MATHEMATIQUES ET EXPERIMENTATION

Isobarycentre et centre d'inertie en première STI

Jean-François LIEVRE
Lycée de la Salle (Nantes)

L'idée première de cet article m'est venue à la suite d'un problème rencontré par un professeur de construction mécanique d'une classe de Première STI Génie Mécanique. Ce dernier m'affirma que bien que les élèves aient étudié le barycentre en mathématiques et le centre d'inertie en mécanique, la plupart d'entre eux pensait qu'il y avait toujours coïncidence entre le centre d'inertie d'un solide et l'isobarycentre de ses sommets alors que les autres cloisonnaient complètement ces deux notions.

J'ai alors travaillé sur une activité dont l'objectif était de remettre à plat ces différentes notions. Une première mouture fut testée en classe mais j'ai été amené à la remanier à la suite de différentes remarques. C'est de cette deuxième version dont je vous entretiens dans les lignes ci-dessous.

Celle-ci fait l'objet d'une réflexion plus large autour de la nécessité d'adapter notre enseignement face aux élèves des filières techniques.

En effet, en novembre 1997, le groupe de Recherches « Enseigner les mathématiques en Premières et Terminales STI » de l'Irem de Rennes publiait un document intitulé « Mathématiques en STI » dans lequel, les auteurs recensaient les caractéristiques du public des séries STI à savoir :

« — élèves ayant eu des difficultés dans leur parcours scolaire,

— orientation subie plutôt que choisie dans beaucoup de cas,

— moyenne d'âge plus élevée avec des écarts importants,

— bonne volonté des élèves,

— habitude de travailler concrètement, d'appliquer des recettes,

— élèves ne ressentant pas la nécessité de démonstrations théoriques,

— nette distinction entre la vie au lycée et la vie en dehors du lycée,

— pas de travail personnel centré sur la réflexion en dehors des cours,

— difficultés à lire des textes et à rédiger correctement dues à des problèmes de « français »,

— élèves déjà sensibilisés à la culture technique par leur origine familiale,

— élèves travaillant le week-end (petits boulots). »

pour conclure que « la plupart de nos élèves actuels de STI auraient été, il y a dix ans, orientés en lycée professionnel en fin de troisième ».

Notre attitude, face à ce public, ne doit pas seulement être l'acceptation de celui-ci dans sa globalité mais doit être l'occasion de nous souvenir de la finalité éducative de notre métier.

A cet effet, il nous appartient à nous, professeurs de la discipline, de réconcilier ces élèves avec les mathématiques et je crois, que pour ce faire, il serait temps de passer à une conception moins dogmatique de notre enseignement sans pour autant faire des mathématiques au rabais.

Pour cela, une démarche expérimentale en mathématiques permet aux élèves de s'approprier les différences et les similitudes entre des notions mathématiques et physiques. De plus, elle développe le sens critique des élèves par la recherche de l'adéquation entre les résultats théoriques et la pratique et en outre, elle rejoint l'histoire des mathématiques depuis Archimède jusqu'à Poincaré.

Cette activité s'inscrit donc dans cette optique et contrairement à ce que l'on rencontre trop souvent dans les manuels à propos de la notion de barycentre, elle ne constitue en aucun cas ni un habillage ni une situation pseudo-concrète.

I - INTRODUCTION

Afin de faire saisir aux élèves comment cette activité s'insère dans un processus global d'interaction entre le raisonnement et la pratique, il est préalablement nécessaire d'expliquer expérimentalement les « outils mathématiques » utiles à celle-ci.

Tout d'abord, on explique la détermination expérimentale du centre de gravité d'un solide par l'expérience suivante :

On suspend un solide plan à un fil par l'un de ses points. La direction du fil indique la verticale du point de suspension. On trace cette direction sur le solide et on répète l'opération pour d'autres points de suspension. Les élèves constatent que toutes les droites tracées se coupent en un même point du solide.

Puis l'on suspend le solide par ce point et les élèves découvrent que l'objet ne « tombe » plus, sa position reste libre : ils ont trouvé le centre de gravité.

De même, les principes P1 , P2 et P3 qui sont énoncés ci-dessous et que les élèves connaissent bien dans un cadre purement mathématique peuvent être compris de tous par l'expérimentation.

P1 : Le barycentre de trois points pondérés est aussi le barycentre de l'un de ces points et du barycentre des deux autres affecté de la somme de leur coefficient. Dans le cas de plus de trois points pondérés, on peut également effectuer des regroupements.

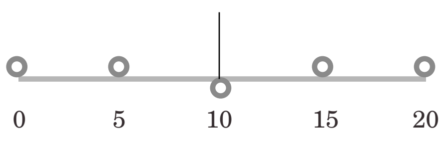
P2 : Le barycentre de points pondérés est inchangé lorsqu'on multiplie les coefficients par un même réel non nul.

P3 : Le « principe » de symétrie.

Souvent, on nomme ces principes de mots barbares : associativité, homogénéité, ... mais ainsi plutôt qu'éclairer les élèves sur le sens même de ces principes, on l'ôte.

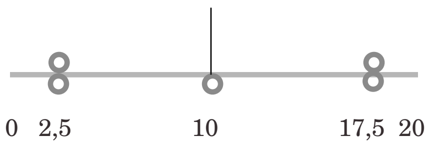
Et pourtant, le principe P1 devient nettement moins dogmatique et donc beaucoup plus parlant pour les élèves lorsqu'on réalise la petite expérience suivante en classe :

Sur une tige métallisée homogène et graduée de longueur 20 cm, on place tous les 5 cm cinq aimants de masse identique. La tige est également munie d'un système d'accroche que l'on peut déplacer longitudinalement et qui doit permettre de la suspendre à un portant. Bien évidemment, on constate l'équilibre de la tige lorsqu'on place le système d'accroche au milieu de celle-ci :

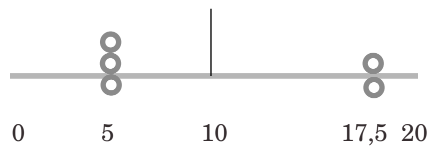


Puis, l'on regroupe les 5 aimants de différentes manières :

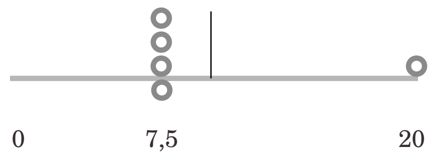
Regroupement 1 :



Regroupement 2 :



Regroupement 3 :



Les élèves constatent expérimentalement que le centre d'équilibre est inchangé. C'est maintenant — et seulement maintenant — qu'il est possible de passer au barycentre d'un système fini de points pondérés qui constitue une abstraction de la situation concrète réalisée.

De la même façon, le deuxième principe — qui n'en est pas un à proprement parler — est nettement mieux saisi par les élèves lorsqu'on s'accorde à dire qu'il revient simplement à changer l'unité de mesure des masses, ce qui ne saurait en aucun cas avoir une influence sur la position du centre de gravité. Une petite expérience comme ci-dessus en remplaçant le nombre d'aimants initial par un multiple convaincra les plus sceptiques des élèves.

Le principe P3 est vérifié expérimentalement sur quelques cas particuliers : on suspend différents solides présentant différentes symétries les ramenant sur eux-mêmes et on constate que le point de suspension pour lequel la position de l'objet reste libre est suivant les cas le centre de symétrie de l'objet ou bien appartient à l'axe de symétrie ou encore au plan de symétrie : le centre d'équilibre accompagne l'objet dans son déplacement sur lui-même.

Désormais armés d'un langage mathématique qui a pris du sens dans une réalité expérimentale, les élèves sont alors naturellement disposés à suivre l'enseignant dont le rôle immédiat dans l'activité est de les amener à découvrir de nouvelles propriétés, à approfondir leurs connaissances et — surtout — par ce biais à les réconcilier avec une discipline trop souvent jugée comme sans utilité pratique, mais aussi par la confrontation raisonnement / pratique éveiller leur sens critique et ainsi participer à leur éducation de futur citoyen.

II - Partie I de l'activité : Ce que l'on peut faire avec trois points (voir texte de l'activité en annexe)

Dans la question A), les élèves apprennent à déterminer la position du point G isobarycentre de trois points A, B, C. Ce résultat permettra de placer, lors des expériences, le point G sur les systèmes étudiés dans la suite de l'activité et ainsi de pouvoir comparer la position de G et du centre d'inertie de chaque système.

La question B) est traitée par les élèves en formant deux groupes distincts : un groupe pour la question B1 et l'autre pour B2. Après confrontation et synthèse des résultats obtenus dans chacun des groupes, on est amené à proposer le résultat suivant :

Il n'y a coïncidence entre le centre d'inertie d'un système de 3 tiges homogènes et l'isobarycentre de ses sommets si et seulement si les trois tiges sont de même longueur.

Même si le raisonnement proposé aux élèves dans l'activité pour amener ce résultat n'est pas tout à fait rigoureux, il a le mérite d'être relativement clair à leurs yeux. De plus, cet exemple est très instructif pour leur faire distinguer « symétrie géométrique » et « symétrie mécanique », cette dernière supposant en plus de la symétrie géométrique, une « symétrie des masses » et leur montre d'une manière simple que le principe de symétrie ne « fonctionne correctement » qu'avec cette « symétrie mécanique ».

On se propose ensuite de confronter ce résultat mathématique à l'expérience :

On crée plusieurs systèmes de trois tiges identiques et homogènes sur lesquels on scotche une feuille de papier calque. Sur celle-ci, on inscrit le point G isobarycentre des sommets des différents systèmes à l'aide du résultat de la question A). Les trois systèmes ainsi fabriqués sont :

— un système de trois tiges identiques et homogènes de longueurs toutes différentes,

— un système de trois tiges identiques et homogènes dont deux tiges de même longueur,

— un système de trois tiges identiques et homogènes et toutes de même longueur.

Puis, on détermine expérimentalement — en procédant comme lors de l'introduction — le centre de gravité G' de ces différents systèmes.

C'est avec d'abord de l'étonnement puis une certaine joie que les élèves constatent la validité de leur résultat théorique, mathématique. Ils ont enfin l'impression que les mathématiques rejoignent le monde réel et même plus, deviennent un outil pour expliquer la nature.

Dans la question C), on se propose d'effectuer le même travail avec la même démarche mais cette fois-ci avec une plaque triangulaire supposée homogène. Cette partie constitue en fait une vérification *a posteriori* du principe de symétrie oblique pour les plaques homogènes.

Le comportement des élèves est tout autre lors de la recherche de la partie théorique de l'activité proposée : ils sont devenus curieux et pressés de confronter à nouveau cette théorie à la pratique. On peut ici penser qu'ils « font » des mathématiques au sens premier et historique du terme : les mathématiques ne sont plus un jeu de l'esprit mais une activité remplie de signification.

Ici, la partie théorique nous permet de conclure *qu'il y a toujours coïncidence entre l'isobarycentre G des sommets de la plaque triangulaire et le centre d'inertie G" de cette plaque.*

D'où le résultat théorique suivant : *le centre d'inertie d'une plaque triangulaire homogène n'est pas changé si on enlève presque toute la plaque et si on ne garde que 3 points matériels aux 3 sommets de la plaque, ces trois points ayant la même masse.*

On vérifie bien que le principe (pas si évident intuitivement) de symétrie oblique « tient la route » en ce sens qu'il est cohérent avec le principe d'associativité lorsqu'on découpe le triangle en deux triangles. Nous le faisons ici pour le découpage selon une médiane.

C'est alors avec délectation que les élèves entament la vérification expérimentale : on fabrique plusieurs plaques triangulaires en carton fort (quelconques, isocèles, équilatérales) sur lesquelles on place au crayon l'isobarycentre G des sommets.

Puis on les suspend afin de déterminer expérimentalement le centre de gravité G" et le soulagement de la classe arrive lorsqu'on constate bien sur toutes les plaques suspendues l'égalité G = G". Les élèves comprennent que tout se tient dans son ensemble : le raisonnement explique la pratique et la pratique « vérifie » le raisonnement.

II - Partie II de l'activité : Une possibilité avec quatre points (voir texte de l'activité en annexe)

On suppose que les quatre points sont coplanaires mais tels que trois quelconques d'entre eux ne sont pas alignés.

La question A) a pour objectif de déterminer la position de l'isobarycentre des quatre sommets.

Quant à la question B), elle amène les élèves à la construction du centre d'inertie d'une plaque quadrilatère quelconque (sans symétrie aucune) par un jeu de deux décompositions différentes du quadrilatère en deux triangles. C'est aussi l'occasion de les ouvrir à des raisonnements simples.

On conclut mathématiquement, sans vraiment le démontrer, qu'il ne peut y avoir coïncidence entre l'isobarycentre des sommets et le centre d'inertie que si le quadrilatère admet un centre de symétrie c'est-à-dire si c'est un parallélogramme.

La démarche expérimentale va ici consister en la fabrication en carton fort de plusieurs plaques quadrilatères (des plaques quelconques et des plaques formant des parallélogrammes), de placer au crayon sur chacune d'elles l'isobarycentre et le centre d'inertie prévus par la partie théorique puis de les suspendre pour déterminer expérimentalement leur centre de gravité.

Et les élèves constatent bien d'une part que le centre d'inertie prévu, calculé, déterminé théoriquement est celui déterminé expérimentalement et d'autre part qu'il n'y a coïncidence entre l'isobarycentre des sommets et le centre d'inertie que sur les plaques formant un parallélogramme.

III - Conclusion

Cette activité par sa dualité raisonnement / pratique aura permis — outre la mise au point et l'approfondissement de certaines notions — la réconciliation avec les mathématiques d'élèves de lycée technique qui depuis leur prime enfance connaissent des difficultés de réussite scolaire dans cette discipline et qui par conséquent éprouvent souvent un sentiment de dégoût voire de rejet envers un monde qui leur semble d'une part inaccessible et d'autre part sans utilité pratique.

Nous devons adapter notre façon d'enseigner à ce nouveau public que constitue une génération de jeunes ne vivant que dans l'instant présent et que n'interpellent uniquement les démarches intellectuelles aboutissant à une signification pratique.

L'esprit des programmes actuels — contrairement à celui des mathématiques modernes — consiste à placer l'élève devant une problématique qui a du sens pour lui. Néanmoins, si cette manière de voir les choses réduit le « non-sens abstrait » quelle que soit l'origine des élèves, elle tend à devenir obsolète pour ceux des filières techniques. Il est temps d'aller plus loin encore, de dépasser la démarche actuelle qui n'est bien trop souvent qu'un habillage superficiel de problèmes mathématiques, qu'une succession de problèmes pseudo-concrets.

Je pense que les mathématiques doivent évoluer vers une approche plus constructiviste, plus expérimentale et que la mise en place des NTIC devrait constituer un point de départ d'une réflexion plus large sur le rôle actuel de l'enseignement des mathématiques au risque sinon de provoquer une fracture irrémédiable entre nos élèves et nous.

ANNEXE

ISOBARYCENTRE ET CENTRE D'INERTIE

PARTIE I - Ce que l'on peut faire avec trois points A, B, C non alignés

A) On considère le système formé des trois points A, B, C non alignés ayant la même masse. On suppose donc que le « système » permettant de maintenir A, B et C les uns par rapport aux autres est de masse négligeable par rapport à la masse des trois « points matériels » A, B et C.

On note G' le milieu de [BC].

Trouver le centre d'inertie G de ce système de trois points matériels :

1) en utilisant les principes P1 et P2

2) en utilisant le principe P3.

B) On considère le système formé de trois tiges homogènes [AB], [BC] et [CA] supposées avoir toutes la même masse par unité de longueur.

On note BC = a, CA = b et AB = c.

On notera respectivement G_1, G_2, G_3 les centres d'inertie des tiges [AB], [BC] et [CA].

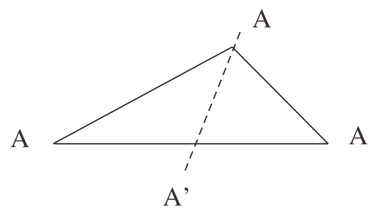
1) On se propose de déterminer G' le centre d'inertie de ce système de trois tiges en utilisant les principes P1 et P2 dans le cas particulier où AB = AC = b et BC = a.

1.1) Soit G_4 le milieu de [G_1G_3], expliquer pourquoi G' est le barycentre de (G_4, 2b) et de (G_2,a).

1.2) Exprimer alors $\overrightarrow{AG'}$ en fonction de $\overrightarrow{AG_2}$ et $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AG_2}$ où G est le point introduit en A).

1.3) Exprimer $\overrightarrow{AG'} - \overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AG_2}$. A quelle condition a-t-on G' = G ?

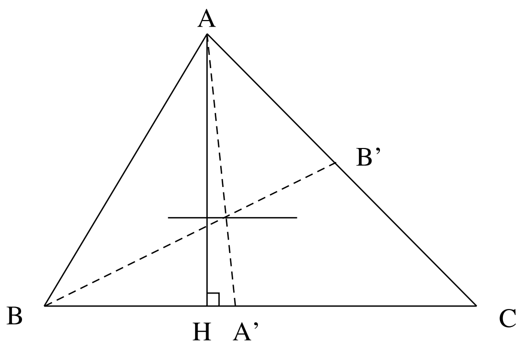
2) On veut maintenant déterminer G' en utilisant le principe P3.



A' est le milieu de [BC].

2.1) L'ensemble géométrique des trois tiges [AB], [AC] et [BC] admet (AA') comme axe de symétrie, la direction de la symétrie étant la direction de (BC).
Soit G_5 le barycentre de [AB] ∪ [BA']. De quel couple de points pondérés est-il le barycentre ?
Soit G_6 le barycentre de [AC] ∪ [CA']. De quel couple de points pondérés est-il le barycentre ?
2.2) Compléter la phrase suivante : le centre d'inertie cherché G' est le barycentre de (G_5, ...) et de (G_6, ...).
G' est-il en général sur (AA') ? Sinon à quelle condition l'est-il ?

C) On considère la plaque triangulaire (ABC) supposée homogène.
A' est le milieu de [BC]. B' est le milieu de [AC].
La plaque triangulaire (ABC) admet (AA') comme axe de symétrie.
Soit G_7 le centre d'inertie de la plaque (ABA') et G_8 le centre d'inertie de la plaque (ACA').



Calculer l'aire de (ABA') et de (ACA').
En déduire la position de G_7 et G_8 par rapport à (AA').
Que peut-on conclure pour G" centre d'inertie de la plaque ?

En procédant de même en considérant (BB') comme nouvel axe de symétrie de la plaque (ABC), a-t-on G" = G où G est le point introduit en A) ?

D) Conclure quant à la coïncidence entre isobarycentre d'un système de trois points non alignés A, B et C et le centre d'inertie des systèmes formés à partir de ces trois points.

Partie II - Une possibilité avec quatre points A, B , C, D

On suppose que les quatre points A, B, C, D sont dans un même plan mais tels que trois quelconques d'entre eux ne soient pas alignés.

A) Supposons de plus que A, B, C, D soient affectés du même coefficient et cherchons G l'isobarycentre des quatre points A, B, C, D.

1) Si A, B, C, D sont quelconques, peut-on déterminer G en utilisant le principe P3 ?
2) Déterminer G en utilisant le principe P1.

B) Construction du centre d'inertie K de la plaque ABCD.

1) En utilisant la coïncidence remarquée dans le cas du triangle dans la première partie, construire les centres d'inertie D', C', B' et A' des plaques triangulaires ABC, ABD, ACD et BCD.
2) Localiser K.

C) Conclure

BIBLIOGRAPHIE

GASSER, Jean-Luc : *Mathématiques et Sciences Physiques*, Repères IREM n° 25 octobre 1996.

GROUPE DE GEOMETRIE IREM de BORDEAUX : *La notion d'équilibre*, 1990.

GROUPE DE RECHERCHES « Enseigner les mathématiques en Premières et Terminales STI » IREM de RENNES : *Mathématiques en STI*, Novembre 1997.

HENRY, Michel : *Physique - Mathématiques : mariage d'amour ou mariage de raison ?*, Bulletin IREM de Besançon n° 56 juin 1995.

IREM de STRASBOURG : *Le livre du problème vol. 5 : calcul barycentrique*, Editions Cedic, 1975.

LEGRAND, Marc : *Mathématiques, mythe ou réalité*, Repères IREM n° 20 juillet 1995.

MEYER, Etienne : *Itinéraire d'un enseignant entre concret et abstrait*, Repères IREM n° 23 avril 1996.