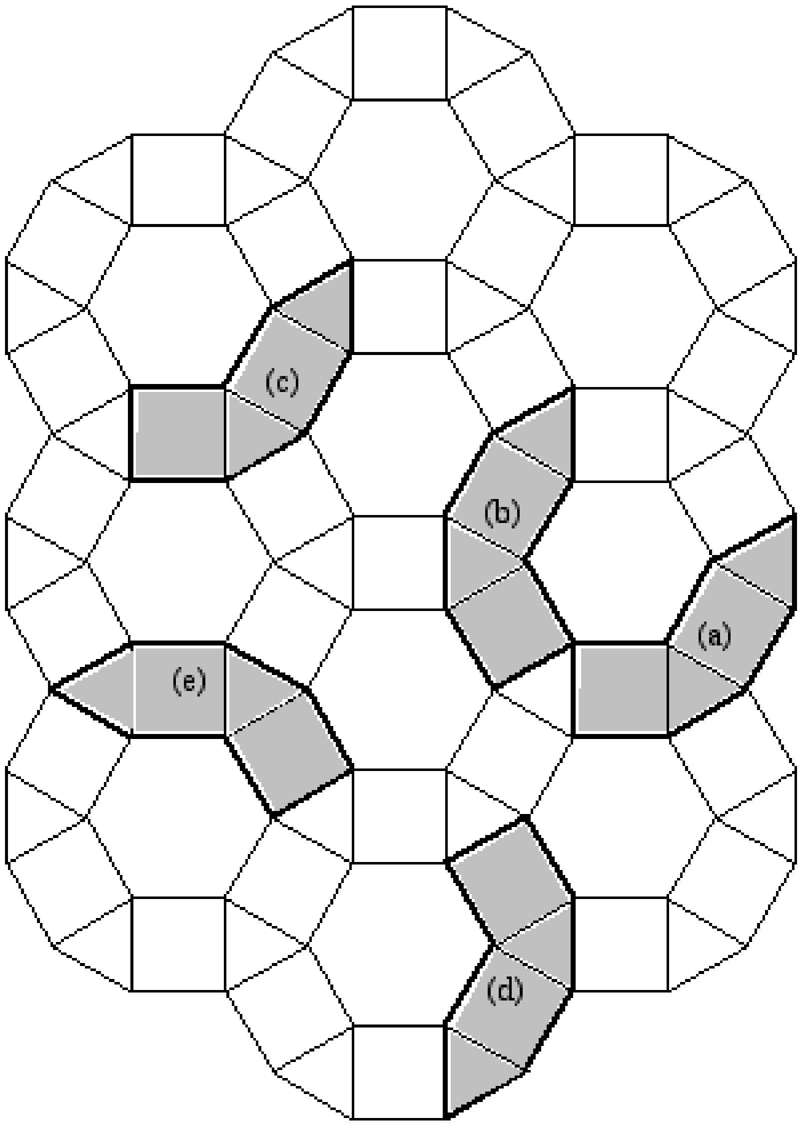
4°) L'image (e) de la figure (a) par la translation de vecteur $\overrightarrow{MN}$.



ACTIVITÉ 4 : Par quelle transformation géométrique étudiée précédemment peut-on passer :

1°) De la figure (b) à la figure (a) ?
2°) De la figure (b) à la figure (d) ?
3°) De la figure (a) à la figure (c) ?
4°) De la figure (a) à la figure (e) ?

Tracer et nommer les éléments qui les caractérisent.



ACTIVITÉ 5 : Mettre en évidence en utilisant des couleurs différentes :

1°) L'image du motif (a) par la symétrie de centre D et marquer (b) sur le dessin obtenu.

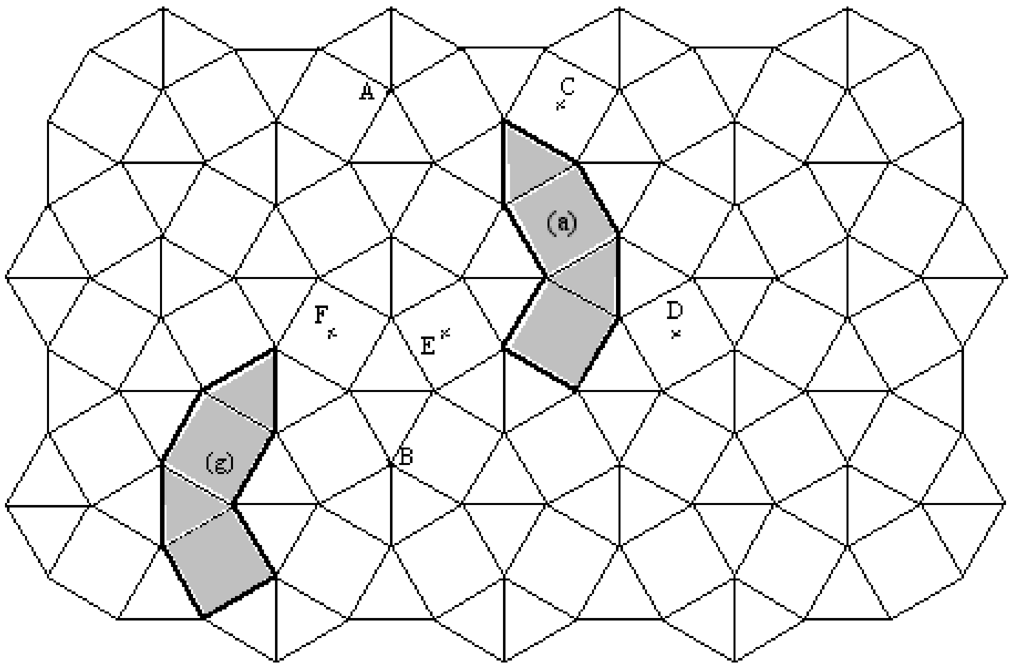
2°) Le motif (c) symétrique de (a) par rapport à la droite (AB).

3°) L'image (d) de la figure (a) par la rotation de centre C et d'angle 90° de sens direct.

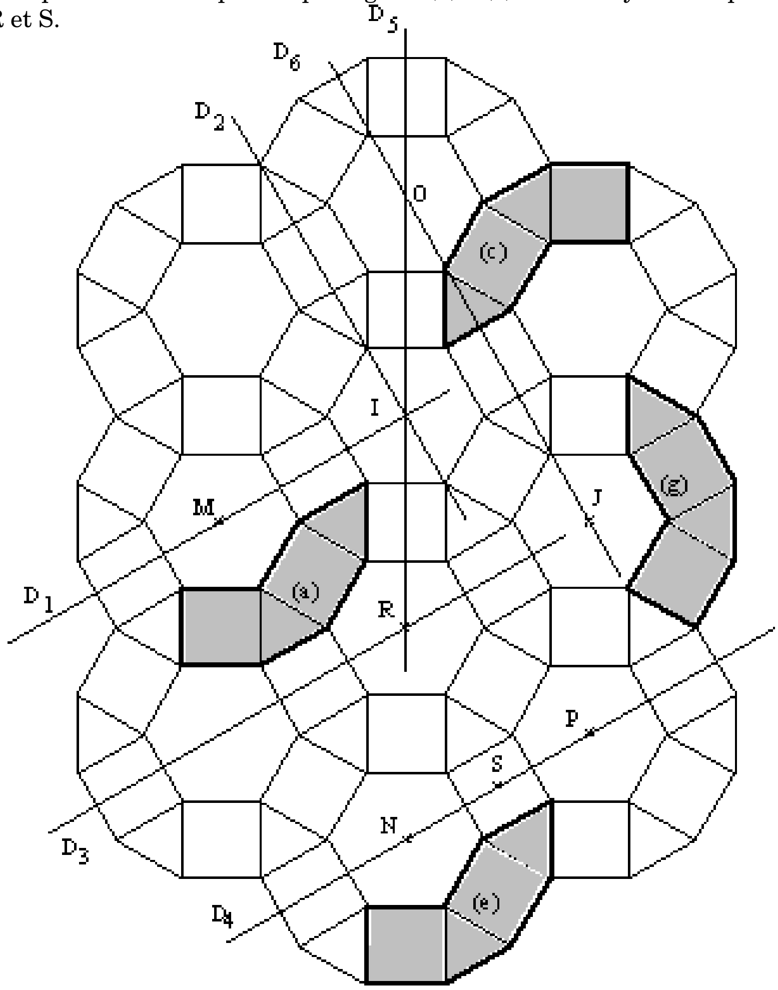
4°) Le translaté (e) de (a) par la translation de vecteur $\overrightarrow{CF}$

5°) L'image (f) de (a) par la rotation de centre E et d'angle 90° de sens indirect.

Peut-on passer de (a) à (g) par une des quatre transformations étudiées en classe ? Sinon, trouver une succession de deux transformations amenant (a) sur (g).



ACTIVITÉ 6 : On considère le motif (a) formé de deux carrés et de deux triangles équilatéraux. 1°) Par quelle transformation passe-t-on de (a) à (c) ? Mettre en évidence le symétrique (b) de (a) par rapport à D_1, puis le symétrique de (b) par rapport à D_2. Que remarquez-vous ? Justifiez ce résultat.
2°) Par quelle transformation passe-t-on de (a) à (e) ? Mettre en évidence le symétrique (d) de (a) par rapport à D_3 puis le symétrique de (d) par rapport à D_4. Que remarquez-vous ? Justifiez ce résultat.
3°) Mêmes questions pour le passage de (a) à (g) avec les symétries par rapport aux droites D_5 et D_6.
4°) Mêmes questions enfin pour le passage de (a) à (e) avec les symétries par rapport aux points R et S.



ACTIVITÉ 7 : Dans le pavage fourni, qui n'est pas semi-régulier, tous les petits triangles sont isocèles et superposables ; avec trois de ces triangles, on a fabriqué le motif (a).

1°) Mettre en évidence en utilisant des couleurs différentes :

— l'image (b) de la figure (a) dans la symétrie par rapport à la droite (AB).

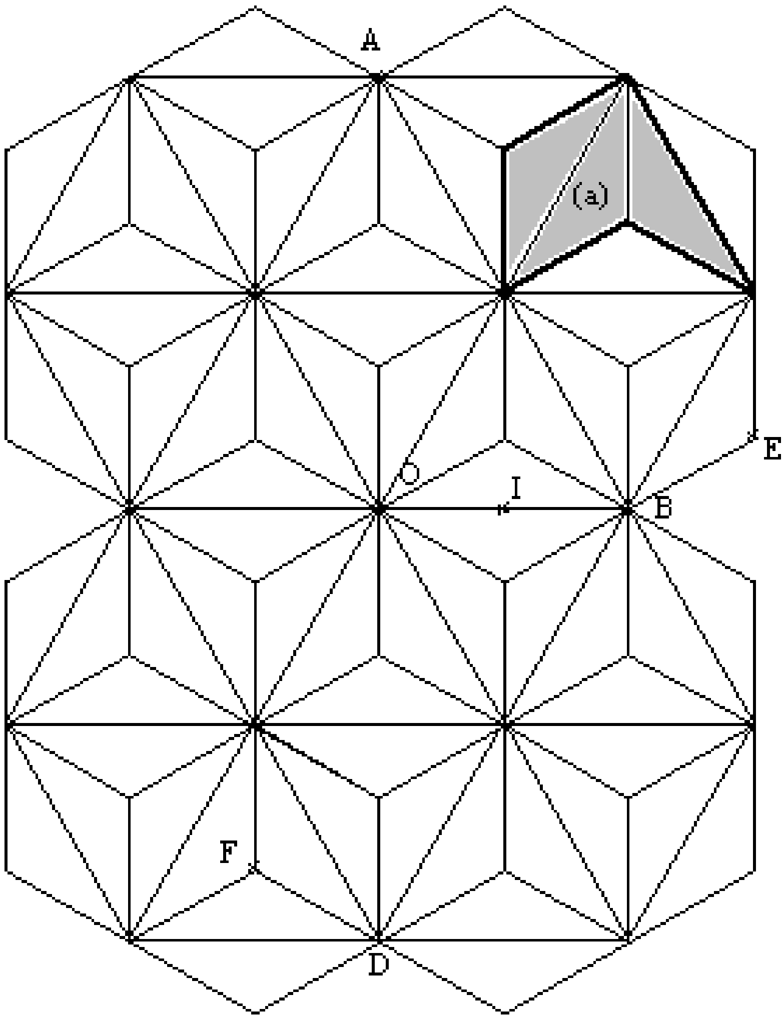
— l'image (c) de la figure (a) par la symétrie de centre I.

— l'image (d) de la figure (a) par la rotation de centre O et d'angle 60° de sens direct.

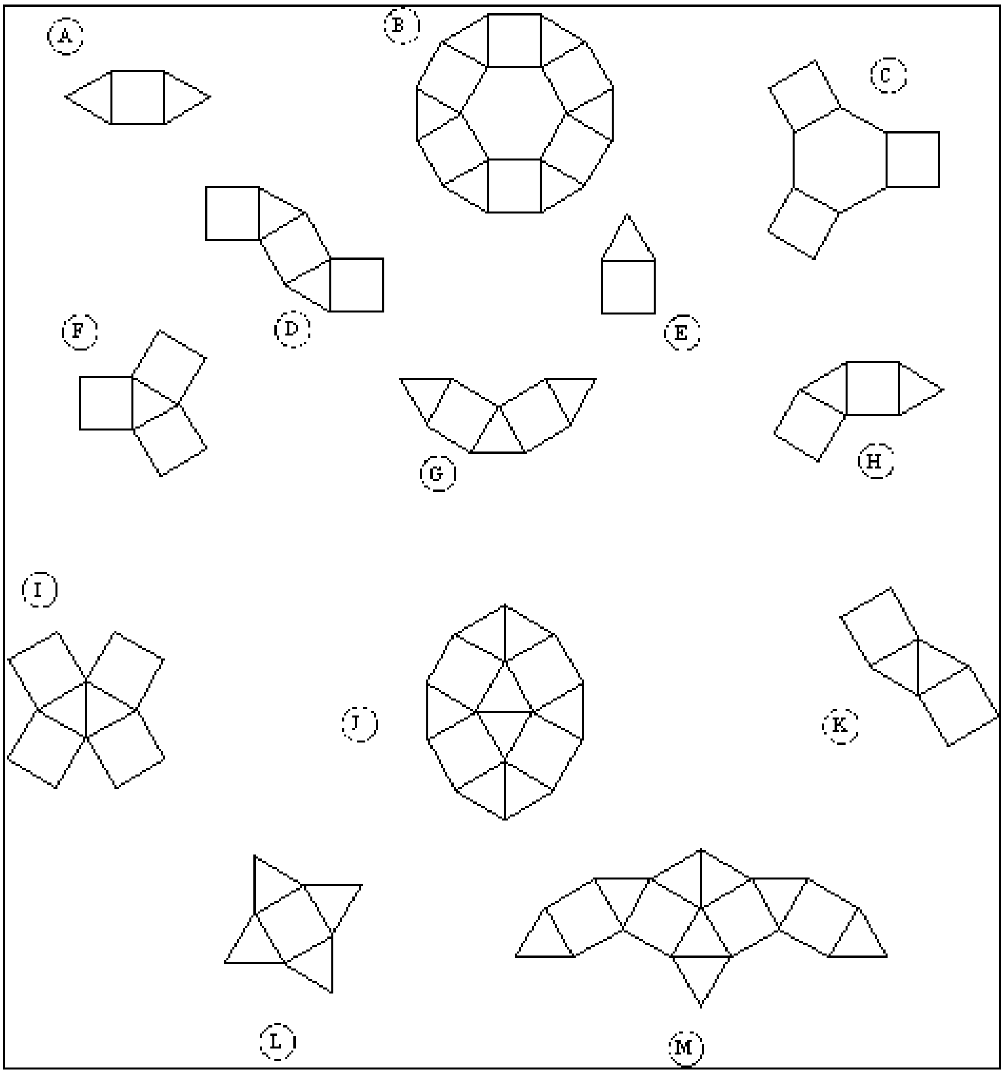
— l'image (e) de la figure (a) par la translation de vecteur $\overrightarrow{EF}$.

— l'image (f) de la figure (a) par la rotation de centre O et d'angle 120° de sens indirect.

2°) Expliquer pourquoi on peut passer directement de (d) à (f) par la symétrie de centre O.



ACTIVITÉ 8 ; Tracer en couleur, lorsqu'ils existent, le ou les axes de symétrie des figures suivantes, puis, à côté de chacune d'elles, écrire le nombre de ces axes, enfin lorsqu'il y en a un, noter par un gros point d'une autre couleur le centre de symétrie.



Bibliographie :

[1] BROSSARD (1977) Yvon, Rosaces, frises et pavages, Volumes 1 et 2, CEDIC

[2] CUNDY H. M., ROLLET A. P.(1978) Modèles mathématiques, CEDIC

[3] COLLONGE M. P., TREHARD F. (1978) Mosaïques et isométries, CEDIC

[4] ERNST B. (1986) Le miroir magique de M. C. Escher, TACO

[5] Groupe GEOMETRIE de l'IREM de Montpellier (1999) Enseigner les transformations, publication IREM USTL place E. Bataillon Montpellier.