EQUATIONS DIFFERENTIELLES : LA PERTE DU SENS N'EST PAS SANS RISQUE

Gérard KUNTZ
Irem de Strasbourg

De réduction de programme en réduction de programme, le chapitre « équations différentielles » de Terminale scientifique a été ramené à sa plus simple expression. En fait, le chapitre a disparu en tant que tel et les deux équations différentielles qui restent au programme sont mentionnées dans le chapitre « fonctions usuelles » ! Comme chacun sait, l'équation $y' = ay$ est un aspect de la fonction exponentielle et $y'' + \omega^2 y = 0$ un reflet des fonctions circulaires !

Les livres scolaires [1] ont emboîté le pas à cette joyeuse rigolade. Fractale [2] par exemple sort du chapeau l'équation différentielle : $y'' + \omega^2 y = 0$ dans le paragraphe « dérivées successives ». L'élève de Terminale a droit à une phrase unique et définitive :

Résoudre sur **R** *l'équation différentielle* $y'' + \omega^2 y = 0$ *, c'est déterminer toutes les fonctions* f, *deux fois dérivables sur* **R** *telles que, pour tout nombre* x *de* **R** : $f''(x)+ \omega^2 f(x)=0$.

Aucune explication sur la raison d'être du problème : pourquoi traite-t-on une telle question ? D'où provient le problème ? A quoi sert cette résolution ? Pas un mot sur la radicale nouveauté qui consiste à prendre une fonction comme inconnue d'une équation.

Fractale considère l'équation différentielle $y' = ay$ en fin du chapitre consacré à l'exponentielle, après sa dérivée et ses primitives. Il ne manque pas d'humour : « Dans le chapitre 2, vous avez étudié l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ » ! On est à la page 122, le chapitre 2 se trouve page 35. L'élève de Terminale S n'est pas vraiment frappé par l'unité

1 Il s'agit des ouvrages en vigueur durant l'année scolaire 2000-2001, où l'article a été rédigé.
2 Editions Bordas.

de la question, éclatée en deux parties fort éloignées dans le livre, sans aucune justification et sans la moindre tentative de montrer l'intérêt, la nouveauté et la profondeur de la démarche. Pas vraiment contrariant et surtout préoccupé de réussite, l'élève de Terminale S conclut qu'il n'y a rien à comprendre et qu'il suffit (une fois encore) d'apprendre les solutions pour les « recracher » à l'examen. Il baille, mais il sait faire ! Et pourtant, il n'est pas bien difficile de donner à cette courte partie du programme l'éclairage qui lui donne sens et intérêt.

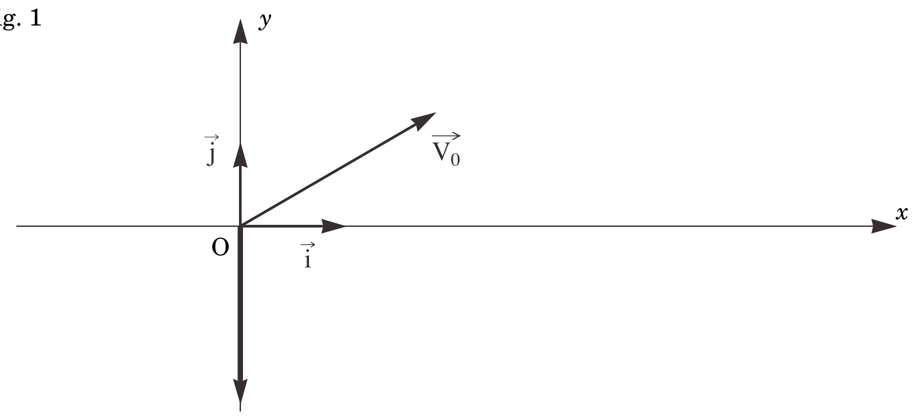
Expliquer l'origine et la nature du problème au moyen d'exemples connus des élèves.

Les élèves de Terminale connaissent le principe fondamental de la dynamique. Ils ont fait de l'électricité. Voilà deux domaines qui génèrent naturellement de très nombreuses équations différentielles. Il faut savoir « perdre » deux heures (ou davantage) à traiter quelques problèmes introductifs qui vont montrer la radicale nouveauté, l'unité et la puissance de la démarche.

a) Mouvement d'un point matériel dans un champ de gravitation.

Un point matériel est soumis à la seule pesanteur. Il part à l'instant O de l'origine du repère avec une vitesse faisant avec l'axe des abscisses un angle orienté (figure 1). Les élèves savent exprimer les vecteurs vitesse et accélération. En projetant l'équation sur les deux axes, ils obtiennent les relations suivantes : $x''(t) = 0$; $y''(t) = -g$, avec des notations habituelles. Ces relations sont d'un type totalement nouveau. Les fonctions $x(t)$ et $y(t)$, coordonnées de M en fonction du temps sont inconnues (ce sont elles qu'ont aimerait déterminer). Mais leurs dérivées seconde obéissent aux relations que l'on vient d'écrire et qui permettent sans difficulté, avec les seules connaissances des élèves de Terminale (les primitives), de remonter aux fonctions elles-mêmes :

Fig. 1



$x'(t) = \text{constante} = V_0 \cos(\alpha)$;
$y'(t) = - gt + \sin(\alpha)$

et

$x(t) = (V_0 \cos(\alpha))t$;
$y(t) = - (1/2)gt^2 + (V_0 \sin(\alpha))t$.

Pour calculer la valeur des constantes qui figurent dans les primitives, les conditions initiales (vitesse et position initiales) sont déterminantes : on fait comprendre à l'élève que, parmi tous les mouvements possibles, un seul correspond aux conditions réelles du problème, ce qui rejoint l'intuition qu'il en a. On peut alors achever l'exercice (de faible difficulté technique) en établissant que la trajectoire du point est parabolique :

$$y = \frac{- gx^2}{2V_0^2 \cos^2(\alpha)} + x.\tan(\alpha) .$$

Il n'est pas interdit de faire remarquer que le même traitement s'applique au mouvement d'un électron dans un champ électrostatique uniforme et constant.

Pour la première fois, l'élève rencontre des relations portant sur des dérivées de *fonctions inconnues*. Ces relations expriment des *invariants mathématiques* du mouvement. Elles permettent de déterminer une famille de fonctions correspondant à ces invariants, puis par les conditions initiales, les fonctions (uniques) qui décrivent le mouvement.

On peut alors rechercher une description plus réaliste du problème, en introduisant une résistance de l'air, proportionnelle à la vitesse. Les relations précédentes deviennent :

$$m \overrightarrow{\gamma(t)} = - m \vec{g} - k \overrightarrow{v(t)}$$

d'où : $\overrightarrow{\gamma(t)} + \frac{k}{m} \overrightarrow{v(t)} = - \vec{g}$.

En projection sur les deux axes on obtient :

$$x''(t) + \frac{k}{m} x'(t) = 0 \ ;$$

$$y''(t) + \frac{k}{m} y'(t) = - g \quad (k \text{ réel positif}).$$

D'où en passant aux primitives et en tenant compte des conditions initiales :

$$x'(t) + \frac{k}{m} x(t) = V_0 \cos(\alpha) \ ;$$

$$y'(t) + \frac{k}{m} y(t) = - gt + V_0 \sin(\alpha) .$$

On obtient des relations entre des fonctions inconnues ($x(t)$ et $y(t)$) et leur dérivée première. Ces relations expriment les invariants mathématiques du mouvement : une certaine expression contenant les fonctions inconnues (et bien sûr variables), leur dérivée première (également variable au fil du temps) et diverses fonctions connues reste, au cours du temps, *constamment nulle* !!!

Je me souviens de mon éblouissement, quand je découvris cela au cours de mes études : je venais de comprendre ce qu'est une équation différentielle. J'étais prêt à entrer dans les diverses techniques de résolution et à me servir du précieux outil pour faire apparaître des invariants dans le monde mouvant de la physique. Un grand merci à l'enseignant qui prit la peine de m'éclairer.

Les relations obtenues ci-dessus résistent au traitement par les seules primitives. Il faut quelques méthodes nouvelles pour les résoudre. Cela justifie le bref cours sur le sujet. Et, cerise sur le gâteau, on pourra revenir ensuite à ces équations pour les résoudre entièrement (avec un léger complément sur les équations à second membre, traité en TP) et pour mettre en évidence (grâce aux courbes paramétrées) la trajectoire asymptotique du point soumis à la résistance de l'air[3]. On trouve en effet :

$$x(t) = \frac{mV_0\cos(\alpha)}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

et $$y(t) = \frac{m}{k}\left(V_0\sin(\alpha) + \frac{mg}{k}\right)\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) - \frac{mg}{k}t.$$

Donc : quand t tend vers plus l'infini, $x(t)$ a une limite finie alors que $y(t)$ tend vers moins l'infini. L'équation de l'asymptote est :

$$x = \frac{mV_0\cos(\alpha)}{k}.$$

b) Oscillations électriques et mécaniques.

Il reste à enfoncer le clou en puisant dans un autre chapitre de la physique pour montrer aux élèves que l'outil ainsi forgé est efficace dans champs très divers où on l'applique. L'oscillateur harmonique fournit un bel exemple.

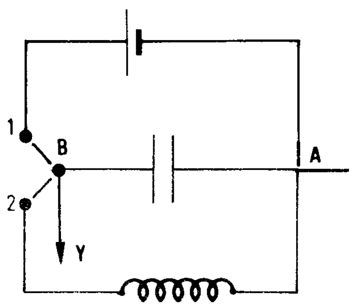


Figure 2[4]

Un circuit comporte un condensateur de capacité C, initialement chargé[5] et une bobine d'auto-inductance L et de résistance R. Le condensateur se décharge dans la bobine.

Un courant d'intensité croissante circule dans le circuit et crée une force électromotrice d'auto-induction. Quand la charge du condensateur est nulle, un courant induit charge le condensateur en sens inverse puis se décharge à nouveau et ainsi de suite.

Soit $q(t)$ la charge du condensateur à l'instant t. A chaque instant, la tension aux bornes A et B de la bobine est égale à la tension aux bornes du condensateur. Soit $i(t)$ l'intensité du courant dans le circuit et $e(t)$ la force électromotrice d'induction. On a les relations suivantes (que l'on trouve dans les ouvrages de Terminale) :

$$i(t) = q'(t)\ ;$$

$$V_B - V_A = \frac{q(t)}{C}\ ;$$

$$V_A - V_B = Ri(t) - e(t)\ ;$$

$$e(t) = -Li'(t)$$

Donc, par substitution :

$$e(t) = -Lq''(t)\ ;\ Ri(t) - e(t) = Rq'(t) + Lq''(t)$$

Puis :

$$Rq'(t) + Lq''(t) = -\frac{q(t)}{C}$$

donc finalement :

$$q''(t) + \frac{R}{L}q'(t) + \frac{1}{LC}q(t) = 0\ .$$

Dans le cas particulier où R est négligeable, on obtient une relation plus simple :

$q''(t) + \dfrac{1}{LC}q(t) = 0$, que le cours à venir permettra de débrouiller.

3 C'est encore vrai, a fortiori, avec une résistance de l'air proportionnelle au carré de la vitesse.

4 On retrouve les symboles du générateur, de la capacité et de la bobine d'auto-inductance, de haut en bas.

5 La charge du condensateur se fait par le circuit du haut, le circuit de charge (commutateur en position 1). Le commutateur est ensuite mis en position 2. Le circuite du bas est le circuit oscillant.

Il est particulièrement éclairant de comparer cette relation (entre des grandeurs électriques) avec celle obtenue (facilement) en mécanique avec le pendule de torsion ou en faisant osciller une masse au bout d'un ressort (en s'écartant légèrement de la position d'équilibre). La similitude des relations étonne les élèves les plus blasés !

Il ne reste plus alors qu'à donner un nom aux choses et à traiter explicitement les deux cas particuliers qui sont au programme.

c) Une approche interdisciplinaire de la méthode d'Euler en Terminale.

Il arrive parfois, au cours de l'année, que des activités croisées avec la physique permettent d'approfondir la compréhension des élèves au sujet des équations différentielles. Ce fut le cas quand le collègue de physique fit analyser à notre classe commune le comportement d'un modèle d'oscillateur non linéaire [6] et tracer à l'ordinateur les courbes intégrales de l'équation de Van Der Pol :

$$x''(t) - \varepsilon(1 - x^2(t))x'(t) + x(t) = 0$$

(ε est une constante réelle).

Voici la manière dont le texte remis aux élèves (extrait de l'ouvrage de Physique de Terminale S, Nathan, pages 289 et 290) proposait de résoudre le problème : elle est très instructive sur les différences d'approches entre les enseignants des deux disciplines. Elle montre la nécessité de présenter aux élèves les deux approches et de les confronter. Elle donne à la notion d'approximation un éclairage intéressant. (voir encadré de la page suivante)

Les élèves ne s'étaient intéressés qu'à la partie algorithmique de la démarche [7], afin de pouvoir tracer rapidement sur leur calculatrice la courbe annoncée ! Ils avaient complètement fait l'impasse sur la démarche justifiant le programme qu'ils cherchaient à écrire. Il est vrai qu'elle n'est pas simple.

En reprenant avec eux le déroulement du texte, il a été possible de retrouver quelques repères.

La confusion insistante entre dérivée et taux d'accroissement a été soulignée et expliquée : le physicien confond systématiquement la valeur exacte et une bonne approximation de ses expressions. Ce fut l'occasion d'un utile retour sur les débuts de la notion de dérivée et sur le caractère négligeable du terme $h\alpha(h)$ de sa seconde définition. Le physicien le traduit en lui donnant la valeur 0 !

Les relations (3) permettent de calculer une valeur approchée de $x(t)$ et $v(t)$ à l'instant $(n + 1)\delta t$ en fonction d'une valeur approchée de $x(t)$ et $v(t)$ à l'instant $n\delta t$. Elles permettent de passer d'une position approchée, M_n , d'un point de la courbe à l'instant $n\delta t$, à une position approchée M_{n+1} du point de la courbe à l'instant $(n + 1)\delta t$. Cela nécessite la connaissance d'une valeur approchée du coefficient directeur de la tangente en M à l'instant $n\delta t$ et permet le calcul d'une valeur approchée de

6 La fonction x(t) peut représenter aussi bien une abscisse, une charge électrique, ou l'intensité d'un courant suivant le type d'oscillateur étudié. Le modèle proposé aux élèves était un circuit RLC entretenu par un montage à charge négative (voir l'ouvrage cité, page 260).

7 Cet exemple illustre la tendance des élèves à «faire» plutôt qu'à comprendre. Sont-ils seuls responsables de cette tendance ? Comprendre nécessite du temps, beaucoup de temps. Il est difficile d'approfondir quand les programmes sont très chargés et qu'une notion chasse l'autre, à peine entrevue.

Résolution approchée de l'équation de Van Der Pol sous sa forme réduite :

$$x''(t) - \varepsilon(1 - x^2(t))x'(t) + x(t) = 0 .$$

Il est possible d'obtenir une solution $x(t)$ approchée en utilisant la méthode d'Euler décrite ci-dessous :

— On pose $x'(t) = v(t)$.

— L'équation devient alors : $v'(t) = x''(t) = \varepsilon(1 - x^2(t))v(t) - x(t)$. (E)

— Le temps est initialisé au moment où $x = 0$; puis son évolution se fera par intervalles δt assez petits, de telle manière que :

$$t_1 = \delta t \;;\; t_2 = t_1 + \delta t = 2\delta t \;;\; t_{n+1} = t_n + \delta t = (n + 1)\delta t .$$

— La dérivée $x'(t)$ peut s'écrire de façon approchée :

$$x'(t) = \frac{x(t + \delta t) - x(t)}{\delta t} = v(t) \text{ soit } x(t + \delta t) = v(t) \times \delta t + x(t) . \quad (1)$$

— $v'(t)$ peut s'écrire de façon approchée :

$$v'(t) = \frac{v(t + \delta t) - v(t)}{\delta t} = x''(t) ,$$

ou encore, en tirant $x''(t)$ de (E) :

$$x(t + \delta t) = [\, \varepsilon(1 - x^2(t))v(t) - x(t) \,]\delta t + v(t) \quad (2)$$

— Si l'instant t auquel les relations (1) et (2) sont écrites correspond au $n$ième intervalle δt, on aura :

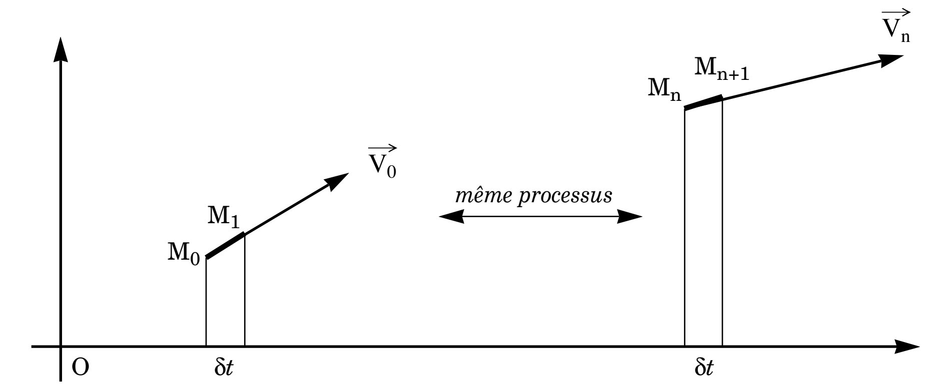
$$x(t) = x_n \;;\; v(t) = v_n \;;\; x(t + \delta t) = x_{n+1} \;;\; v(t + \delta t) = v_{n+1} .$$

et les relations (1) et (2) pourront s'écrire plus généralement :

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= v_n\, \delta t + x_n \\ v_{n+1} &= [\, \varepsilon(1 - x_n^2)v_n - x_n \,]\delta t + v_n \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Avec un nombre n d'intervalles très grand (environ 5000), on peut obtenir par cette méthode itérative des courbes montrant $x = f(t)$, tracées point par point. La solution est d'autant meilleure que δt est plus petit. Ce travail est confié à l'ordinateur au moyen d'un organigramme qui itère les deux relations précédentes, à partir de l'initialisation de x, de v et de δt (l'organigramme était fourni aux élèves).

Fig. 3



cette quantité à l'instant suivant. Géométriquement, on passe de M_n à M_{n+1} en se décalant de δt à partir de M_n le long de la tangente (approchée) en M_n (point « approché » lui aussi) à la courbe cherchée (Figure 3).

Ce processus très complexe, itéré 5000 fois (à partir d'un point initial et d'une tangente en ce point) donne finalement un tracé confirmé par l'expérimentation ! Il faut que les erreurs soient vraiment négligeables pour qu'une telle itération d'approximations ne donne pas une courbe sans rapport avec la réalité expérimentale.

Cette situation, issue des sciences physiques, montre aux élèves que les subtils outils mis au point (avec douleur) en mathématiques permettent d'appréhender le réel dans de bonnes conditions. La qualité des approximations effectuées explique très largement les excellents résultats obtenus. Elle résulte directement des délicates réflexions sur la seconde définition de la dérivée, en Première, et du sens très précis donné à l'adjectif « négligeable » dans ce contexte.

On le voit, cette activité permet à la fois un approfondissement de la notion de dérivée (par le regard croisé des mathématiques et de la physique) et une première approche de la méthode d'Euler, promise à bel avenir au cours des années à venir.

L'introduction aux équations différentielles que je viens d'esquisser prend, dans cette question, autant de temps que le cours lui-même (c'est-à-dire pas longtemps). C'est pour moi un passage obligé pour donner du sens à une question qui va connaître par la suite, des développements considérables, dans toutes les disciplines scientifiques.

Ma critique ne porte pas sur le fait que le programme actuel ne retienne que deux cas particuliers d'équations différentielles. Après tout, il faut faire des choix. Mais elle stigmatise la perte de sens à laquelle conduit cette limitation. Ce chapitre, même réduit, n'est pas anodin. L'équation différentielle est un des outils majeurs de la science. Le minimum d'estime dû aux élèves consiste à leur expliquer la nature radicalement nouvelle du problème et ses enjeux avant de leur donner des théorèmes et des formules « prêtes à l'emploi ».

Nos collègues physiciens revendiquent de plus en plus ouvertement l'enseignement de larges parties des mathématiques dont ils ont besoin dans leur domaine. Nous leur avons déjà abandonné la mécanique. Il est clair que la façon actuelle de traiter en Terminale les équations différentielles plaide en leur faveur. Si nous renonçons à donner du sens aux notions que nous enseignons, d'autres le feront aussi bien que nous (aussi mal serait plus exact). Le risque n'est pas théorique, nous le verrons dans un instant.

Il faut résister coûte que coûte aux pressions de l'institution et des parents pour un enseignement immédiatement efficace, la seule réussite à l'examen. Notre métier consiste d'abord et surtout à faire comprendre des démarches, des méthodes et des enjeux à nos élèves. Si par fatigue ou par commodité, nous nous contentons de diffuser des recettes, nous ouvrons une voie royale aux industriels de l'enseignement qui savent très bien le faire (c'est la seule chose qu'ils savent faire avec les techniques informatiques actuelles) et l'évaluer (des qcm s'y prêtent fort bien). Abandonner la quête du sens, c'est perdre notre raison d'être.

D'inquiétantes perspectives qui exigent une réaction vigoureuse.

Quand on se tourne vers les projets de programme de Terminale S du GTD (en débat pour la rentrée 2002), on y lit le paragraphe suivant :

> « Certaines équations différentielles (notamment $y' = ay$ et $y'' + \omega^2 y = 0$) sont abordées dans le cours de physique, où la méthode d'Euler fera l'objet d'un travail consistant. Dans le cours de mathématiques, on introduira la notion d'équation différentielle (équation dont les solutions sont des fonctions) à partir d'exemples étudiés qualitativement, en s'appuyant notamment sur des champs de tangentes tracés par des logiciels. Les équations différentielles, traitées en complémentarité en mathématiques et en physique, éclaireront la cohérence naturelle entre ces deux disciplines. »

Voici un texte très étonnant. A-t-on vraiment besoin de la méthode d'Euler pour résoudre les équations différentielles $y' = ay$ et $y'' + \omega^2 y = 0$? Ne faudrait-il pas réserver cette méthode à des cas moins élémentaires, nécessitant effectivement un travail consistant ? Mais si le futur cours de physique utilise d'autres équations différentielles plus complexes, le traitement mathématique de ces équations différentielles ne relève-t-il plus des mathématiques ? L'enseignant de physique est-il plus qualifié que son collègue de mathématique pour expliquer « avec consistance » la méthode d'Euler ? Ne serait-il pas profitable aux élèves d'avoir sur cette question le regard croisé des deux disciplines qui se complètent et s'éclairent mutuellement ? L'exemple précédent en montre l'absolue nécessité.

Nous ne pouvons pas accepter que l'enseignement des mathématiques soit dépecé et confié aux seuls « utilisateurs », physiciens, biologistes, économistes etc. Le regard des mathématiques sur les outils utilisés dans divers domaines est essentiel à leur compréhension par les élèves ou les étudiants. Encore faut-il que l'enseignement consacré à ces outils en mathématiques ne tombe pas en dessous du seuil d'intelligibilité, au niveau des formules, voire de recettes.

Si l'on renonce au sens des choses, elles finissent par nous échapper. Toutes sortes de « techniciens » prétendent alors les prendre en charge. Le programme projeté invite au sursaut : il propose de traiter des exemples (même s'il ajoute bizarrement « qualitativement ») ; il suggère de s'appuyer sur le champ des tangentes tracées par ordinateur. Nous y ajoutons la méthode d'Euler, sans laquelle les tracés précédents sont incompréhensibles.

On peut ainsi donner du sens à ce chapitre fort important. Cela prend, hélas du temps, ce temps d'année en année plus chichement mesuré. La réduction des horaires de Terminale, si elle est confirmée, conduira à sacrifier, une fois de plus, le sens au profit de techniques facilement évaluables. Et anéantira les bonnes intentions annoncées. Comme c'est le cas dans les programmes actuels [8].

8 Il s'agit des programmes de l'année 2000-2001 où ce texte a été rédigé.