SIMULATION ET MODELISATION

Etude d'un exemple

Joëlle FONTANA, Maryse NOGUES
Irem de Montpellier

Résumé : *Un des objectifs de l'enseignement des statistiques au lycée est de faire prendre conscience des fluctuations d'échantillonnage et de procéder à des simulations d'expériences à l'aide d'outils informatiques. L'étude d'un problème, apparemment très ludique, permet d'observer comment ces simulations sont liées à nos schémas de représentation et influencent la " simplification " que l'on opère en élaborant un modèle. Ce problème permet ainsi d'illustrer les nécessaires " allers-retours " entre expérience, modèle, simulation afin de pouvoir construire un modèle qui pourrait être considéré comme valide, c'est-à-dire en adéquation avec ce qu'il est censé représenter.*

1. De nouveaux programmes, de nouveaux problèmes.

Le nouveau programme de seconde applicable depuis la rentrée 2000 [1] développe largement l'étude des statistiques. Nous reprenons ci-dessous quelques extraits du document d'accompagnement des programmes qui nous semblent permettre de mettre en évidence les nouveautés introduites par ce nouveau programme dans l'enseignement des statistiques au lycée.

Le programme s'inspire largement du contenu des programmes antérieurs **sauf en statistiques**… Les choix, traduits en termes de programme pour la classe de seconde, sont guidés par les perspectives suivantes pour le lycée :
— acquérir une expérience de l'aléatoire ;
— comprendre ce qu'est une question statistique et le type de réponse que l'on peut proposer ;
— voir dans un cas simple ce qu'est un modèle probabiliste.
…L'esprit statistique naît lorsqu'on prend conscience de **la fluctuation d'échantillonnage...**

Il fait une large place à la démarche expérimentale et à l'utilisation des outils informatiques :

1 Ce programme a été publié au B.O n°6 du 12 Août 1999. On peut également en prendre connaissance actuellement sur le site du CNDP, ainsi que du document d'accompagnement des programmes dont la version définitive est datée d'octobre 2000.

L'outil informatique donne la possibilité d'une **démarche quasi expérimentale** dans le champ des nombres... favorisant une approche plus active et plus impliquante. Il élargit considérablement les possibilités **d'observation et de manipulation**...

Dans ce cadre, il promeut les méthodes de simulation d'évènements aléatoires :

A propos de simulation ..., il s'agit de faire comprendre à chaque élève ce que simuler veut dire...Parallèlement, on utilisera la touche **random** comme générateur de chiffres au hasard ... Simuler une expérience de référence consiste ainsi à produire une liste de résultats qui pourraient être ceux que l'on obtiendrait par la réalisation pratique de cette expérience.
Formellement, **simuler une expérience, c'est choisir un modèle pour cette expérience... puis produire une liste de données**...

Et évoque les prolongements en classe de première et terminale :

Les probabilités : elles seront introduites et travaillées en première ou terminale...

Ce nouveau programme appelle ainsi de nouveaux problèmes, de nouvelles façons d'aborder les statistiques en seconde. C'est dans cette perspective que l'équipe analyse de Montpellier a travaillé sur un problème que nous pourrions énoncer ainsi :

" Quelle est la probabilité, en coupant au hasard un spaghetti en trois morceaux, de pouvoir construire un triangle avec les 3 morceaux obtenus ? "

Ce problème a fait l'objet d'un atelier animé par Joëlle Fontana et René Bernard au stage de formation des formateurs de l'Irem de Montpellier à Boisseron en Juin 2000. Il a aussi été présenté, par ces mêmes formateurs, au colloque francophone, EM2000, de Grenoble en Juillet 2000 [2]. Lors de ces différents ateliers, les participants ont réalisé eux-mêmes l'expérience : découpe de 30 spaghettis en 3, comptage des triangles obtenus et calcul puis regroupement des fréquences, ils ont aussi essayé de simuler à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur l'expérience.

Dans tous les cas, un écart important a été observé entre :

— d'une part les fréquences obtenues expérimentalement, qui se stabilisaient approximativement autour de 0,7 ;

— d'autre part, les résultats obtenus par simulations, pour lesquels de plus, les différentes simulations produites ne permettaient pas d'obtenir une stabilisation des fréquences vers une seule valeur... , mais deux valeurs : 0,25 et 0,20.

Ainsi cette expérience, très ludique, a permis de mettre en évidence les différents problèmes liés aux rapports entre expérimentation et simulation. Simulation qui repose, même si parfois cela est implicite, sur un modèle. Dans un premier temps, le type de modèle utilisé ne correspond pas nécessairement à la réalité observée et c'est donc par ajustements successifs que peut être élaboré un modèle qui rendra compte " au mieux " de l'expérience réelle. Même si une question se pose : " quelle réalité observe-t-on et celle-ci ne dépend-elle pas du protocole expérimental ? "

2 On peut aussi trouver une rédaction du problème pour les élèves dans le livre de seconde collection Fractale paru en 2000.

2. Expérience, et simulations.

La diversité des résultats observés amène assez naturellement à se poser la question : “ mais comment introduit-on le hasard dans le choix des découpes ? ”

En interrogeant les participants sur leur façon de procéder, différentes possibilités sont évoquées :

— on choisit avant de couper l’emplacement des deux coupures que l’on va réaliser (situation qui est dans la pratique rare) ;

— on coupe un premier morceau, et on recoupe le second (beaucoup plus classique) ;

— on coupe un premier morceau et on recoupe le plus grand des deux morceaux obtenus ;

— on coupe un premier morceau et on recoupe le plus petit des deux morceaux obtenus.

Ces différentes façons de faire ne relèvent pas du même modèle et, de la même manière, les simulations proposées par les participants ne relevaient pas toutes du même modèle, même si certains invariants pouvaient être mis en évidence. Nous avons donc réalisé diverses simulations possibles à l’aide d’un tableur, en les associant à leur modèle respectif. Celui-ci nous a permis à l’aide d’une représentation graphique d’obtenir une fréquence (ou probabilité théorique) si l’on considère que la probabilité d’obtenir un point dans une zone donnée est proportionnelle à l’aire de cette zone.

Simulation 1.

On considère que couper un spaghetti en trois, c’est découper un segment, que l’on peut supposer de longueur 1, en trois morceaux, en plaçant deux points M et N d’abscisses x et y sur ce segment. Cette situation correspond à la première façon de couper au hasard le spaghetti en trois mentionnée précédemment.

Il s’agit donc de trouver 2 nombres x et y compris entre 0 et 1 qui sont les abscisses des deux coupures et qui déterminent les longueurs des trois morceaux, notées a, b et c. On obtient :

$$a = \min(x, y)\ ;$$

$$b = \max(x, y) - \min(x, y)$$

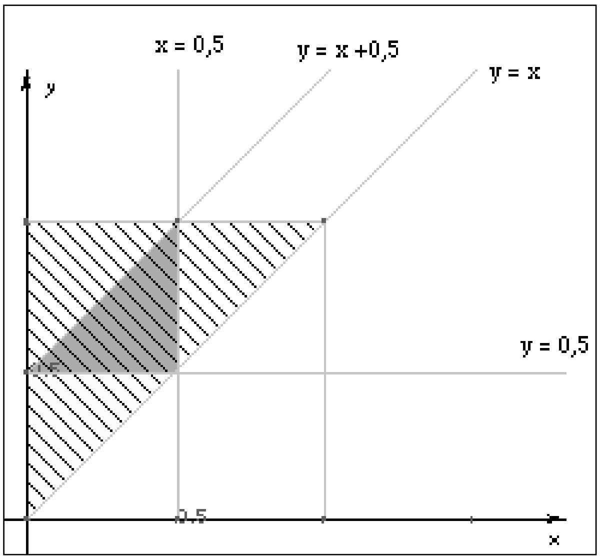
et $$c = 1 - (a + b).$$

Les morceaux permettant la construction d’un triangle sont donc les morceaux de longueur a, b et c satisfaisant les trois inégalités triangulaires et $a + b + c = 1$, ce qui conduit à la condition :

$$\max(a, b, c) < 1/2\ .$$

Avec un tableur, on peut procéder comme cidessous :

A	B	C	D	E	F	G
Première coupure ALEA()	Deuxième coupure ALEA()	Premier morceau MIN(A;B)	Deuxième morceau MAX(A;B)-MIN(A;B)	Troisième morceau 1-(C+D)	Max des morceaux MAX(C;D;E)	test SI(F<0.5;1;0)
0,17116123	0,62735719	0,17116123	0,456195958	0,372642809	0,456195958	1
0,92721917	0,43075206	0,43075206	0,496467101	0,072780834	0,496467101	1
0,82647913	0,06289745	0,06289745	0,76358168	0,173520866	0,76358168	0



On a observé pour 8 séries de 500 simulations les fréquences suivantes :

0,25 ; 0,23 ; 0,25 ; 0,25 ; 0,26 ; 0,27 ; 0,24 ; 0,26.

La fréquence moyenne pour 4000 simulations est ainsi de 0,251. Une étude théorique graphique, ou géométrique, du modèle lié à cette simulation, qui de façon implicite sous-entend une équirépartition des coupures peut permettre de comprendre pourquoi les fréquences se stabilisent autour de 0,25.

Approche graphique :

x et y sont deux nombres compris entre 0 et 1. L'ensemble des points M $(x\,;y)$ possibles est donc, dans un repère orthonormal, le carré de côté 1 construit sur les unités (cf. figure ci-dessus).

En raison de la symétrie du problème, on peut supposer que x est le plus petit des deux nombres ($x < y$). On obtient ainsi comme ensemble de points possibles le triangle « supérieur » du carré obtenu.

Le maximum des trois longueurs qui correspondent aux trois nombres x, $y-x$ et $1-y$ doit être inférieur à 1/2, chacun d'eux doit donc l'être. On a ainsi trois inéquations :

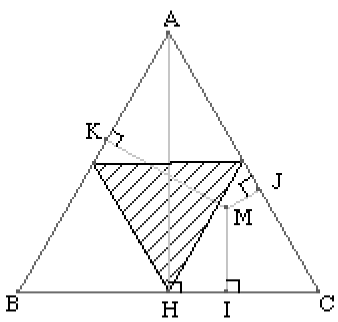
$$x < 1/2 \;\; ; \;\; y < x + 1/2 \;\; ; \;\; y > 1/2 \,.$$

Par régionnement du plan, on obtient le triangle foncé, dont l'aire est égale à 1/8. Le rapport entre l'aire du triangle foncé et celle du triangle hachuré étant lui de 1/4.

On trouve une valeur dont s'approchent les distributions de fréquences obtenues par les simulations tableur.

Approche géométrique du problème.

Si ABC est un triangle équilatéral, et M un point quelconque à l'intérieur du triangle,

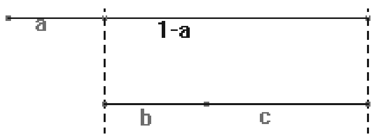


une considération rapide des aires des triangles MBC, MAB et MAC ainsi que celle de ABC permet d'obtenir : MI + MJ + MK = AH. Couper un spaghetti de longueur AH correspond donc à placer un point M de façon quelconque dans le triangle. On reporte ensuite les trois longueurs MI, MJ puis MK sur la longueur AH pour obtenir les trois morceaux.

Ces trois longueurs permettront de construire un triangle si chacune d'elle est inférieure à la moitié de AH. Ainsi, le point M doit se trouver dans le triangle des « milieux » dont l'aire est bien égale au quart de l'aire du triangle ABC.

Simulation 2.

On peut aussi considérer que couper un spaghetti en trois, supposé toujours de longueur 1, c'est couper un premier morceau de longueur a, $a \in [0 ; 1]$, puis un second morceau de longueur b, $b \in [0 ; 1-a]$, la longueur du troisième morceau étant alors donnée par $c = 1-(a+b)$.



Cette situation correspond à la deuxième façon de couper au hasard le spaghetti qui a été mentionnée plus haut.

Pour vérifier que les trois segment obtenus forment un triangle, le test reste le même :

$$\max(a, b, c) < 1/2 .$$

Avec un tableur, on peut procéder comme dans le tableau ci-dessous ; on observe pour 8 séries de 500 simulations les fréquences suivantes :

0,194 ; 0,192 ; 0,208 ; 0,24 ;
0,21 ; 0,206 ; 0,208 ; 0,18.

Soit une fréquence moyenne de 0,204 pour 4000 simulations.

Approche graphique :

Soit x le premier nombre aléatoire ($x \in [0 ; 1]$) et soit y le second ($y \in [0 ; 1]$), les longueurs des segments sont :

$$a = x \ ; \ b = (1-x)y \text{ et } c = 1-(a+b).$$

La construction du triangle est possible lorsque les trois segments ont des longueurs inférieures à un demi, soit :

$$x < 1/2$$
$$(1-x)\,y < 1/2$$
et $$x + (1-x)\,y > 1/2$$

A	B	C	D	E
Premier morceau ALEA()	Deuxième morceau (1-A)*ALEA()	Troisième morceau 1-(A+B)	max des 3 morceaux MAX(A;B;C)	Test SI(D<0.5;1;0)
0,427001379	0,453740714	0,119257907	0,453740714	0
0,171678282	0,218457105	0,609864613	0,609864613	1
0,348929263	0,029698656	0,621372081	0,621372081	0

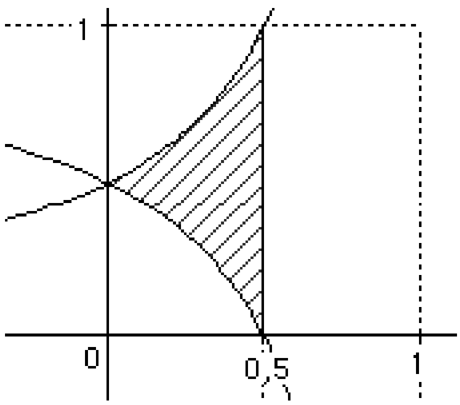
où encore :

$$x < \frac{1}{2}\ ;\ y < \frac{1}{2(1-x)} \quad \text{et } y > \frac{1-2x}{2(1-x)}$$

C'est-à-dire lorsque les couples $(x\ ;\ y)$ sont les coordonnées des points de la zone hachurée ci-dessous. Un petit calcul intégral permet d'établir que l'aire du domaine est égale à :

$$ln\ 2 - 0{,}5,$$

qui à 10^{-3} près vaut 0,193.



Simulation 3.

Une autre façon de procéder qui a été donnée considère que couper un spaghetti en trois, c'est en couper un morceau puis recouper le plus grand des deux morceaux. De la même façon que précédemment, on peut alors procéder à une simulation à l'aide d'un tableur comme indiqué dans le tableau ci-dessous.

On observe pour 8 séries de 500 simulations les résultats suivants :

0,364 ; 0,354 ; 0,366 ; 0,392 ;
0,394 ; 0,388 ; 0,396 ; 0,39.

Soit une fréquence moyenne de 0,381 pour 4000 simulations.

Approche graphique :

Lorsque le premier nombre aléatoire x obtenu est inférieur à 1/2 , la situation est identique à celle de la simulation 2. En appelant y le second nombre aléatoire, les trois morceaux ont pour longueur : $a = x$, $b = (1 - x)y$ et $c = 1 - (a + b)$. Ce qui conduit au même système d'inéquations.

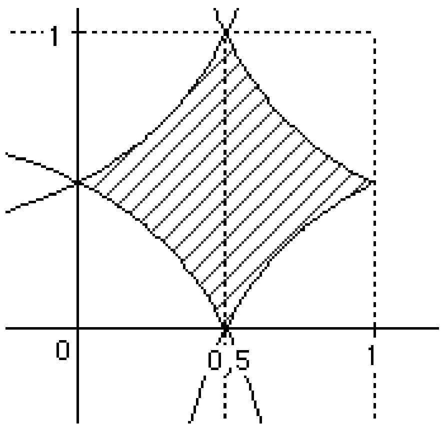
Lorsqu'il est supérieur à 1/2, on a : $a = 1 - x$; $b = xy$ et $c = 1 - (a + b)$. Il est alors possible d'obtenir un triangle lorsque :

$$x > 1/2\ \ ; y < 1/(2x) \ \text{ et } \ y > 1 - 1/(2x).$$

Les points du domaine hachuré de la figure ci-après, ont donc des coordonnées

A	B	C	D	E	F
Nombre entre 0 et 1 ALEA()	Premier morceau SI(A<0.5;A;1-A)	Deuxième morceau (1-B)*ALEA()	Troisième morceau 1-(B+C)	Maximum des trois MAX(B;C;D)	Test SI(E<0.5;1;0)
0,7318545	0,2681455	0,552091211	0,179763289	0,552091211	0
0,907699282	0,092300718	0,658971228	0,248728055	0,658971228	0
0,057691851	0,057691851	0,756667873	0,185640276	0,756667873	0

$(x\,;y)$ qui permettent de construire un triangle. Par symétrie avec le cas précédent, cette aire est : $2(ln\ 2 - 0{,}5)$ ce qui en valeur approchée à 10^{-3} près donne : 0,386.



Simulation 4.

Il ne s'agit pas ici exactement d'une simulation mais d'observer le cas qui consisterait pour couper un spaghetti en trois, à couper un morceau puis recouper le plus petit des deux morceaux.

Dans ce cas, on n'obtiendra jamais de triangle. En effet, en coupant d'abord en deux le spaghetti, l'un des deux morceaux a une longueur nécessairement supérieure à la moitié de celle du spaghetti (à moins du cas très étrange, où on aurait égalité…), on recoupe ensuite le plus petit morceau. On n'aura donc jamais le maximum des trois longueurs inférieur à la moitié de celle du spaghetti… Ce procédé ne correspond donc pas à une pratique usuelle observée lors de l'expérience, à moins que par jeu les expérimentateurs souhaitent qu'il ne soit jamais possible d'obtenir un triangle.

3. “ Ajuster ” un modèle.

Les différentes simulations effectuées précédemment ne permettent pas d'approcher et de loin les résultats expérimentaux obtenus.

Diverses raisons sont envisageables, l'une d'elles nous semble être qu'il n'est pas matériellement très réalisable de couper un spaghetti à moins de 3 cm de ses extrémités.

Plaçons nous alors dans le cas où couper le spaghetti en trois consiste à couper un morceau et ensuite recouper le plus grand des deux morceaux, ce qui a semblé être la pratique la plus courante.

On va effectuer une simulation en obtenant, de la même façon que dans la simulation 3, deux nombres aléatoires x et y compris entre 0 et 1. Un spaghetti ayant une longueur de 24 cm environ, si l'on ramène cette longueur à l'unité, le premier nombre x obtenu ne pourra correspondre à une découpe “ réelle ” que s'il est compris entre 1/8 et 7/8.

Selon que $x < 1/2$ (respectivement $x > 1/2$), le premier morceau a une longueur a égale à x (respectivement $1 - x$). On recoupe le deuxième morceau de longueur $1 - a$ à l'aide d'un nombre aléatoire y et $(1 - a)y$ représente la longueur b du deuxième morceau. Mais cette longueur b ne peut correspondre à une expérience “ réelle ” que si elle est comprise entre 1/8 et 7/8.

On calcule alors la troisième longueur c et on applique le test : $\max (a, b, c) < 1/2$.

Avec un tableur, il est donc nécessaire d'introduire, outre les tests portant sur x et b, un test permettant de compter le nombre de cas “ valides ”.

x	test 1/8<x<7/8 a	premier morceau (1-a)y = b	Deuxième morceau	test 1/8<b<7/8 c	Troisième morceau valides	nombre de cas	Max (a;b;c)	test
ALEA()	SI(1/8<A ;SI(A<7/8; A;-10);-10)	SI(B<0,5 ;B;1-B)	(1-C) * ALEA()	SI(1/8<D; SI(D<7/8; D;-10);-10)	1 - (C+E)	SI(F<1;1;0)	MAX (C;E;F)	SI (H<0,5 ;1;0)
0,02431597	-10	-10	0,20297682	0,20297682	10,7970232	0	10,7970232	0
0,43272211	0,43272211	0,43272211	0,55318897	0,55318897	0,01408892	1	0,55318897	0
0,29685293	0,29685293	0,29685293	0,42466687	0,42466687	0,2784802	1	0,42466687	1
0,62102075	0,62102075	0,37897925	0,15907705	0,15907705	0,4619437	1	0,4619437	1
0,90139942	-10	-10	9,40542877	-10	21	0	21	0
0,54914113	0,54914113	0,45085887	0,17923429	0,17923429	0,36990684	1	0,45085887	1
0,6896084	0,6896084	0,3103916	0,58991741	0,58991741	0,09969099	1	0,58991741	0
0,47050858	0,47050858	0,47050858	0,04031014	-10	10,5294914	0	10,5294914	0
0,88331367	-10	-10	2,5837216	-10	21	0	21	0
0,00494389	-10	-10	8,41750082	-10	21	0	21	0
0,50910426	0,50910426	0,49089574	0,06324865	-10	10,5091043	0	10,5091043	0

									Total
Nombre de cas valides	612	595	630	617	599	611	604	607	4875
Nombre de triangles	323	322	362	354	337	336	333	347	2714
Fréquence	0,5277	0,5411	0,5746	0,5737	0,5626	0,5499	0,551	0,5716	**0,557**

On a ainsi réalisé 8 séries de 1000 simulations...

Pour 8000 simulations, le nombre de cas “ valides ”, ou correspondant à ce que nous avons considéré comme possible réellement est de 4875, et la fréquence d'obtention d'un triangle est alors de 0,557. On peut également observer que la fréquence du nombre de cas valides pour les 8000 simulations est de 4875/8000 = 0,609.

Approche graphique :

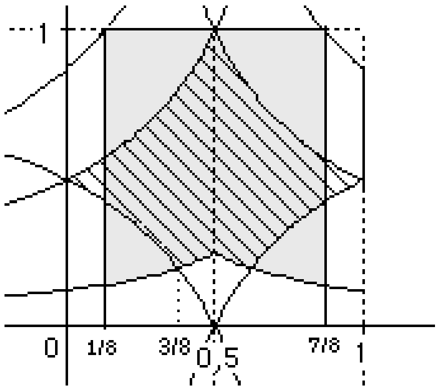
Le couple $(x\,;y)$ de nombres appartenant à l'intervalle [0 ; 1] satisfait cette fois-ci aux conditions supplémentaires :

— Pour x : $1/8 < x < 7/8$,

— Pour y : si $1/8 < x < 1/2$ alors $a = x$ et $b = (1 - x)y$ doit être tel que : $1/8 < b < 7/8$,

d'où : $1/(8(1 - x)) < y < 7/(8(1 - x))$.

Il suffit de compléter par symétrie pour x supérieur à 1/2 et les couples $(x\ ;\ y)$ qui conviennent correspondent aux coordonnées des points de la zone foncée. Zone dont l'aire est en valeur approchée à 10^{-3} près de 0,610.



Pour obtenir les couples qui permettent d'obtenir des triangles, on reporte les contraintes déjà observées lors des simulations 2 et 3, soit :

$$\frac{1-2x}{2(1-x)} < y < \frac{1}{2(1-x)} .$$

La zone hachurée correspond à ces points. Son aire est de 0,340 en valeur approchée et la fréquence théorique d'obtention des triangles est donc de 0,558 environ. Le modèle proposé ici a donc permis d'ajuster, même si les résultats ne sont pas encore concluants, la fréquence théorique et l'observation expérimentale.

4. Conclusion

L'étude de ce problème nous a amené à préciser les relations et interactions entre expérience, simulation et modèle en nous confrontant aux divers aspects liés à l'étude statistique d'une expérience aléatoire.

1. *L'expérience :*

L'imprécision du protocole expérimental : “ couper au hasard un spaghetti en 3 ” a permis de s'interroger sur : que signifie le hasard pour cette expérience ? D'une part des contraintes matérielles influencent les découpes, d'autre part diverses façons de faire peuvent se manifester. On peut bien sûr essayer de réduire le nombre de paramètres, objectifs ou subjectifs, susceptibles d'intervenir dans l'expérience, en précisant les modalités de son déroulement. Par exemple dans le cas présent, on aurait pu préciser : on coupe le spaghetti en deux, puis on recoupe le plus grand des deux morceaux. Mais vouloir observer et analyser un phénomène aléatoire c'est malgré tout essayer de prendre en compte divers paramètres même si ceux-ci sont a priori difficiles à prendre en compte…

2. *Le processus de modélisation :*

Son objectif est de représenter et simplifier grâce à un symbolisme mathématique des situations réelles afin de pouvoir effectuer des calculs pour dégager des propriétés ou prévoir des évolutions. Ces choix de simplification sont arbitraires et sont acceptés par la communauté qui travaille sur le problème si celle-ci considère qu'ils ne modifient pas fondamentalement la situation.

Dans le cas de l'expérience étudiée, tous les modèles considèrent que le spaghetti est un segment de longueur 1. Première simplification qui peut paraître naturelle à des enseignants de mathématiques, mais qui fera certainement l'objet dans une classe de discussion avec des élèves non spécialistes a priori. Ce choix n'est pas indépendant de la simulation envisagée à l'aide d'un outil informatique qui permet d'obtenir des nombres aléatoires entre 0 et 1, puisque la deuxième simplification consiste à dire que les deux coupures correspondent au choix de deux nombres aléatoires x et y compris entre 0 et 1 (cf. simulation 1). L'outil (ou théorie) mathématique qui permet ensuite de réaliser des calculs étant l'équirépatition des nombres sur les intervalles considérés. L'utilisation de surfaces associées facilite ensuite les calculs.

Les modèles des simulations suivantes proposent quelques rectificatifs à ces premières simplifications en modifiant par exemple l'utilisation du second nombre aléatoire y demandé, ou en modifiant l'intervalle auquel appartienne ces nombres (simulation 5) mais dans tous les cas l'équirépartition est un invariant. On aurait pu, par exemple, essayer d'imaginer un modèle avec une fréquence d'apparition du nombre x déterminant la première coupure ayant un profil continu mais « en cloche » entre 0 et 1.

3. *La simulation.*

La simulation permet d'obtenir grâce à l'outil informatique des séries importantes, mais les distributions de fréquences obtenues peuvent ne pas approcher du tout l'expérience réelle. Ces simulations ne pourront donc permettre de valider le modèle inévitablement associé.

Notons de plus que les simulations proposées ici utilisent un tableur, donc se fondent sur le numérique et le tirage de nombres aléatoires. Le problème étudié se prête aussi à une simulation à l'aide d'un logiciel géométrique comme cabri-géométre, même si la simulation est certainement plus difficile à réaliser. Toutefois, le tirage aléatoire d'un point sur un segment dans cabri se fait par l'intermédiaire de coordonnées et repose donc encore sur le numérique et le tirage aléatoire des nombres. L'article « le jeu de franc carreau » [Combes et al, 2001] présente une activité pour les élèves, entre expérience et simulation, où la simulation est faite à l'aide d'un logiciel de géométrie. L'utilisation des surfaces de cette activité pouvant être un bon moyen d'initier les élèves aux interprétations graphiques proposées ici.

4. *La validation du modèle*

De façon générale, nous reprendrons ici l'expression de Nicolas Bouleau [Bouleau, 1999] pour qui un modèle est un simulacre utile et partisan, partisan car " au sein de multiples possibilités d'expression et de représentation, ils sont le choix d'un parti ". Ainsi la question de la validité du modèle englobe divers registres. Nous pouvons nous limiter dans un premier temps à la question de l'adéquation du modèle et de ce qu'il est censé représenter. Pour notre exemple, la tentative d'ajustement (paragraphe 3) permet peut-être de rendre un peu mieux compte de l'expérience, mais quels sont les critères d'adéquation qui peuvent être retenus ? Ceci est encore une autre question, pour d'autres problèmes et d'autres analyses.

En définitive, ce type de problème nous semble permettre de créer, dans une classe de seconde de lycée, un débat sur les conditions de réalisation d'une expérience, sur la réalisation concrète d'une simulation à l'aide d'outils informatiques (tableurs ou calculatrices) qui suppose des choix simplificateurs auxquels les élèves devront se confronter et sur les écarts entre expérience réelle et simulation. On peut enfin citer d'autres problèmes de même type qui permettent de soulever ces mêmes questions : “ comment partager un spaghetti en quatre pour pouvoir construire un quadrilatère ? en six pour pouvoir construire une pyramide ? ”, on change d'espace, de modèle mais entre expérience, simulation et modélisation les mêmes interactions ont lieu.

BIBLIOGRAPHIE

ALDON G. et FEURLY-REYNAUD J., 1994, *«Modélisation en probabilité au lycée»*, IREM de Lyon.

BERNARD R., 1996, *«Observer et agir, mathématiques en seconde générale et technologique»*, IREM de Montpellier.

BERNARD R., FAURE C., NOGUES M., NOUAZE Y., TROUCHE L., 1998, *«Pour une prise en compte des calculatrices symboliques en analyse au lycée»*, IREM de Montpellier.

BOULEAU N., 1999, *«Philosophies des mathématiques et de la modélisation»*, Editions l'Harmattan.

COMBES M-C., LACAGE M., RAVIER J-M., ROUX F. SALLES J., 2001, «Le jeu de franc carreau, expérimentation et simulation», pp. 133 - 143, Des statistiques à la pensée statistique, IREM de Montpellier.

GIRARD J.- C., 1999, *«Le professeur de mathématiques doit-il enseigner la modélisation ?»* , Repères-IREM, n° 36, pp. 7 - 14, Topiques Editions.

HENRY M., 1999, *«L'introduction des probabilités au lycée : un processus de modélisation comparable à celui de la géométrie»*, Repères-IREM, n° 36, pp. 15 - 34, Topiques Editions.

HUGUET F., 1999, *«Simulation et modélisation d'un problème de bouteilles»* , Repères-IREM, n° 36, pp. 35 - 42, Topiques Editions.

HAMMERSLEY L.M. & HANDSCOMB D.C., *«Les méthodes de Monte-Carlo»*, Monographies DUNOD

TROUCHE L., 1998, *«Expérimenter et prouver : Faire des mathématiques au lycée avec des calculatrices symboliques»*, IREM de Montpellier.