CONJECTURES EN ARITHMETIQUE

Jean-Alain RODDIER
Irem de Clermont-Ferrand

Grâce à l'intégration progressive de l'informatique en Mathématiques aussi bien en collège qu'en lycée, les élèves développent certaines compétences, en particulier dans l'utilisation d'un tableur.

Les activités avec tableur, qui leur sont généralement proposées en Arithmétique, sont des mises en œuvre d'algorithmes.

La construction de tableaux pour faire émerger des conjectures est une idée novatrice qui peut donner — modulo certaines précautions — une dimension toute particulière au cours d'Arithmétique.

Image mentale...

Au seuil de ce nouveau millénaire, qui sera certainement très "numérisé", l'Arithmétique a de beaux jours devant elle. Depuis le début des années 1980, elle avait pourtant été écartée des programmes de Lycée, c'est en 1998, qu'elle a été de nouveau proposée dans l'enseignement de Spécialité de Terminale S. Des exercices classiques d'Arithmétique ont alors fait leur réapparition, sans aménagements particuliers.

Nous pensions peut-être avoir dans les classes de Terminale S les mêmes élèves que ceux que l'on pouvait rencontrer il y a vingt ans en classe de Terminale C, or une des différences majeures entre ces deux générations d'élèves réside certainement dans ce que l'on nomme la capacité d'abstraction.

Lorsque le professeur de Mathématiques traite, par exemple, un polyèdre en classe de Géométrie dans l'Espace, est-il préférable qu'il sorte de sa poche le polyèdre en question ou que l'élève développe une image mentale de la situation étudiée ?

Bien que la réponse à cette question relève plutôt du mystère, l'enseignement actuel de Mathématiques penche assez nettement pour la première méthode, et une étape préliminaire d'observation est souvent privilégiée, la capacité d'abstraction de nos élèves est alors moins souvent sollicitée.

Qu'en est-il en Arithmétique ?

La première réponse qui vient naturellement à l'esprit, c'est bien sûr qu'en Arithmétique, le professeur ne peut rien avoir dans la poche et que cette fois-ci il ne peut se retrancher que derrière l'image mentale à développer. Les techniques d'enseignement par rapport à ce qu'elles étaient il y a vingt ans, n'ont alors pas à changer. Et pourtant…

L'élève dispose aujourd'hui d'instruments de calcul rapides, nous allons montrer qu'en termes de conjectures, des situations tout à fait classiques mais complexes d'Arithmétique trouvent dans ces technologies des appuis pédagogiques sérieux, qui peuvent permettre à l'élève de voir au sens premier du terme une partie des nombres qui lui sont proposés.

Nous choisissons d'illustrer notre étude par des exercices proposés au Baccalauréat en série S dans différents centres en 1999 et 2000 aux candidats ayant choisi la Spécialité Mathématiques.

Pour chaque exercice, nous construirons un énoncé plus ouvert, puis nous envisagerons une démarche de résolution intégrant un instrument de calcul (qui peut éventuellement tenir dans la poche).

I. Le premier exercice (ci-dessous) vise à étudier le caractère de divisibilité de $81n^2 - 1$ par 4 suivant les valeurs de n. L'exercice préconise une factorisation de l'expression, l'étude est alors menée suivant la parité de n.

Enoncé proposé :

Quelles sont les valeurs de n entier pour lesquelles le nombre $81n^2 - 1$ est divisible par 4 ?

1) Baccalauréat Nouvelle-Calédonie décembre 1999

Exercice 2 (Spécialité)

Soit n un entier naturel non nul, on considère les entiers suivants : $N = 9n + 1$ et $M = 9n - 1$.

1. On suppose que n est un entier pair. On pose $n = 2p$, avec p entier naturel non nul.
   a. Montrer que M et N sont des entiers impairs.
   b. En remarquant que $N = M + 2$, déterminer le PGCD de M et N.
2. On suppose que n est un entier impair. On pose $n = 2p + 1$, avec p entier naturel.
   a. Montrer que M et N sont des entiers pairs.
   b. En remarquant que $N = M + 2$, déterminer le PGCD de M et N.
3. Pour tout entier naturel non nul n, on considère l'entier $81n^2 - 1$.
   a. Exprimer l'entier $81n^2 - 1$ en fonction des entiers M et N.
   b. Démontrer que si n est pair alors $81n^2 - 1$ est impair.
   c. Démontrer que $81n^2 - 1$ est divisible par 4 si et seulement si n est impair.

Mise en place de conjectures :

Avec un tableur, nous allons construire le tableau ci-dessous où la colonne B donne les valeurs de $81n^2 - 1$ pour n (colonne A) variant de 0 à 50, et la colonne C renvoie les valeurs du quotient $(81n^2 - 1)/4$.

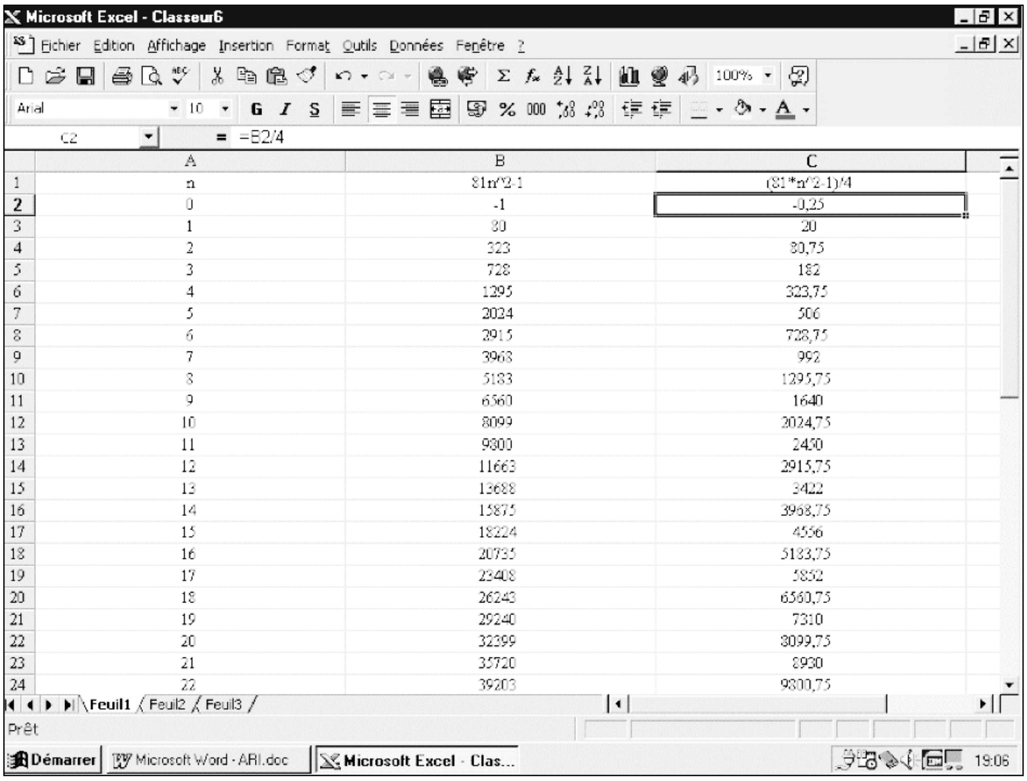
L'étude des nombres de la colonne C, nous conduit aux conjectures suivantes :

a) $81n^2 - 1$ semble être divisible par 4 lorsque n est impair, en effet pour n impair et compris entre 0 et 50 la division tombe "pile".

b) $81n^2 - 1$ ne semble pas être divisible par 4 lorsque n est pair, en effet pour n pair et compris entre 1 et 50 la division ne tombe pas "pile", on peut même remarquer que tous les quotients sont de la forme $k + 0{,}75$ avec k entier naturel, étant donné que $0{,}75*4 = 3$, nous pouvons conjecturer que le reste de la division de $81n^2 - 1$ par 4 semble être 3.

Caractère plus ou moins fort des conjectures.

En termes de conjectures (en dehors du fait qu'elles puissent s'avérer fausses après



	A	B	C
1	n	81n^2-1	(81*n^2-1)/4
2	0	-1	-0,25
3	1	80	20
4	2	323	80,75
5	3	728	182
6	4	1295	323,75
7	5	2024	506
8	6	2915	728,75
9	7	3968	992
10	8	5183	1295,75
11	9	6560	1640
12	10	8099	2024,75
13	11	9800	2450
14	12	11663	2915,75
15	13	13688	3422
16	14	15875	3968,75
17	15	18224	4556
18	16	20735	5183,75
19	17	23408	5852
20	18	26243	6560,75
21	19	29240	7310
22	20	32399	8099,75
23	21	35720	8930
24	22	39203	9800,75

étude), certaines peuvent être qualifiées de faibles (elles ne permettent de considérer que quelques cas particuliers), d'autres au contraire seront qualifiées de fortes (elles permettent d'envisager par exemple tous les cas).

Les conjectures que nous avons établies ci-dessus sont fortes, et elles vont nous amener très rapidement à la conclusion.

Phase de traitement :

Lorsque n est pair, l'entier $81n^2 - 1$ est impair (c'est un entier pair auquel on a retranché 1).

Pour n impair, remplaçons dans l'expression $81n^2 - 1$, l'entier n par $2k + 1$, nous obtenons :

$$324.k^2 + 324.k + 80 = 4.(81.k^2 + 81.k + 20)$$

II. Le deuxième exercice (ci-dessous) est extrêmement guidé, le fait que d prenne soit la valeur 1, soit la valeur 7 apparaît nettement à la simple lecture des questions posées. Nous proposons l'énoncé suivant, avec lequel la situation devient plus ouverte :

Enoncé proposé :

Le nombre n est un entier naturel.
On pose : a = $4n + 3$ et b = $5n + 2$.
Déterminer suivant les valeurs de n, le PGCD de a et b.

Mise en place de conjectures :

Le PGCD de a et de b peut être très rapidement calculé pour n variant de 0 à 50, avec un tableur (voir page ci-contre). La question légitime qui se pose alors est la suivante : " un élève de lycée est-il en mesure d'exploiter les résultats de la colonne D du tableau ci-contre ?".

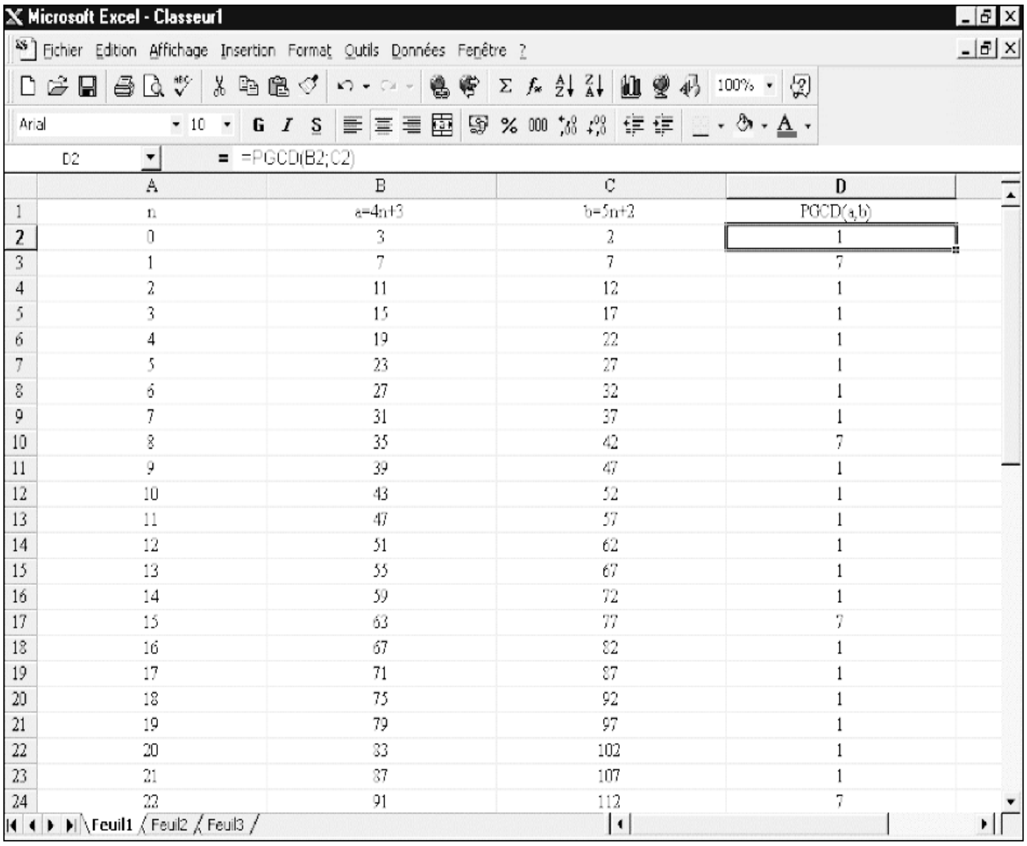
Constance, périodicité, "cyclicité". Un ensemble de définition est utile à l'étude d'une liste, on peut par exemple introduire les mots :

2) Baccalauréat Liban juin 1999

Exercice 2 (Spécialité)

Le nombre n est un entier naturel non nul. On pose : a = $4n + 3$, b = $5n + 2$ et on note d le PGCD de a et b.

1. Donner la valeur de d dans les trois cas suivants : $n = 1$, $n = 11$, $n = 15$.
2. Calculer 5a – 4b et en déduire les valeurs possibles de d.
3. a. Déterminer les entiers naturels n et k tels que $4n + 3 = 7k$.
   b. Déterminer les entiers naturels n et k' tels que $5n + 2 = 7k'$.
4. Soit r le reste de la division euclidienne de n par 7.
   Déduire des questions précédentes la valeur de r pour laquelle d vaut 7.
   Pour quelles valeurs de r, d est-il égal à 1 ?



	A	B	C	D
1	n	a=4n+3	b=5n+2	PGCD(a,b)
2	0	3	2	1
3	1	7	7	7
4	2	11	12	1
5	3	15	17	1
6	4	19	22	1
7	5	23	27	1
8	6	27	32	1
9	7	31	37	1
10	8	35	42	7
11	9	39	47	1
12	10	43	52	1
13	11	47	57	1
14	12	51	62	1
15	13	55	67	1
16	14	59	72	1
17	15	63	77	7
18	16	67	82	1
19	17	71	87	1
20	18	75	92	1
21	19	79	97	1
22	20	83	102	1
23	21	87	107	1
24	22	91	112	7

— Périodicité pour une liste de la forme 111711171117… ;

— "cyclicité" pour une périodicité un peu plus complexe du type 42754275….

Savoir dans un premier temps repérer la constance, la périodicité (111711171117…) *ou la "cyclicité"* (427542754275…) *d'une liste de nombres, puis traduire éventuellement ces trois éléments d'information en termes mathématiques n'est pas une tâche habituelle pour des élèves de lycée, aussi il n'est pas certain qu'ils sachent traduire en termes de conjectures le tableau ci-dessus.*

L'enseignement des Mathématiques, s'il veut intégrer cette utilisation du tableur, devra apporter aux élèves des techniques propres à la reconnaissance et à l'étude de suites du style : 111711171117… *ou* 427542754275….

Le pas. Une fois le caractère périodique ou cyclique d'une liste repéré, la recherche du pas de cette même liste est l'étape nécessaire à son étude mathématique. *En ce qui concerne notre exercice, l'élève pourrait déjà en face de la liste de la colonne D du tableau ci-dessus affirmer qu'elle est périodique et que son pas est égal à 7, puis identifier sur une période les valeurs prises par le PGCD, ce qui conduit à la conjecture :*

> Le PGCD cherché semble être égal à 7 pour $n = 7k + 1$ (avec k entier) et égal à 1 dans tous les autres cas.

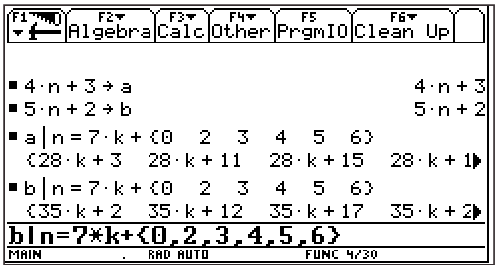
Phase de traitement.

Il va de soi qu'une fois ces conjectures établies le recours à une démarche classique via l'utilisation d'une égalité type Bézout peut être envisagée. Une partie de nos conjectures à savoir que le PGCD ne peut prendre que les valeurs 1 ou 7, peut être ainsi démontrée. Il ne nous reste qu'à démontrer que le PGCD vaut 7 uniquement lorsque n est de la forme $7k + 1$.

Les conjectures que nous venons d'établir sont fortes et avec très peu de "mathématiques", nous allons aboutir rapidement à la conclusion :

— Remplaçons dans les expressions respectives de a et b, l'entier n par $7k + 1$, nous obtenons : $a = 28k + 7$ et $b = 35k + 7$. Ces deux nombres sont divisibles par 7.

— Remplaçons, à présent, n par $7k$, $7k + 2$, $7k + 3$, $7k + 4$, $7k + 5$, $7k + 6$ cela peut se faire avec une TI-92, on obtient alors l'écran ci-dessus.



Les nombres obtenus $28k + 3$, $28k + 11$, ... , $35k + 2$, $35k + 12$, … sont tous de la forme : un multiple de « 7 + un non-multiple de 7 », aucun d'eux n'est multiple de 7, en effet prenons par exemple le nombre $28k + 3$, s'il était multiple de 7 alors, comme $28k$ est un multiple de 7, il en serait de même de leur différence qui vaut 3 (absurde), même raisonnement pour les autres entiers obtenus.

Pour des élèves de Terminale, l'identification de $28k + 7$ comme multiple de 7 est quasi immédiate, par contre l'identification de nombres tels que $28k + 3$, $35k + 2$ en tant que non-multiples de 7 est une source de difficulté.

III. Troisième Exercice :

> **Baccalauréat Inde 2000**
>
> *Exercice 2* (Spécialité)
>
> Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.
>
> 1. a. Pour $1 \leq n \leq 6$, calculer les restes de la division euclidienne de 3^n par 7.
>
>   b. Démontrer que, pour tout n, $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7.
>
>   En déduire que 3^n et 3^{n+6} ont le même reste dans la division par 7.
>
>   c. A l'aide des résultats précédents, calculer le reste de la division euclidienne de 3^{1000} par 7.

d. De manière générale, comment peut-on calculer le reste de la division euclidienne de 3^n par 7, pour un entier n quelconque ?

2. Soit $U_n = 1 + 3 + \ldots + 3^{n-1} = (3^n - 1)/2$ où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

a. Monter que si U_n est divisible par 7 alors 3^{n-1} est divisible par 7.

b. Réciproquement, montrer que si 3^{n-1} est divisible par 7 alors U_n est divisible par 7.

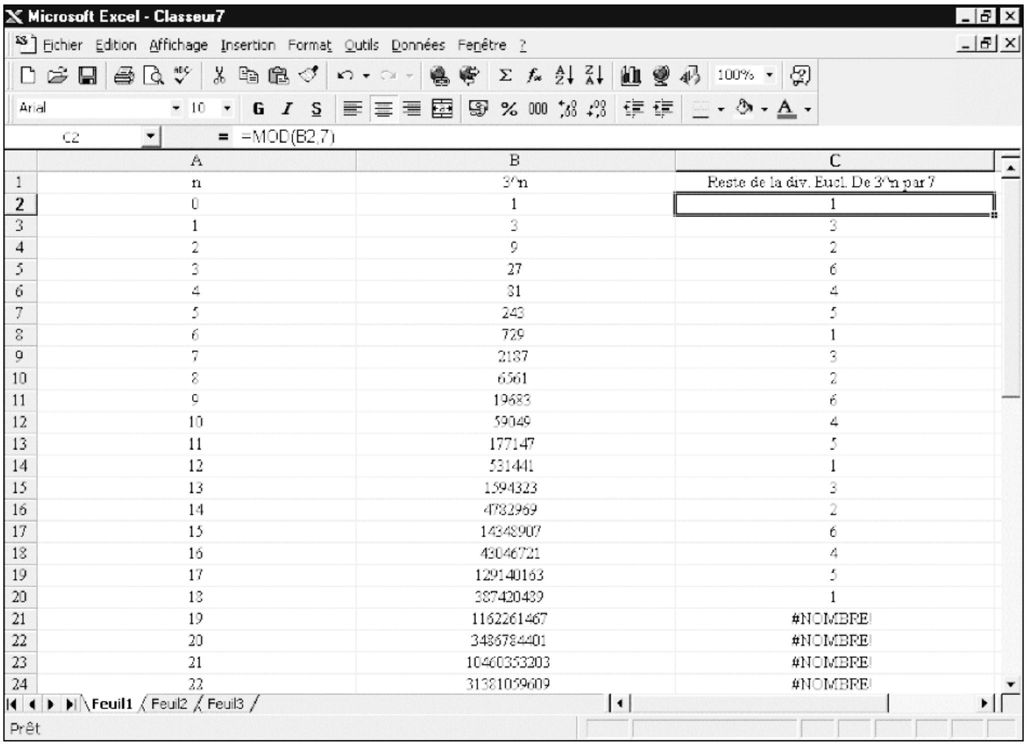
En déduire les valeurs de n telles que U_n soit divisible par 7.

Enoncé proposé :

1. Etudier, suivant les valeurs de n entier naturel, le reste de la division euclidienne de 3^n par 7.
2. Soit $U_n = 1 + 3 + \ldots + 3^{n-1} = (3^n - 1)/2$, où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. Quelles sont les valeurs de n pour lesquelles U_n est divisible par 7 ?

Mise en place de conjectures :

Construisons un tableau (voir ci-dessous) qui donne (si possible) dans la colonne B le reste de la division euclidienne de 3^n par 7 pour n variant de 0 à 50.



	A	B	C
1	n	3^n	Reste de la div. Eucl. De 3^n par 7
2	0	1	1
3	1	3	3
4	2	9	2
5	3	27	6
6	4	81	4
7	5	243	5
8	6	729	1
9	7	2187	3
10	8	6561	2
11	9	19683	6
12	10	59049	4
13	11	177147	5
14	12	531441	1
15	13	1594323	3
16	14	4782969	2
17	15	14348907	6
18	16	43046721	4
19	17	129140163	5
20	18	387420489	1
21	19	1162261467	#NOMBRE!
22	20	3486784401	#NOMBRE!
23	21	10460353203	#NOMBRE!
24	22	31381059609	#NOMBRE!

Dans la colonne C du tableau précédent, nous avons un dépassement de capacité à partir de $n = 19$. C'est dans ce type de situations que le raisonnement mathématique trouve sa légitimité.

Constance, périodicité, "*cyclicité*" : La liste des restes 326451326451… est "cyclique", son pas est égal à 6.

Reste égal à 1 ?

Lorsqu'une question d'Arithmétique concerne des puissances, nous savons que les congruences sont généralement sous-jacentes, ainsi l'important dans ce type d'exercice est de voir si oui ou non, nous avons un reste égal à 1, et dans l'affirmative de repérer dans la liste la position des 1.

Phase de traitement :

Les conjectures émises sont très fortes, nous repérons en particulier dans la colonne D la valeur 1, et recherchons la plus petite puissance non nulle de 3 qui donne un reste égal à 1, ceci nous conduit à l'égalité : $3^6 \equiv 1$ [7]. Le traitement de l'exercice peut se faire à présent de façon classique, en gardant à l'esprit qu'il nous suffit peut-être de connaître les éléments de la liste sur un cycle pour envisager cette liste entièrement. A partir de n = 19, le tableur est en situation de dépassement de capacité, et si l'on proposait l'étude du reste de la division de 3^n, non pas par 7, mais par 97, le tableur ne serait d'aucune utilité car le dépassement de capacité ne laisserait pas de place aux conjectures…

IV. Quatrième exercice :

Baccalauréat Asie juin 1999

Exercice 2 (Spécialité)

1. On considère l'équation (E) : $8x + 5y = 1$, où (x, y) est un couple de nombres entiers relatifs.
   a. Donner une solution particulière de l'équation (E).
   b. Résoudre l'équation (E).
2. Soit N un nombre naturel tel qu'il existe un couple (a, b) de nombres entiers vérifiant $N = 8a + 1$ et $N = 5b + 2$.
   a. Montrer que le couple $(a, -b)$ est solution de (E).
   b. Quel est le reste, dans la division de N par 40 ?
3. a. Résoudre l'équation $8x + 5y = 100$, où (x, y) est un couple de nombres entiers relatifs.

   b. Au VIIIème siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge. Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune.

   Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ?

Les équations diophantiennes forment aujourd'hui la clef de voûte du cours d'Arithmétique de Terminale S (Spé.Math.). Elles sont, en effet, le lieu d'application d'un ensemble de résultats du cours. Nous proposons ci-dessous une méthode de résolution pour le moins atypique basée sur un ensemble de conjectures.

Enoncé proposé :

Au VIIIème siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge. Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune. Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ?

Mise en place de conjectures :

Dans l'équation $8x + 5y = 100$ isolons x, nous obtenons $x = (100 - 5y)/8$, puis construisons une colonne B qui donne la valeur de $(100 - 5y)/8$ pour y variant de 0 à 200. (tableau ci-dessous)

Mise en place de conjectures :

Les valeurs de y comprises entre 0 et 200 pour lesquelles x est entier sont : 4, 12 et 20, on obtient respectivement comme valeurs correspondantes de x : 10, 5 et 0.

A partir de $y = 21$, les valeurs de x correspondantes sont strictement négatives.

Microsoft Excel - Classeur9

B2 = =(100-5*A2)/8

	A	B
1	y	(100-5y)/8
2	0	12,5
3	1	11,875
4	2	11,25
5	3	10,625
6	4	10
7	5	9,375
8	6	8,75
9	7	8,125
10	8	7,5
11	9	6,875
12	10	6,25
13	11	5,625
14	12	5
15	13	4,375
16	14	3,75
17	15	3,125
18	16	2,5
19	17	1,875
20	18	1,25
21	19	0,625
22	20	0
23	21	-0,625
24	22	-1,25

Feuil1 Feuil2 Feuil3

Phase de traitement :

Les conjectures nous laissent penser que nécessairement y doit être strictement inférieur à 21, un argument tel que $5 \times 21 = 105 > 100$ démontre cette conjecture.

Les trois couples (x, y) suivants sont donc les seules solutions (10, 4) ; (5, 12) et (0, 20).

La situation étant relativement simple, les solutions au problème posé émergent rapidement, en effet nous n'avons pas eu à résoudre l'équation diophantienne dans $\mathbf{Z}^2$ mais dans $\{0, \ldots, 12\} \times \{0, \ldots, 20\}$. Nous pouvons alors nous demander si notre méthode de mise en place de conjectures reste opérationnelle pour des situations où l'on a à résoudre une équation diophantienne dans $\mathbf{Z}^2$, c'est ce que nous allons envisager dans le 5ème exercice.

V. Cinquième Exercice (voir ci-dessous)

Enoncé proposé :

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal de l'espace. On considère les plans (P) et (Q) d'équations respectives :

$$x + 2y - z = -2 \quad \text{et} \quad 3x - y + 5z = 0 .$$

1. Montrer que (P) et (Q) se coupent suivant une droite (D).
2. Montrer que les coordonnées des points de (D) vérifient l'équation $8x + 9y = -10$.
3. En déduire l'ensemble E des points de (D) dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

Baccalauréat Asie juin 2000

Exercice 2 (Spécialité)

1. Déterminer PGCD(2688 ; 3024)
2. Dans cette question x et y sont deux entiers relatifs.
   a. Montrer que les équations (1) et (2) sont équivalentes :
      (1) $\quad 2688x + 3024y = -3360$
      (2) $\quad 8x + 9y = -10$
   b. Vérifier que (1 ; –2) est une solution particulière de l'équation (2).
   c. Déduire de ce qui précède les solutions de (2).

3) Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal de l'espace. On considère les plans (P) et (Q) d'équations respectives :

$$x + 2y - z = -2 \qquad \text{et} \qquad 3x - y + 5z = 0 .$$

a) Montrer que (P) et (Q) se coupent suivant une droite (D).
b) Montrer que les coordonnées des points de (D) vérifient l'équation (2).
c) En déduire l'ensemble E des points de (D) dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

Résolvons le système de la question 1. en isolant z dans la première équation. Nous sommes amenés à considérer l'équation : $8x + 9y = -10$ à résoudre dans $\mathbf{Z}^2$.

Mise en place de conjectures pour le 3) :

Isolons x dans l'équation, on obtient :

$$x = (-10 - 9y) / 8$$

Construisons alors avec un tableur, une colonne qui donne $(-10 - 9y) / 8$ pour y variant de -50 à 50. Les valeurs de y comprises entre -50 et 50 pour lesquelles x est entier sont :

$$-50, -42, -34, -26, -18, -10,$$

$$-2, 6, 14, 22, 30, 38, 46 .$$

L'étude d'une telle liste nécessite certains automatismes que les élèves (bien qu'ils étudient les suites arithmétiques) n'ont pas forcément. La raison de cette "liste" est égale à 8, on prend l'un des termes par exemple 6, il est égal à $8 \times 0 + 6$, nous en déduisons que tous les termes de la liste sont de la forme $8k + 6$ avec k entier.

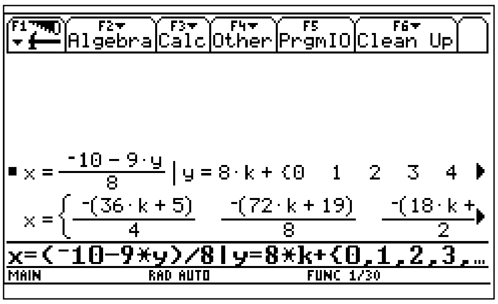
La conjecture que l'on peut émettre est la suivante : x est entier uniquement lorsque y est de la forme $8k + 6$ avec k entier.

Phase de traitement :

Dans l'expression qui donne x en fonction de y, c'est-à-dire $x = (-10 - 9y) / 8$, remplaçons :

— y par $8k + 6$, on obtient $x = -9k - 8$ (c'est un entier) ;

— y par $8k$, $8k + 1$, $8k + 2$, $8k + 3$, $8k + 4$, $8k + 5$, $8k + 7$, cela peut être fait à l'aide d'une calculatrice, nous obtenons l'écran cidessous :



Tous les quotients obtenus sont de la forme $(m + n)/d$ avec m multiple de d et n non-multiple de d, aucune de ces fractions n'est donc un entier.

Les seules solutions de l'équation diophantienne proposée sont les couples de la forme $(-9k - 8, 8k + 6)$ où k décrit $\mathbf{Z}$.

Tous les exercices que nous venons de présenter sont des exercices de Baccalauréat, une des spécificités de ces exercices est de proposer un énoncé relativement fermé, l'élève est ainsi mis en confiance et le fait de répondre question par question lui permet de traiter l'ensemble de l'exercice dans la majeure partie des cas.

Quel est le pourcentage d'exercices, parmi ceux qui sont proposés aux élèves tout au long de l'année de Terminale, qui proviennent des annales ?

Nous n'avons pas la réponse à cette question, mais il est légitime de penser que ces exercices d'Arithmétique de Baccalauréat n'ont pas une influence nulle sur l'enseignement en Terminale…

VI. Sixième exercice :

Nous vous proposons à présent un exercice tiré de la brochure de l'Irem de Poitiers intitulée : Enseigner l'Arithmétique.

Cet exercice, qui n'est pas un exercice de Baccalauréat, est nettement plus difficile que ceux que nous avons traités précédemment, notre méthode de mise en place de conjectures va-t-elle nous montrer ses limites ?

> *Exercice de la brochure de l'Irem de Poitiers intitulée : Enseigner l'Arithmétique.*
>
> Soit a et b deux entiers naturels non nuls, quel est le PGCD de $11a + 2b$ et de $18a + 5b$?

Mise en place de conjectures.

Nous pouvons produire, comme l'indique cette brochure, un tableau à double entrée (a et b) qui donne la valeur de :

$$\text{PGCD}(11a + 2b\ ,\ 18a + 5b)$$

pour a variant de 1 à 18, et b variant de 1 à 23, indépendamment pour que les calculs tiennent sur une feuille (cf. page suivante).

Nous allons tenter d'exploiter ce tableau de façon méthodique :
— colorions d'une même couleur les cases qui contiennent les mêmes chiffres ;
— entourons les multiples de 19, (ils sont nombreux sur le tableau).

Un début de trame régulière formée uniquement de parallélogrammes identiques apparaît alors, c'est ce caractère de régularité qui nous conduit à passer par une phase de conjectures.

Construisons à présent le tableau du PGCD(a, b) (cf. page suivante), et effectuons le même coloriage sur ce nouveau tableau. La trame trouvée sur le premier tableau correspond sur le second tableau au quotient des entiers par 19.

Ce travail nous conduit à la conjecture suivante :

$$\text{PGCD}(m, n) = \begin{cases} \text{PGCD}(a, b) \\ \quad \text{ou} \\ 19 \times \text{PGCD}(a, b) \end{cases}$$

N.B. : On note $m = 11a + 2b$ et $n = 18a + 5b$.

Phase de traitement.

Notons D = PGCD(m, n) et d = PGCD(a, b).

a) $18m - 11n = -19b$, donc $D \mid 19b$
$5m - 2n = 19a$ donc $D \mid 19a$
D divise $19a$ et $19b$, il divise donc leur PGCD, donc $D \mid 19d$

b) $d \mid a$ et $d \mid b$ donc $d \mid m$ et $d \mid n$
d divise m et n , il divise donc leur PGCD donc $d \mid D$

c) $D \mid 19d$ donc $19d = kD$
$d \mid D$ donc $D = k'd$
on en déduit que $kk' = 19$
donc soit $(k, k') = (1,19)$ soit $(k, k') = (19,1)$

D'où : soit $D = d$ soit $D = 19d$. Les conjectures avancées sont donc exactes.

Nouvelles questions.

Dans quel cas a-t-on $D = d$? $D = 19d$?

Tableau donnant le PGCD de $11a + 2b$ et de $18a + 5b$ pour a variant de 1 à 18 et b variant de 1 à 21 :

B2 =PGCD(11*B$1+2*$A2;18*B$1+5*$A2)

b\a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	1	1	1	1	19	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	38	1	2	1	2	1	2	1	2
3	1	1	3	1	1	3	1	1	3	1	1	3	1	1	57	1	1	3
4	19	2	1	4	1	2	1	4	1	2	1	4	1	2	1	4	1	2
5	1	1	1	1	5	19	1	1	1	5	1	1	1	1	5	1	1	1
6	1	2	3	2	1	6	1	2	3	2	19	6	1	2	3	2	1	6
7	1	1	1	1	1	1	7	1	1	1	1	1	1	7	1	19	1	1
8	1	38	1	4	1	2	1	8	1	2	1	4	1	2	1	8	1	2
9	1	1	3	1	1	3	19	1	9	1	1	3	1	1	3	1	1	9
10	1	2	1	2	5	2	1	2	1	10	1	38	1	2	5	2	1	2
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	11	1	1	1	1	1	19	1
12	1	2	57	4	1	6	1	4	3	2	1	12	1	2	3	4	1	6
13	1	1	1	1	1	1	1	19	1	1	1	1	13	1	1	1	1	1
14	1	2	1	2	1	2	7	2	1	2	1	2	19	14	1	2	1	2
15	1	1	3	1	5	3	1	1	3	5	1	3	1	1	15	1	1	57
16	1	2	1	76	1	2	1	8	1	2	1	4	1	2	1	16	1	2
17	1	1	1	1	1	1	1	1	19	1	1	1	1	1	1	1	17	1
18	1	2	3	2	1	6	1	2	9	2	1	6	1	38	3	2	1	18
19	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
20	1	2	1	4	95	2	1	4	1	10	1	4	1	2	5	4	1	2
21	1	1	3	1	1	3	7	1	3	19	1	3	1	7	3	1	1	3

B2 =PGCD(B$1;$A2)

b\a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	1	1	3	1	1	3	1	1	3	1	1	3	1	1	3	1	1	3
4	1	2	1	4	1	2	1	4	1	2	1	4	1	2	1	4	1	2
5	1	1	1	1	5	1	1	1	1	5	1	1	1	1	5	1	1	1
6	1	2	3	2	1	6	1	2	3	2	1	6	1	2	3	2	1	6
7	1	1	1	1	1	1	7	1	1	1	1	1	1	7	1	1	1	1
8	1	2	1	4	1	2	1	8	1	2	1	4	1	2	1	8	1	2
9	1	1	3	1	1	3	1	1	9	1	1	3	1	1	3	1	1	9
10	1	2	1	2	5	2	1	2	1	10	1	2	1	2	5	2	1	2
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	11	1	1	1	1	1	1	1
12	1	2	3	4	1	6	1	4	3	2	1	12	1	2	3	4	1	6
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	13	1	1	1	1	1
14	1	2	1	2	1	2	7	2	1	2	1	2	1	14	1	2	1	2
15	1	1	3	1	5	3	1	1	3	5	1	3	1	1	15	1	1	3
16	1	2	1	4	1	2	1	8	1	2	1	4	1	2	1	16	1	2
17	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	17	1
18	1	2	3	2	1	6	1	2	9	2	1	6	1	2	3	2	1	18
19	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
20	1	2	1	4	5	2	1	4	1	10	1	4	1	2	5	4	1	2
21	1	1	3	1	1	3	7	1	3	1	1	3	1	7	3	1	1	3

Tableau donnant le PGCD de a et de b :

Mise en place de conjectures.

Ils semble que lorsque l'on est :

— en dehors de la trame, on a : $D = d$;

— sur la trame, on a : $D = 19d$.

Quelle relation doit-il y avoir entre a et b pour obtenir un point de la trame ? Pour faciliter notre travail, nous allons utiliser ce tableau, comme s'il s'agissait du plan muni du repère cartésien tel que la case qui correspond par exemple à $a = 2$ et $b = 5$, soit pour nous le point de coordonnées (2, 5).

a) Les points A(5, 1), B(10, 2), C(15, 3),… sont des points de la trame et ils sont alignés sur la droite d'équation $y = x/5$, nous avons donc pour ces points $a = 5b$.

b) Les points A'(1, 4), B'(6, 5), C'(11, 6),… sont eux aussi sur la trame et sur la même droite d'équation $y = x/5 + 19/5$, nous avons donc pour ces points $a = 5b - 19$.

c) Les points A"(2, 8), B"(7, 9), C"(12, 10),… sont sur la trame et sur la droite d'équation $y = x/5 + 38/5$ c'est-à-dire que nous avons $a = 5b - 38$.

En poursuivant ce travail sur tout le tableau de la page précédente, nous obtenons la certitude que les points de la trame sont ceux qui correspondent à : $a = 5b + 19p$, avec p dans $\mathbf{Z}$.

Nos conjectures à ce stade de l'étude sont donc les suivantes :

$$D = \begin{cases} d \text{ si } a \text{ n'est pas de la forme } 5b + 19p \\ \text{ou} \\ 19d \text{ si } a \text{ est de la forme } 5b + 19p \end{cases}$$

Phase de traitement.

Considérons l'entier k tel que $a = 5b + k$ autrement dit : k est défini par $k = a - 5b$.

Nous avons alors :

$$m = 11a + 2b = 11(5b + k) + 2b = 57b + 11k$$

$$\begin{aligned} & m \text{ est un multiple de } 19 \\ \Leftrightarrow\quad & 11k \text{ est un multiple de } 19 \\ \Leftrightarrow\quad & k \text{ est un multiple de } 19 \end{aligned}$$

$$n = 18a + 5b = 18(5b + k) + 5b = 95b + 18k$$

$$\begin{aligned} & n \text{ est un multiple de } 19 \\ \Leftrightarrow\quad & k \text{ est un multiple de } 19 \end{aligned}$$

Si k n'est pas un multiple de 19, alors m et n ne sont pas multiples de 19, donc on ne peut avoir $D = 19d$, d'où $D = d$.

Si k est un multiple de 19, alors 19 divise à la fois m et n, il divise D.

— Si 19 ne divise pas b, alors 19 ne divise pas non plus d, on ne peut donc pas avoir $D = d$, donc $D = 19d$.

— Si 19 divise b, alors 19 divise a. $D = 19\mathrm{PGCD}(m', n')$, où $m' = m/19$ et $n' = n/19$, on notera $D' = \mathrm{PGCD}(m', n')$.

Conclusion :

— Si 19 ne divise pas $(a - 5b)$, alors $D = d$.

— Si 19 divise $(a - 5b)$, alors soit $D = 19d$ si 19 ne divise pas b , soit $D = 19D'$ si 19 divise b.

N.B. : Les conjectures précédentes étaient donc inexactes, en effet lorsque19 divise l'entier $(a - 5b)$, on peut malgré tout avoir $D = d$ (prendre $a = 5 \times 38 + 19$ et $b = 38$). Le tableau de départ n'était pas assez grand, mais il a été d'une importance capitale pour la résolution de ce problème.

Mise en place de conjectures et instruments de calcul.

L'élève, pour pouvoir exploiter au mieux des instruments de calcul en termes de conjectures, devra développer des capacités nouvelles telles que :

— La gestion de la taille des listes à envisager : il est utile de savoir doser entre temps de réponse du logiciel et taille suffisante d'une liste pour d'éventuelles conjectures ;

— La connaissance de certaines "limites" du logiciel : les capacités d'un logiciel de calcul peuvent être en effet mises rapidement en défaut (taille des nombres, précision, …) ;

— La "lecture" de certaines expressions : les calculatrices renvoient des expressions induites par le calcul formel qu'il serait bon qu'un élève sache décrypter (par exemple, lorsque l'on obtient la liste $28k$, $28k + 1$, $28k + 2$,… savoir repérer dans cette liste les multiples de 7, ou bien dans un même ordre d'idée, savoir que le quotient n'est pas un entier).

Notre enseignement, s'il veut ainsi intégrer l'usage du tableur en temps qu'outil de conjectures, doit alors :

— d'une part, conduire à développer des capacités de discernement entre l'utile et l'accessoire ;

— d'autre part, il doit amener l'élève à être capable d'appréhender ce qu'il a observé, c'est à dire entre autres à traduire les données en langage mathématique.

La démarche qui consiste à utiliser au préalable de toute étude un outil de calcul tel que le tableur permet de consacrer un temps réservé à l'observation, mais cette étape ne peut être utile à l'élève que s'il est capable d'engendrer une série de conjectures. Les quelques exemples, que nous venons de présenter, montrent alors combien l'usage du tableur peut s'inscrire parfaitement dans le cours d'Arithmétique.

Bibliographie

Enseigner l'arithmétique. Irem de Poitiers juin 2000

Fragments d'arithmétique. Irem de Montpellier 1999

Cours et activités en arithmétique pour les classes terminales. Irem d'Aix-Marseille 1999

Arithmétique en Terminale S. Irem de Besançon 1999

Arithmétique en terminale S. CRDP Auvergne 1998

Quelques thèmes et problèmes d'arithmétique. Irem de Clermont-Fd av. 2000

Secrets de nombres. Hors série n°6. Editions Archimède. 1999

Arithmétique et calcul formel sur TI-89. J-A Roddier. Editions POLE

Equations en nombres entiers. J-A Roddier. TIMag n°19. Editions POLE.