REPERES - IREM . N° 45 - octobre 2001

SUR LA VISION GEOMETRIQUE

Pierre TERRACHER
Irem de d'Aquitaine

Le texte qui suit est celui de la conférence d'ouverture du colloque de la commission Inter-Irem de géométrie consacré au constructions géométriques, qui a eu lieu au Quesnoy en juin 1994.

PARTIE I

INTRODUCTION

Il m'est agréable et commode d'ouvrir la partie scientifique de ce colloque en évoquant Henri Matisse :

— agréable parce que je sais que nos amis les Nordistes ont prévu pour demain après-midi une visite au Musée Matisse, dans ce village du Cateau pas très éloigné d'ici. Et donc, d'emblée, voilà l'occasion qui m'est fournie de leur dire combien l'assemblée ici réunie frétille déjà à l'idée des réjouissances scientifiques, culturelles et conviviales – faut-il vraiment préciser que ce dernier point nous émeut particulièrement, nous, les Sudistes ? – réjouissances donc qu'il ont – nous le savons à l'avance - parfaitement orchestrées ;

— commode parce que cette citation de Matisse : “la création commence à la vision” va me permettre de préciser le territoire où s'inscrit cette conférence : celui de la **création Mathématique**, étant entendu que cette expression n'est pas d'un pompeux écrasant : elle concerne sans réserve nos élèves de collège, de lycée, nos étudiants à l'université,..., nos collègues et nous même et d'autres en dehors de la corporation dès lors qu'il s'agit de chercher et résoudre des problèmes de mathématiques.

Ceci posé, je ne vais pas m'attarder outre mesure dans la présentation de ce qui va suivre. J'éprouve seulement le besoin de faire ressortir trois points :

• Ce sont **des problèmes mathématiques** qui vont tendre le fil conducteur de cette conférence : c'est peut-être moins prestigieux qu'un exposé théorique habilement mijoté mais je trouve que c'est plus pratique comme support de réflexion et plus vivifiant pour stimuler les questions. Et de plus, compte tenu de l'intérêt (annoncé) que nous allons porter à la création de mathématiques, cet angle d'attaque est le moins insolite, assurément.

Par ailleurs — vous le verrez — la notion de vision géométrique se décline sous des réalités multiples et sur des plans très divers.

Bref, c'est souvent dispersé, enchevêtré, presque toujours touche à tout et tout le temps infesté de turbulences variées.

Il n'était donc pas idiot d'essayer de mettre un peu d'ordre dans tout cela. C'est l'unique raison pour laquelle j'ai découpé en tranches cet exposé, chaque tranche ayant une teinture mathématique précise : Analyse, Combinatoire, Probabilités, etc.

J'ai l'air de m'appesantir sur un pas grand chose, mais c'est pour ne pas revenir sur le fait que les diverses facettes sous lesquelles se manifeste la vision géométrique ne sont pas étiquetées Analyse, Combinatoire, etc. quand bien même il m'arriverait de "parler " de vision géométrique en Combinatoire par exemple.

• Des problèmes de Mathématiques donc et des solutions ou plutôt **des ébauches de solutions**.

Voilà le deuxième point.

Je sais qu'ici le plaisir solitaire de la passivité béate n'a pas fait d'adeptes et que chacun voudra truster ces problèmes — au sens bricoler, chercher un peu, se faire une idée — avant que ne soit révélée la moindre piste.

Ce serait un très bon scénario que j'introduirais à l'aide d'une citation de Saint Exupéry : "connaître, ce n'est point démontrer, ni expliquer c'est accéder à la vision. Mais pour voir, il convient d'abord de participer..."

Mais vous devinez juste en craignant que cela ne se déroule pas exactement ainsi.

Je pourrais évoquer pour ma défense les contraintes liées à cette forme de communication magistrale (comme celle du temps par exemple) où vous faire amadouer qu'après tout, vous n'êtes pas à une frustration du métier de plus ou de moins, etc.

Mais la vraie raison est ailleurs : *je veux examiner de près ces moments particuliers dans la recherche d'un problème où une certaine vision géométrique est prête à se manifester, pourquoi maintenant et pas avant — et cela va de soi — sous quels aspects elle se manifeste*. C'est une telle brochette d'instantanés que j'appelle maladroitement "ébauche de solution" ; ce n'est donc pas un réseau de pistes pour résoudre.

En résumé, et pour le dire — si vous me le permettez — d'une façon plus de saison, d'une part il y a des quartiers de tomate que je vais décortiquer et d'autres non ; je laisserai tomber par exemple les malheureux morceaux chargés des lourdeurs de la démonstration, et, d'autre part c'est uniquement ce que je voulais regarder attentivement (et que je viens de décrire) qui m'a guidé dans la sélection.

• Un dernier point, avant d'en venir aux prises avec les choses sérieuses.

"De la main à l'ordinateur " est le titre de ce colloque. Evidemment la signification est épistémologique et l'on peut affirmer — nul besoin d'être un spécialiste — que c'est la pensée qui est le maître d'œuvre de cette évolution étalée sur plus d'une bonne vingtaine de siècles. Or la vision géométrique si, comme son nom l'indique, semble s'adresser aux yeux, est avant tout *une affaire de neurones*. C'est pour cela, je pense, qu'elle est hébergée — et bien hébergée — dans ce colloque.

Venons en maintenant aux choses sérieuses.

PARTIE II

QUELQUES EXEMPLES ISSUS DE L'ANALYSE

1. INTRODUCTION

Ouvrir une série d'exemples sur la vision géométrique par l'étude de quelques situations issues de l'Analyse est un choix perspicace.

En voici pour le moins deux raisons :

• le terrain est familier

Je veux parler de *l'interprétation graphique* dont il n'y a pas lieu ici de battre la réclame de ses bienfaits (chacun sait la pertinence et la diversité du point de vue). Et c'est bien parce qu'il faut savoir s'imposer des limites que je n'évoquerai par la suite que quelques-uns des aspects coutumiers :
«fonction / courbe» , «dérivée / tangente»
et «intégrale / aire».

• Le terrain est d'emblée propice à une saisie de ce qu'il y a lieu de tenir pour l'essentiel, à savoir :

D'une part la vision géométrique que j'appellerai parfois dans cette partie vision graphique — merci de ne pas chicaner — ne coïncide pas avec l'interprétation graphique et d'autre part elle est un outil de **recherche** d'un problème, de **conjecture** mais aussi de **résolution** (et non une cuisine sous-mathématique dépréciée d'avance devant des arguments plus scrupuleux jugés plus orthodoxes).

Quelques exemples pour étayer ces affirmations, les uns provenant du calcul différentiel, les autres en rapport avec le calcul intégral, mais aussi — en conclusion de cette série — l'étude d'une situation d'origine cinématique.

2. UN EXEMPLE DU CALCUL DIFFÉRENTIEL

2.1. Le problème abordé

L'énoncé

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . Montrer que la fonction dérivée f' vérifie le théorème de la valeur intermédiaire sur tout intervalle [a , b] contenu dans I .

Une remarque

Sachant qu'une fonction continue satisfait au théorème de la valeur intermédiaire, on travaillerait pour peu de chose si toute fonction dérivable avait une dérivée continue. Ce n'est pas le cas — cela se saurait par ailleurs — comme vient le confirmer l'exemple (incontournable) suivant :

«La fonction f définie sur **R** par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{pour } x \neq 0 , \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

est dérivable sur **R** , mais sa dérivée est discontinue au point 0» (il est facile, avec quelque acharnement, d'améliorer la pathologie de l'affaire).

Le contexte

Le problème ci-dessus peut paraître un exercice de style. Il n'en est rien dès lors qu'on le replace dans sa perspective historique.

Voici une question particulièrement aiguë, fin XIXème siècle, début XXème siècle :

> *" Quelles sont les fonctions admettant une primitive sur un intervalle ? "* ,

question en liaison étroite avec l'intégration, dont l'une des tâches est d'élucider la demande corollaire — et embarrassante — : "comment calculer une primitive d'une fonction qui en admet une ? ".

Laissons là sur ce sujet après avoir noté que c'est Lebesgue qui fit connaître les heureuses élues de la consultation engagée et que le résultat qui nous motive ici est dû à Darboux.

2.2. Vers une solution

Une piste

Cet exercice est familier en DEUG, mais — crainte de ratages ? — il est systématiquement accompagné de l'indication suivante : « soit a et b deux points de I avec $a < b$. Supposer $f'(a) < f'(b)$ et pour tout réel m tel que $f'(a) < m < f'(b)$, considérer la fonction f définie par $f(x) = \dots$ »

Et là, à la place de nos pointillées, vient s'inscrire la fonction qui «marche» (i.e. celle qui va livrer un « c » tel que $f'(c) = m$ comme heureuse issue d'un bricolage de phénomènes différentiels jugé accessible à tout étudiant assidu un peu vaillant).

Eh bien, ici : rien de tout cela.

L'interprétation graphique

Elle est simpliste ou canonique si l'on tient à dire autrement.

Représentons une fonction dérivable sur un intervalle I — en fait, le dessin nous contraint quasiment à représenter une fonction de classe C^1 par morceaux [1] — et deux points a et b tels que $a < b$ et $f'(a) < f'(b)$ (par exemple).

Ajoutons une droite de pente m convenable (i.e telle que $f'(a) < m < f'(b)$) . Il va s'agir d'obtenir un point situé entre a et b où la tangente à la courbe est également de pente m …

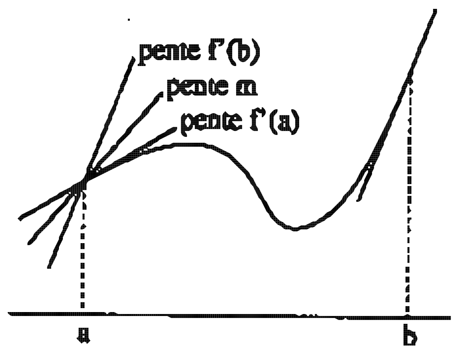


Fig. 1

1 la raison ? Supposez f dérivable et f' discontinue en x_0 . Alors $f'|_{I-\{x_0\}}$ (restriction) n'a pas de limite en x_0 (accroissements finis), ce qui du point de vue graphique nous met dans un certain embarras...

Une vision graphique[2] : Comment débusquer un tel point ,

On *voit* (lire : “*on observe avec ses yeux*”) — et c’est donc là que prend place la vision géométrique du phénomène — qu’en balayant par des droites parallèles à la droite Δ_m (droites toutes de pente m), la tangente cherchée est parmi toutes ces droites qui rencontrent la courbe celle qui est *la plus éloignée* de la droite Δ_m (ou pour le moins, localement la plus éloignée).

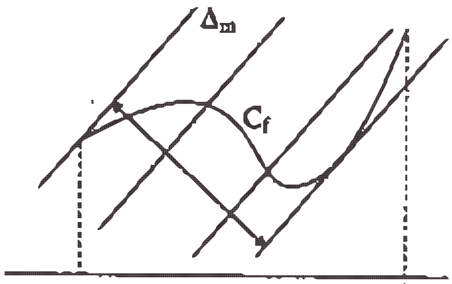


Fig.2

D’où l’idée d’introduire pour chaque x de [a , b] , la droite $\Delta_m(x)$ de pente m passant par le point M(x , f(x)) et d’étudier son écart avec la droite Δ_m .

Nul besoin d’être très exercé pour deviner que calculatoirement ce n’est pas un cadeau. En revanche (et cela va expliquer la présence de la figure ci-contre, en haut) : M M’ est facilement évaluable, et surtout, MM’ est proportionnelle à MH (angle constant et trigonométrie rudimentaire).

Nous y sommes.

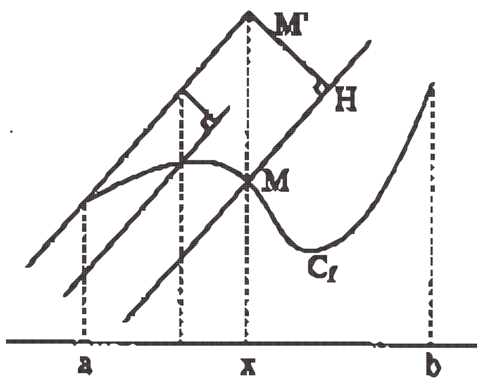


Fig.3

Une solution. Rapidement :

- Equation de la droite $\Delta_m(x)$:
  $y = m(x - a) + f(a)$
- Equation de C_f : $y = f(x)$
- Introduisons la fonction φ :
  $\varphi(x) = m(x - a) + f(a) - f(x)$

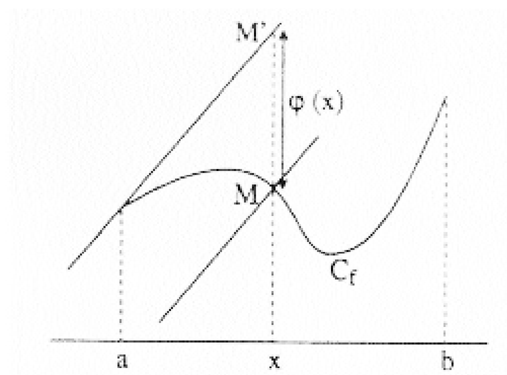


Fig. 4

Nous avons alors $\varphi'(x) = m - f'(x)$ et nous voilà donc rendus à l’étape du bricolage différentiel annoncée plus haut : *établir que* φ *pos-*

2 Il y aurait donc une interprétation graphique et une vision graphique ?

sède un maximum sur l'ouvert]a , b[, seul moyen de donner naissance à un point où la dérivée s'annule.

Comme f est continue sur [a , b] , le théorème de la valeur extrême procure déjà un maximum sur le fermé [a , b] : il faut *é-li-mi-ner*.

Avec $\varphi'(a) = m - f'(a)$, qui est strictement positif, ce maximum ne peut être atteint en a . En effet, si une courbe qui a un sommet s'élève dès le départ, ce n'est donc pas au départ qu'il faut chercher le sommet. Nous devons comprendre, de façon moins imagée, que c'est la définition même de la dérivée qui permet d'affirmer cela, et pas autre chose.

Supposez que pour $x \geq a$, on ait $f(a) \geq f(x)$.

Alors $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$ et donc à la limite $f'(a) \leq 0$.

De la même façon ou presque, la donnée $\varphi'(b) < 0$ permet d'affirmer que ce maximum n'est pas atteint en b .

La fin est du tout-venant : la fonction φ dérivable sur]a , b] , admettant un maximum sur cet ouvert voit ainsi sa dérivée s'annuler sur]a , b] .

2.3. Quelques notes et remarques

Un carcan apprêté ?

Le titre ci-dessus nous sert de métaphore pour attirer l'attention sur une tendance fâcheusement durable qui consiste à *réduire la vision géométrique de certains phénomènes différentiels à une simple interprétation graphique figée*. Et, faut-il le dire ? Se feraient prendre en délit de mauvaise foi tous ceux qui voudraient comprendre que nous tirons à vue sur l'interprétation graphique de ces phénomènes.

Ce que nous voulons faire entendre..., mais un exemple va être plus à même de le faire apprécier, d'autant qu'il est «accablant»…

Un exemple «accablant»

Nous ne pensons pas défigurer, dans les propos qui suivent, la manière dont est enseignée (université, classes préparatoires, ...) la nourrissante lignée : "Théorème de Rolle. Théorème des accroissements finis ". Voyons ce dont il s'agit :

Le théorème de Rolle : Il permet d'affirmer que *Si une fonction* f *est définie, continue sur* [a , b] *dérivable sur*]a , b[*et telle que* f(a) = f(b)*, alors il existe* c *appartenant à*]a , b[*tel que* f'(c) = 0 .

La démonstration standard explique que si la fonction f n'est pas constante — sinon, rien à dire — le théorème de la valeur extrême livre un extrêmum sur l'ouvert]a , b[(hypothèse de continuité). L'aspect différentiel prend ensuite le relais, de la manière dont nous l'avons évoquée dans l'exemple 1 : "si une fonction dérivable sur un intervalle ouvert admet un extrêmum, la dérivée s'annule".

Et d'illustrer (cf. figure) :

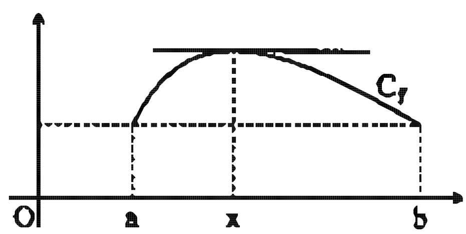


fig. 5

Le théorème des accroissements finis

On le présente comme une généralisation du théorème de Rolle, *via* la remarque que, dans des conditions de régularité convenables :

"Rolle" : si il y a une sécante à la courbe horizontale, il y a une tangente horizontale.

"Accroissements finis" : il existe une tangente parallèle à une sécante donnée.

D'où, l'énoncé :

Soit f *une fonction continue sur* [a , b] , *dérivable sur*]a , b[. *Alors il existe* c *appartenant à*]a , b[*tel que :*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} .$$

Le scénario de la démonstration est immuable : *«on» applique Rolle à la fonction* φ définie par

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

C'est tout à fait faisable : φ est continue sur [a , b] , $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ et φ est dérivable sur]a , b[avec (miracle ?) :

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} .$$

Simple
Elégant
Insaisissable

Et chacun de se dire que la fonction φ fait partie de ces choses génialement conçues et que le dénommé Michel ROLLE était un sacré découvreur (un farceur incorrigible ?).

Et tout étudiant de "s'apprendre" cette ruse incontournable de la démonstration des Accroissement finis — au cas où... — parce que : "qu'est-ce qui pourrait venir supplanter une telle astuce ?". Et, etc.

Et nous pensons qu'il est aisé de comprendre pourquoi il en est ainsi : *nous avons perdu quelques chose en chemin.*

La vision dynamique

L'interprétation graphique que nous faisons de l'extrêmum se nourrit, pour l'essentiel, d'images statiques, déjà installées, peu loin d'être enfermées dans la triple liaison :

extrêmum ⟷ dérivée nulle

tangente horizontale

et ne faisant aucune part – ou en tout cas, jamais la part belle – à la *vision dynamique du phénomène*. Nous avons laissé en cours de route — en fait, nous nous en sommes privés dès le départ — la palette d'images issue de la Géométrie de mouvement, le mouvement consistant ici en un balayage par des droites parallèles à l'axe (Ox) ou encore à la droite (AB) (remarque qui — on le verra dans la suite — est moins inoffensive qu'il n'y paraît).

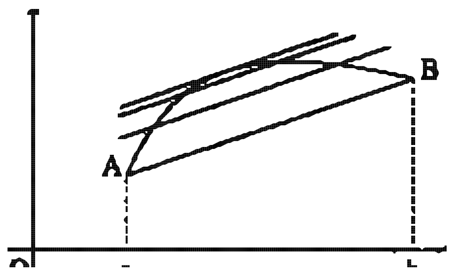


Fig. 6

Et, (comme nous tentons de le rendre visible par le dessin (figure 6)), parmi les droites parallèles à (AB) qui rencontrent la courbe, celle qui est la plus éloignée de (AB) (ou localement la plus éloignée) correspond à un extrêmum.

Nous voilà ainsi arrivés au moment de l'histoire où chacun peut se dire que ce que nous avons mis à jour est d'une banalité dérisoire et simpliste, qui ne mérite pas vraiment d'être mentionnée est — qui la mentionne d'ailleurs ? — et même se demander s'il y avait là matière à en faire un plat.

Attendez un petit peu : les conséquences n'ont pas encore produit le moindre effet. Pour s'en convaincre, il faut accepter que nous radotions encore un peu, et donc, que *nous disséquions de nouveau les accroissements finis...*

Ce ne peut être une découverte terrible maintenant que de deviner que l'endroit où la tangente est parallèle à la sécante (AB) correspond à un écartement maximum entre la droite (AB) et les sécantes à la courbe qui lui sont parallèles : il n'y a qu'à *balayer*.

Et pour des raisons purement calculatoires — comme nous l'avons déjà expliqué — c'est par la grandeur Mm (figure 7) que nous allons mesurer cet écartement. Dans ces conditions, «l'écart en x» est calculé par :

$$[\text{écart en } x] = f(x) - y(x)$$

avec $y(x)$ = ordonnée de m ,

soit : $y(x) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$

D'où : $[\text{écart en } x] = \varphi(x)$. Evidemment.

Voilà

Simple
Elégant
Mais saisissable.

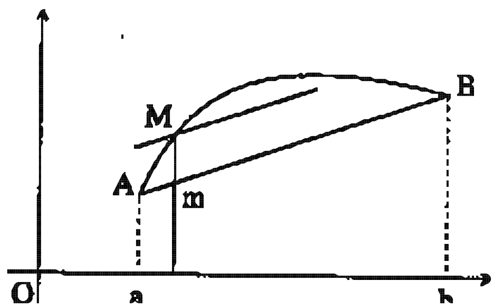


figure 7

2. UN EXEMPLE DU CALCUL INTÉGRAL

3.1. Le problème abordé

L'énoncé : Etudier le comportement à l'infini de la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \int_a^b |\sin nx|\, dx$$

Quelques idées

Une *première idée*, dont les visées sont immédiatement calculatoires, consiste à décomposer [a , b] en intervalles où $\sin nx$ garde un signe constant :

- $|\sin nx| = \sin nx$ se produit lorsque le réel x se situe dans un intervalle du type
  $$[\,2k\pi / n \,,\, (2k + 1)\pi / n\,]$$
  où k est un entier relatif.
- $|\sin nx| = -\sin n x$ est à déclarer pour x appartenant à un intervalle de l'espèce restante, à savoir (avec toujours k dans **Z**) :
  $$[\,(2k - 1)\pi / n \,,\, 2k\pi / n\,] .$$

D'où l'introduction du plus petit entier p tel que..., du plus grand entier q tel que... suivie de décompositions, d'intégrations, de sommations, d'estimations et autres menues chicanes.

Découragés d'avance par le scénario pas très confortable que laissent envisager les calculs à conduire — quand bien même ils n'exigeraient pas de colossales prouesses de technicité — , il nous vient une deuxième idée :

Faire un dessin

Il y a matière à "agglomérer " avec cette figure. Trop, peut-être. Il ne semble pas manquer de prétextes en effet — resserrage des arches, becs blancs de plus en plus fins, mais de plus en plus nombreux, ... — pour pronostiquer le remplissage total à la limite. Ou quelque chose d'autre. C'est ennuyeux, mais c'est ainsi : pour n grand, la visite de la figure dans ses moindres méandres, laisse peu de marge de manœuvre[3] pour une *vision claire* du phénomène.

C'est là — et le paradoxe n'est qu'apparent — qu'il faut prendre du recul pour regarder de plus près : au lieu d'encastrer des arches de plus en plus étroites entre deux murs fixes, nous allons écarter de plus en plus les murs cernant des arches calibrées une fois pour toutes. Inutile de vous expliquer plus longtemps que nous allons procéder *à un changement de variables*.

3.2. Vers une solution : Le changement de variables $u = nx$, conduit à la relation

$$u_n = \frac{1}{n} \int_{na}^{nb} |sin nx| \, dx$$

et au dessin de la figure 9 :

Fig. 8

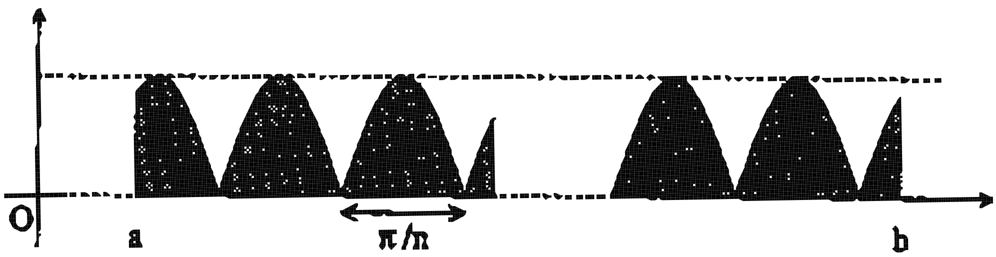
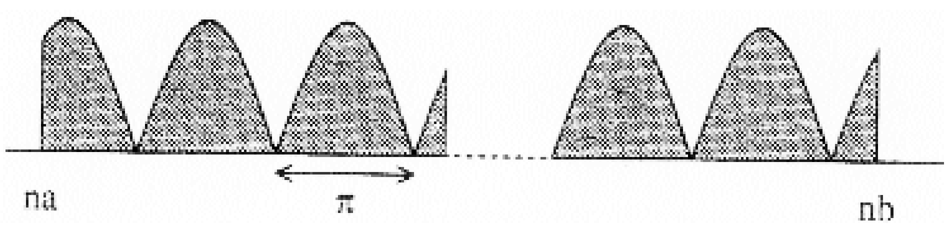


Fig. 9



3 au sens propre du terme.

Estimer $\int_{na}^{nb} |sin nx|\, dx$, c'est-à-dire l'aire du domaine représenté figure 9 est maintenant aisé :

• Aire d'une arche : 2 (c'est connu ou à connaître),

• Nombre d'arches : $\dfrac{nb - na}{\pi}$ environ.

D'où : $\int_{na}^{nb} |sin nx|\, dx \approx \dfrac{nb - na}{\pi} \times 2$, ce qui permettrait de conclure à :

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \frac{2}{\pi}(b - a) .$$

Notez que nous sommes soumis à l'usage du conditionnel dans la phrase précédente, sans contrôle d'erreur sur l'estimation du nombre d'arches.

Justement, l'erreur commise en évaluant l'aire $\int_{na}^{nb} |sin nx|\, dx$ par $\dfrac{nb - na}{\pi} \times 2$ est majorée par :

[erreur commise sur le nombre d'arches] x 2

(2 = aire d'une arche).

Comme nous nous trompons d'au plus deux arches (une à chaque extrémité), nous avons : $\left| \int_{na}^{nb} |sin nx|\, dx - \dfrac{nb - na}{\pi} \times 2 \right| \le 4$

d'où : $\left| u_n - \dfrac{b - a}{\pi} \times 2 \right| \le \dfrac{4}{n}$ et cette fois sans la moindre restriction : la suite (u_n) a pour limite $\dfrac{2}{\pi}(b - a)$.

Avant d'en venir aux premiers commentaires déjà nombreux que j'aurais à porter sur la vision géométrique concernant le calcul différentiel et le calcul intégral, je vous propose un dernier exemple.

Situé dans le contexte cinématique, c'est à première vue, par rapport au thème qui nous préoccupe, une sorte de cerise sur le gâteau. Mais nous verrons qu'il possède d'autres vertus installées en dehors de la pâtisserie.

4. UN PROBLEME DE CINÉMATIQUE

4.1. Le problème abordé

Un véhicule parcourt une distance de 100 km. Au départ, sa vitesse est nulle et à l'arrivée elle vaut 100 km/h. Sachant que son accélération ne cesse d'augmenter, peut-on trouver la durée minimale du parcours ?

4.2. Remarques préliminaires

• J'ai extrait ce problème de l'édition 1972 de “The William Lowell Putnam Mathematical competition”. La compétition Putnam est une épreuve annuelle ouverte à tous les mathématiciens non diplômés d'Amérique du Nord et les problèmes posés sont en général de petits chefs d'œuvre et de véritables défis.

• Ce problème a de quoi nous intriguer : il est de l'espèce de ceux dont on s'empare. Les risques — déjà soulignés — de lâcher le moindre morceau sur une miette de solution sont ici particulièrement élevés.

Tant pis...

4.3. Une approche

Nous allons nous appuyer sur une interprétation graphique du problème. A l'endroit où nous sommes arrivés maintenant, ce n'est pas un scoop.

Nous disposons pour cela de trois fonctions du temps t :

- $d(t)$ = distance parcourue durant l'intervalle $[o , t]$;
- $v(t)$ = vitesse à l'instant t ;
- $\gamma(t)$ = accélération à l'instant t ,

avec les relations différentielles classiques :

$$d' = v \text{ et } v' = \gamma$$

Tournons nous vers la représentation graphique de la fonction d en examinant d'un œil critique les données. Comment va-t-on traduire graphiquement que la dérivée seconde ($d'' = \gamma$) est croissante ?

Peu simple.

En revanche, si nous nous intéressons à la fonction v :

- nous pouvons "interpréter graphiquement" la fonction d : c'est une primitive, une intégrale, bref une aire ;
- et surtout, maintenant, nous savons traduire sur le graphique que v' (i.e. la fonction γ) est croissante : c'est dans nos cordes de dessiner une fonction convexe.

Une fois encore nous y sommes.

4.4. Une solution

Désignons par t_0 la durée du parcours et représentons la fonction v sur $[0 , t_0]$ en observant que :

- $v(0) = 0$
- $v(t_0) = 100$
- la courbe représentative C_v de v est située sous le segment [OA] (puisque v est convexe).

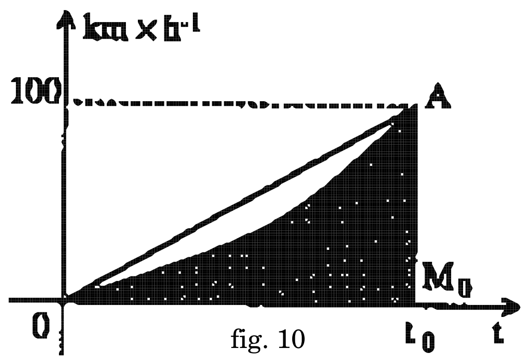


fig. 10

D'autre part, comme la distance parcourue 100 est $\int_0^{t_0} v(t)\,dt$, l'aire sous la courbe C_v est égale à 100.

Cette aire étant toujours inférieure à celle du triangle OAM_0 , nous avons : $100 \leq \frac{1}{2} t_0 \times 100$, d'où $t_0 \geq 2$.

La durée minimale du parcours est de deux heures (elle est obtenue lorsque C_v coincide avec [OA] , c'est-à-dire lorsque l'accélération est constante : on voit facilement qu'alors on a : $\gamma = 50 \text{ km} \times k^{-2}$) .

5. QUELQUES COMMENTAIRES

5.1. Vision géométrique et interprétation graphique

Nous sommes loin — on le voit — d'une vision géométrique des phénomènes de l'analyse (en ce qui concerne pour le moins le calcul différentiel et le calcul intégral) réduite aux interprétations graphiques, au sens *qu'elle ne peut être enfermée dans quelques clichés figés* dont la seule fonction serait d'illustrer graphiquement des propriétés, des résultats affirmés dans le calcul.

Bref, elle ne peut être traitée en un objet manufacturé une fois pour toutes.

5.2. Vision géométrique et pensée intuitive et/ou rationnelle

Les exemples que nous venons d'examiner l'attestent : la vision géométrique influe notre pensée intuitive et/ou rationnelle. En disant cela, j'ai le sentiment bien sûr d'enfoncer une porte ouverte.

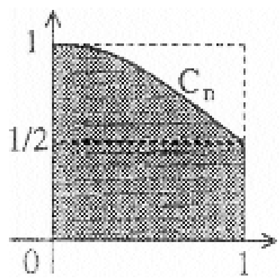
En revanche, plus délicat à enfoncer est le clou d'une vision stérile parce que dénuée de pensées. Je vais le dire autrement : *Voir la figure de tous nos yeux, capter l'information, nous mettre à son écoute : oui, bien sûr. Mais rien ne se passera si l'on oublie de penser.*

Un bon terrain pour confirmer ces dires est le problème général — que nous avons déjà évoqué — de la *comparaison d'un nombre et d'un intégrale*. Notez que la question est "contre nature " : vouloir comparer $\int_a^b f(t)dt$ à une valeur de la fonction f a un peu la fâcheuse tournure de vouloir comparer des mètres et des mètres carrés.

Supposons que nous soyons soumis à la demande d'étudier le comportement asymptotique de (t_n) et (v_n) définies par :

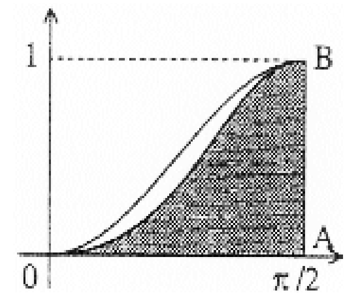
$$u_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n} \quad \text{et} \quad v_n = \int_0^{\pi/2} sin^n\, x \, dx \, .$$

Interpréter graphiquement u_n et v_n n'a rien de prodigieux et cela nous permet d'arracher à la feuille de papier et/ou à l'écran de l'ordinateur les conjectures :



$$\lim_{n \to \infty} u_n = 1 \, ,$$

Fig. 11 a



$$\lim_{n \to \infty} v_n = 0 \, .$$

Fig. 11 b

• Comment comparer alors u_n à 1 ? La vision du phénomène vient expliquer que la question est devenue naturelle : nous y avons forgé *l'idée* que " 1 " s'obtenait comme l'aire du carré bâti sur [0,1] , autrement dit que " 1 " c'est aussi $\int_0^1 dx$. Bref, nous voilà maintenant installés dans un scénario confortable : la fin de l'histoire peut être abandonnée au calcul... (Pour les fans des résolutions conduites à termes :

$$0 \leq 1 - u_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{1 + x^n} \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \;)$$

En ce qui concerne la suite (v_n), il nous faut d'abord nous convaincre que nous ne trancherons pas l'affaire à l'aide d'une majorante familière qui se prêterait au calcul et ensuite revenir sur le graphique avec la volonté d'exprimer ce que nous voyons : *la courbe se tasse de plus en plus vers les deux segments* [OA] *et* [AB] *et l'on ne peut la décrocher ni de* O *— ce qui n'est pas gênant pour notre problème —, ni de* B *ce qui est plus embêtant.*

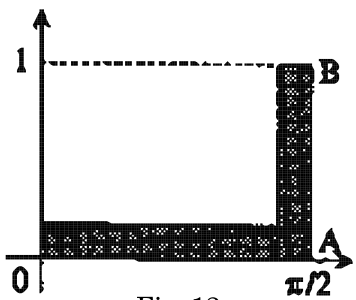


Fig. 12

Le dessin ci-dessus prend en compte ce phénomène : nous pouvons enfermer (pour n assez grand) nos courbes dans les deux petits rectangles et nous tourner vers la seule interrogation qui subsiste : « pouvons-nous remplacer “petits” par “aussi petits que nous voulons ” ? ».

C'est tout : nous finirons en roue libre sans harceler la suite (v_n) de coups de récurrence — c'est une tradition estudiantine solidement implantée —.

• Ces deux exemples ne sont pas des anecdotes de faible intérêt, mais ils ne suffisent pas. Je voudrais atténuer l'idée d'une interprétation graphique réduite au rôle de servante en faisant observer que la *production d'un dessin peut être l'une des formes les plus abouties de la vision géométrique*.

C'est le cas de la figure à venir en rapport avec la question suivante :

“Etudier la suite :

$$n \longmapsto f(1) + \ldots + f(n) - \int_0^n f(x)\,dx \,,$$

lorsque f est continue, positive, décroissante sur $]\,0\,,+\infty\,[$ ”

Ce dessin donne évidemment matière à voir des mathématiques (la suite est positive, décroissante, donc convergente) mais aussi à réfléchir sur la démarche qui sous-tend sa réalisation.

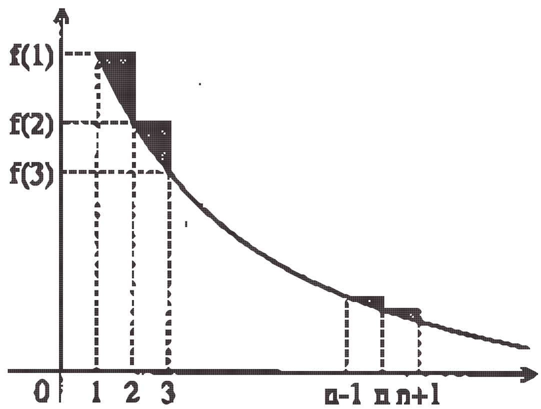


Fig. 13

En résumé, les divers exemples que nous venons d'examiner convergent vers le sentiment que nous ne pouvons nous tirer d'affaire en venant puiser dans un lot de recettes ficelé une fois pour toutes. Il en est ainsi et je pense que ce n'est pas une prétention magnifique d'affirmer que c'est tant mieux. Cela signifie en effet qu'il en va plus d'une *démarche permanente* que de la connaissance d'un patchwork d'accessoires.

Je vais boucler ce premier périple en précisant ce que j'entends par "démarche permanente " et ce à l'aide d'un dernier exemple. Et tant pis s'il nous donne l'impression que parfois nous faisons passer nos élèves à côté des choses qui sont à la fois simples et intéressantes.

Je veux parler du calcul approché d'intégrales en Terminale. Nous faisons mijoter dans le même chaudron ce que l'on appelle des méthodes : des rectangles, des trapèzes, du point médium, etc., en laissant croire que seules des mathématiques de pointe peuvent estimer l'erreur.

Je pense que nous gagnerions de la simplicité et de la signification en donnant à voir ce qui se passe ne serait ce que pour les fonctions monotones.

Je veux simplement vous faire apprécier les deux dessins ci-dessous qui expliquent mieux que toute autre chose les relations :

$$s_n \leq I \leq S_n \text{ et } 0 \leq S_n - s_n \leq \frac{1}{n}(f(0) - f(1)) :$$

Ce rapide tour d'horizon ne rend évidemment pas compte de tous les aspects de la vision géométrique des phénomènes de l'analyse (que l'on songe par exemple aux approximations d'une solution d'une équation).

Par ailleurs, si je reste muet pour l'instant sur *la solidité mathématique* de ce qui vient d'être fait, c'est parce que me semble-t-il nous gagnerions en pertinence à aborder un tel sujet en y mêlant d'autres branches des mathématiques.

Et de ce point de vue, la combinatoire a bien des choses à nous apporter…

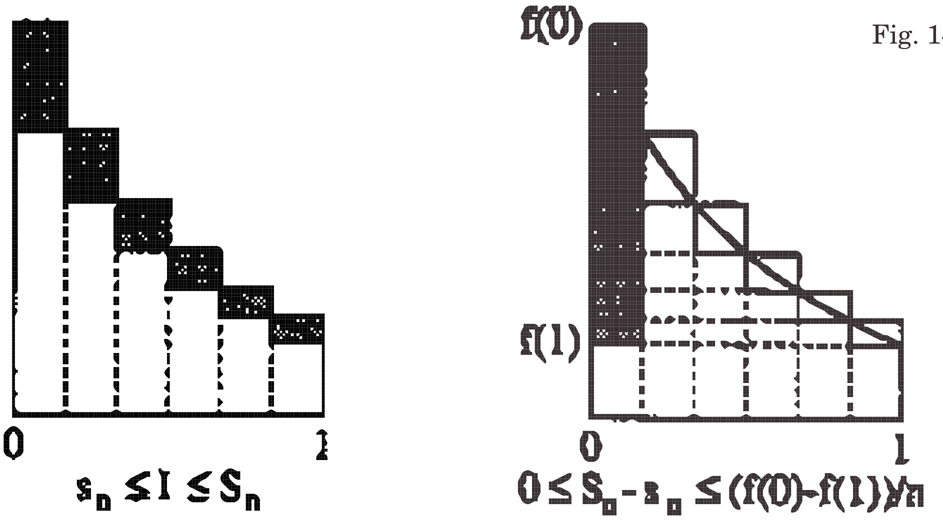


Fig. 14

PARTIE III QUELQUES EXEMPLES ISSUS DE LA COMBINATOIRE DES PROBABILITÉS

1. INTRODUCTION

L'enseignement actuel (au lycée) de la combinatoire et des probabilités comporte de nombreux avatars ; citons par exemple la préférence accordée aux formules aux dépens des raisonnements fondamentaux — je veux parler de ce que Arthur Engel appelle *principes de la somme et du produit* — ou encore la stérile rigueur des cardinalités ensemblistes.

Mais, mon propos n'étant pas de partir à l'assaut, j'arrête là le tir à vue pour m'attarder plus longuement sur l'absence totale d'une vision — géométrique peut-être, mais à coup sûr imagière — de ces notions et sur la mutilation des esprits qui en découle.

Un exemple est utile dès maintenant (il est connu de tout un chacun) : C'est une chose de dire « C_n^p est le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments », c'en est une autre de dire « C_n^p est le nombre de façons de choisir p éléments parmi n » et c'en est encore une autre de dire « C_n^p est le nombre de chemins à pas Nord-Est allant du point O au point A » (voilà une image : figure 15).

Je vais m'attacher à montrer comment une telle imagerie combinatoire est à même de nous dire des choses utiles plutôt qu'encombrantes, comment elle s'intègre dans la vision géométrique — cette fois c'est sûr — des phénomènes et comment cette vision géométrique nous permet d'intervenir dans l'étude de ces phénomènes.

Et on sera peut-être étonné d'y trouver des interventions purement géométriques !

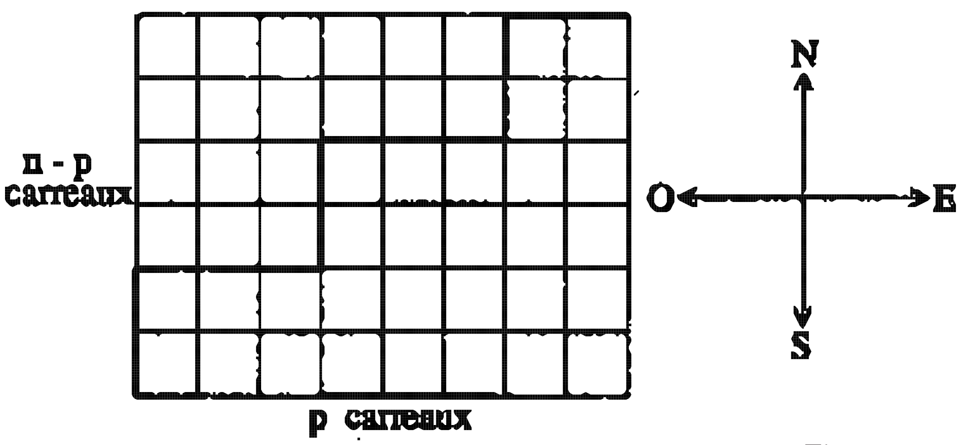


Fig. 15

2. Une certaine image des permutations

2.1. Le problème abordé

Combien y-a-t-il d'involutions dans le groupe des permutations de :

$$E = \{ x_1 , x_2 , \dots , x_n \} ?$$

2.2. Au fait, qu'est-ce qu'une permutation ?

En disant "c'est une n-liste d'éléments de E deux à deux distincts" comme il l'est dit à certains endroits, la réponse commence dans la médiocrité...

Il y a mieux à dire, par exemple, que c'est une correspondance "one to one " entre les éléments de E (en français : bijection de E) ou encore — et là nous donnerons matière à voir — un tableau carré de n^2 cases avec un motif et un seul dans chaque ligne et chaque colonne (ainsi le tableau ci-dessous est la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$:

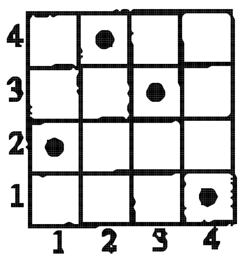


Fig. 16

2.3. Vers une solution

Exploitons l'image : notre problème est de dénombrer combien de tels tableaux sont **symétriques** par rapport à la "première" diagonale. Ce n'est pas un tour de force en effet de s'apercevoir qu'une involution n'est autre qu'une permutation qui échange deux à deux les éléments de E, points fixes compris (la propriété "quelques soient a et b de E, si $\sigma(a) = b$ alors $\sigma(b) = a$ " caractérise les involutions σ de E) .

Désignons alors par t_n le nombre de ces tableaux symétriques d'ordre n et étudions leur construction suivant la position du motif dans la première colonne.

Deux cas sont à l'examen :

• « **1 reste 1** » Le tableau est symétrique si et seule-ment si le tableau obtenu (d'ordre $n-1$) en enlevant la première ligne et la première colonne est du même type.

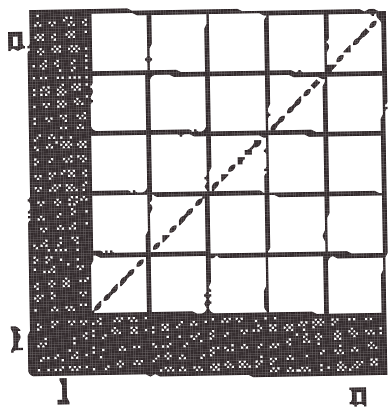


Fig. 17 a

Nous avons t_{n-1} tels tableaux.

• « **1 devient p ; p ≠ 1** » Notons que dans ce cas nous avons $n-1$ possibilités pour p . En revanche pour chacune d'elles nous n'avons pas le choix pour l'image de p : p devient 1. Dans ces conditions, le tableau est symétrique si et seulement si le tableau obtenu (d'ordre $n-2$) en enlevant les lignes 1 et p, les colonnes 1 et p et en accommodant les restes est également symétrique.

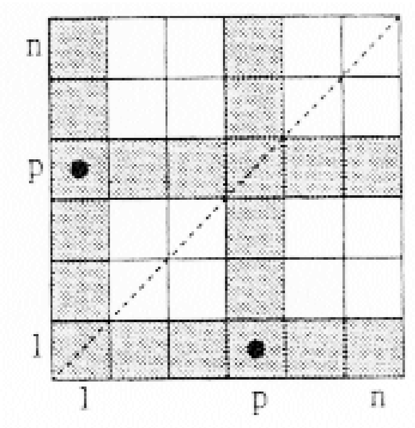


Fig. 17 b

Nous obtenons t_{n-2} tableaux.

Ainsi, $t_n = t_{n-1} + (n-1)\, t_{n-2}$ (en toute rigueur pour $n \geq 3$) ce qui détermine entièrement la suite $(t_n)_{n \geq 1}$ avec les conditions initiales : $t_1 = 1$ et $t_2 = 2$. (les amateurs de formules explicites vont se sentir pousser des ailes)

2.4. Juste une remarque

Bien sûr, après coup (et même peut-être avant) une résolution *directe* — sans tableaux — est possible[4]. Ce n'est pas une affaire : il existe bien d'autres endroits (dénombrement des dérangements, rook polynomials...) où cette image des permutations, qu'elle soit mentale ou figurée, rend des services inégalés et souvent inégalables.

4 On peut songer aussi aux graphes orientés

Ce que je veux souligner — d'un seul trait pour l'instant — c'est la diversité des lectures de ce que nous venons de faire :

— les uns y verront une sorte de manière d'*illustrer* les raisonnements mathématiques,

— les autres préfèreront tenir pour une *réalisation du problème* sur laquelle seront construits ces raisonnements,

— les derniers enfin (s'il en reste) y trouveront sûrement leur compte de touche à tout.

Je reviendrai plus longuement sur cet aspect des affaires.

3. Une certaine image des C_n^p

3.1. Les chemins à pas Nord-Est

Nous n'allons par la suite utiliser qu'une seule image, celle déjà présentée en introduction, à savoir : le nombre de chemins à pas Nord-Est allant de 0 à A (figure 15) est donné par : C_{a+b}^{a} (ou par : C_{a+b}^{b}).

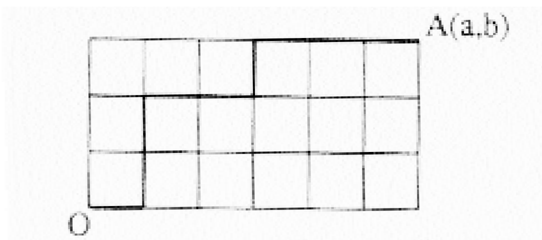


Fig. 18

Avec un peu de temps devant nous, nous pourrions nous attarder sur quelques informations livrées dans l'instant.

Un seul exemple (cf. figure 19 de la page suivante) : le fait que tout chemin arrivant en

A doit passer par B ou C — ce qui est à mettre au rang des évidences — porte le nom de relation de Pascal.

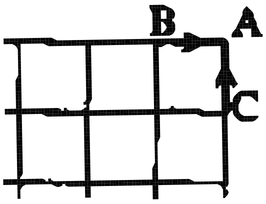


Fig. 19

Voici le problème qui va nous servir de support :

3.2. Le problème de la course en tête

L'énoncé

On jette une pièce équilibrée 2 n fois de suite. Quelle est la probabilité que tout au long de l'expérience PILE ait fait la course en tête (i.e. que le nombre de piles soit toujours supérieur ou égal au nombre de faces) ?

Remarque : Nous verrons par la suite qu'il y avait effectivement lieu de faire jouer la parité du nombre de lancers mais que ceci n'a vraiment rien de fondamental.

3.3. Une modélisation géométrique

Nous utilisons un quadrillage FACE-PILE en marquant un trait Est pour FACE, un trait Nord pour PILE (figure 20).

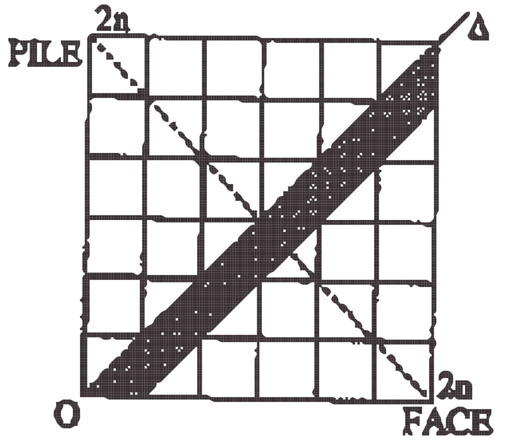


Fig. 20

Notre problème est donc de dénombrer les chemins de 2n à pas Nord-Est entièrement situés (au sens large) au-dessus de la droite Δ d'équation $y = x$ (convenons pour alléger le discours d'appeler par la suite « bons chemins » de tels chemins).

Signalons qu'il est facile pour les petites valeurs de n d'effectuer un comptage à la main de proche en proche en s'appuyant sur les remarques suivantes :

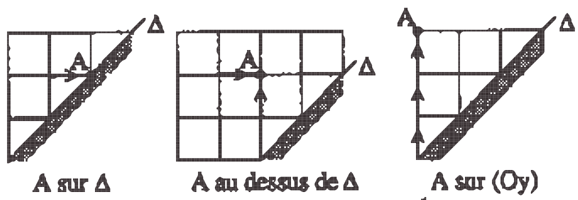


Fig. 21

— si A est sur Δ : les bons chemins passant par A, viennent de l'Ouest,

— si A est au-dessus de Δ : les bons chemins passant par A viennent soit de l'Ouest, soit du Sud,

— si A est sur (O*y*) : un seul bon chemin passe par A.

Le comptage (figure 22) s'effectue alors

- de gauche à droite sur chaque ligne,
- d'une ligne à celle immédiatement au-dessus :

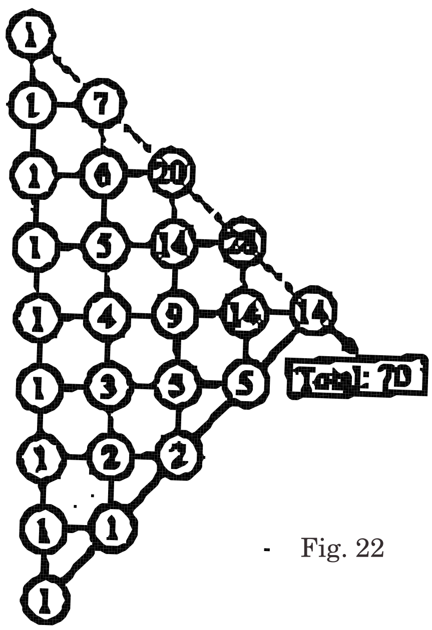


Fig. 22

D'où par exemple, la réponse : il existe 70 séries de 8 lancers où PILE fait la course en tête.

3.4. Le dénombrement : Nous allons dénombrer pour chaque point terminal $M_p(p\,,2n-p)$, avec $0 \leq p \leq n$ les bons chemins de O à M_p (cf. figure 23 a).

Mettons de côté pour l'instant le point $M_0(0, 2n)$ où — nous le savons — n'arrive qu'un seul bon chemin. L'avantage de cette histoire est dans sa simplicité : ou le chemin est bon, ou il est mauvais. Comme nous avons C_{2n}^{p} chemins de O à M_p, il n'y a plus qu'à compter les mauvais… Or un mauvais chemin se reconnaît au fait qu'il perce la droite Δ et donc vient se frotter à la droite Δ' (i.e. à un point en commun avec Δ', figure 23b).

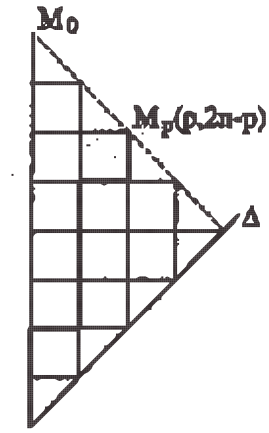


Fig. 23a

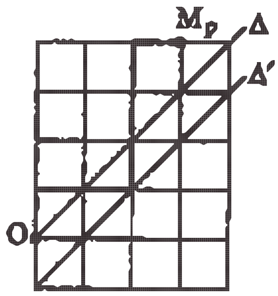


Fig. 23b

L'idée du dénombrement est alors purement géométrique : appelée principe du miroir, elle n'est pas sans évoquer un problème classique d'extrêma géométrique !

La voici imagée par les figures de la page suivante :

1. A un mauvais chemin de O à M_p, on associe (fig. 24) un chemin de A à M_p en symétrisant la portion de O à m (par rapport à Δ') où m est le "premier " point du chemin sur Δ' .

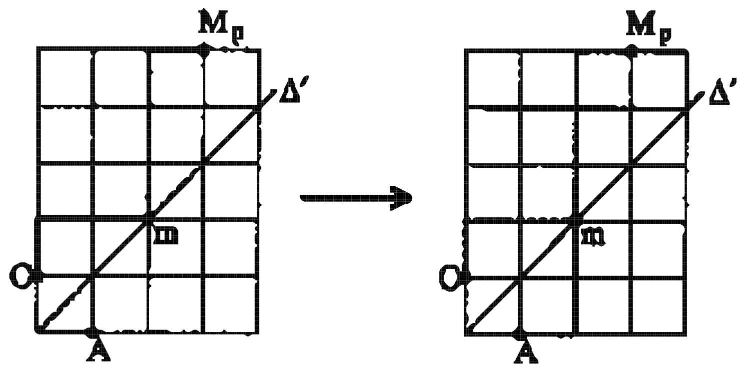


Fig. 24

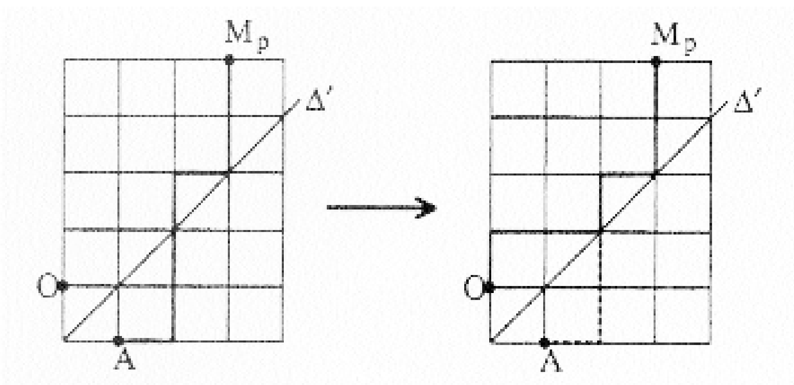


Fig. 25

2. Réciproquement, ce même principe permet d'associer (fig. 25) à tout chemin de A à M_p , un mauvais chemin de O à M_p .

Je laisse chacun se convaincre que nous venons de construire une bijection entre les mauvais chemins de O à M_p et tous les chemins de A à M_p . Ceci permet d'achever nos comptes :

• Pour $1 \leq p \leq n$, il y a C_{2n}^{p-1} mauvais chemins de O à M_p et, par suite, $C_{2n}^{p} - C_{2n}^{p-1}$ bons chemins.

• Le nombre total de bons chemins est donc :

$$1 + \sum_{p=1}^{n} (C_{2n}^{p} - C_{2n}^{p-1}) = C_{2n}^{p} .$$

3.5. Une remarque mathématique

Compte tenu du résultat obtenu, nous nous disons que nous sommes peut-être passés à côté d'une solution plus expéditive organisée autour de la question suivante : « Quel chemin de O à I associer à Γ, pour définir une correspondance bijective ? » (figure 26)

Notons que cela revient à donner une explication simple de ce « miracle mathématique en miniature » : La probabilité qu'au cours de 2n lancers, PILE fasse la course en tête est la même que celle d'obtenir une égale répartition entre PILE et FACE.

A ma connaissance, il n'existe pas de réponses naturelles à cette question [5].

Avis aux amateurs.

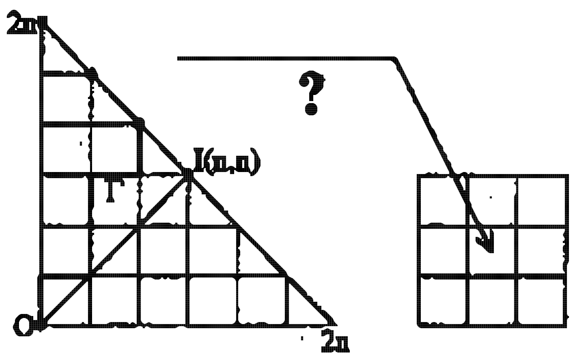


Fig. 26

4. Commentaires

Ces deux exemples sont riches de leçons à tirer :

4.1. Vision géométrique et modélisation

La vision géométrique d'un problème de combinatoire *ne peut être réduite à la seule modélisation dans le domaine géométrique*, sous prétexte qu'il est plus facile de compter ce qui est représenté, visible que ce qui ne l'est pas.

Prétendre le contraire serait faire fi des interventions sur le modèle qu'elle peut nous suggérer ; par exemple, comme nous venons de le voir, transformer un modèle, en tout ou partie, vers un autre mieux adapté au dénombrement.

Notez que pour ce faire, l'assistance purement technique est des plus discrètes : pour l'essentiel la géométrie du dessin (on ne peut pas vraiment dire que le principe du miroir par exemple requiert un savoir-faire colossal sur la symétrie orthogonale). Autrement dit, le contenu géométrique ne sera pas dans cette affaire un bât qui blesse.

5 Une solution géométrique peut être apportée à ce problème via l'introduction des notions de pics et de cols sur un chemin, mais elle est loin d'être satisfaisante.

Mais ce n'est pas tout. Le problème de la "course en tête" n'est quand même pas un prototype — y en aurait-il d'ailleurs ? — des situations combinatoires. Le lot com-mun n'exige pas d'interventions "sophistiquées " comme le principe du miroir ou autres et très souvent — l'appréciation est grossière — il n'exige pas d'interventions du tout. Qu'en est-il alors de la vision géométrique ?

Si je cédais pour une fois à la mode des slogans simplificateurs je dirais : *"la vision géométrique est dynamisante ou elle n'est pas "*. Je vais essayer de m'expliquer là-dessus en trois points appuyés d'un exemple (quand bien même démêler les idées à cet endroit n'est pas du plus élémentaire) .

1. Bien des questions de combinatoires, de probabilités portent sur *l'étude d'un état final* alors que bien des procédures, des raisonnements, des dénombrements portent sur les enchaînements conduisant à cet état final.

2. Cela vient expliquer pourquoi nos modélisations – indépendamment de leur nature – ont pour objet de *dynamiser la situation à l'étude* (situation que je qualifierai de statique).

Voyons un exemple (classique). Soit p et n deux entiers ($p \geq 1$ et $n \geq 1$). Combien y a-t-il de p-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ d'entiers naturels tels que : $x_1 + x_2 + \ldots + x_p = n$?

Nous pouvons trouver de nombreux modèles pour aborder cette question ; ils viseront à mettre en évidence une correspondance bi-univoque qui associe à un état final (i.e. un p-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ tel que $x_1 + x_2 + \ldots + x_p = n$) une action (ou une suite d'actions) qui conduit à cet état.

Et parce que chez nous, ce sont les urnes et les boules qui tiennent le haut du pavé, l'action (dans son moule classique) va consister à répartir n boules dans p urnes : $U_1, U_2, \ldots, U_p$.

Restera à décrire un procédé de répartition : ce sera par exemple la mise en place de $p-1$ cloisons parmi $n+p-1$ emplacements, comme nous l'illustrons sur la figure 27 (chacun a reconnu le décompte traditionnel des arrangements avec répétitions).

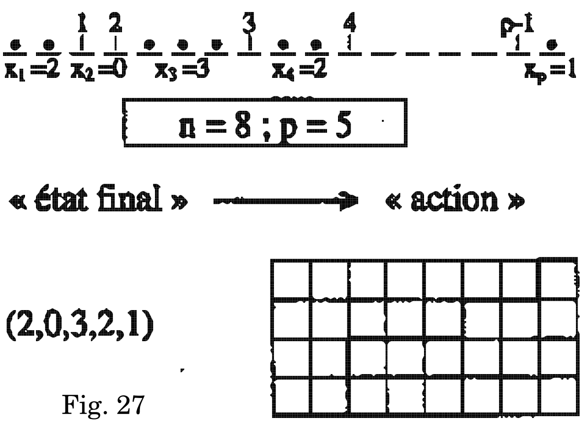


Fig. 27

3. Par suite, une imagerie combinatoire figée, c'est-à-dire qui serait privée de la *force évocatrice de l'aspect dynamisant* que je viens de décrire serait dans la pratique — comme le dit Ian Stewart — "aussi utile qu'une toile d'araignée contre une avalanche « (on devine là un lien étroit avec ce que j'ai appelé tout à l'heure : "le carcan apprêté d'une interprétation graphique figée des phénomènes différentiels ").

Nous sentons encore mieux maintenant en quoi nos chemins à pas Nord-Est sur quadrillage prennent en charge une telle dynamisation. Et voilà une preuve supplémentaire : avec $n = 8$ et $p = 5$, on construira une bijection en associant à l'état final (2, 0, 3, 2, 1), par exemple, le chemin représenté sur la figure ci-contre.

D'où la réponse dans le cas général :

$$C^{n}_{n+p-1} .$$

4.2. Le rôle du dessin

Le dessin nous a servi de *modèle* pour compter, de *support* pour dénombrer et raisonner mais également de *preuve* — ça y est, le mot est lâché — : comme je ne veux pas m'aventurer dans un terrain idéologiquement miné, je ne vais m'intéresser qu'au constat seul.

Si le dessin a fait preuve dans les deux problèmes que nous venons d'examiner ce n'est sûrement pas au sens « je vois, je dis», c'est plutôt parce que nous nous sommes accordés (ou non — cela reste à voir —) sur le fait que tel dessin particulier, de taille humaine était le *prototype* du cas général.

Précisons. Je ne pense pas que quelqu'un trouve à redire sur le principe du miroir. Cela ne provient pas de la magistralité avec laquelle j'aurais pu l'exposer (ce qui est faux, car c'est totalement impraticable) mais du fait patent que nous sommes d'accord sur la façon dont il a été produit :

un vague petit dessin accompagné de quelques explications suffit.

Une dernière remarque sur ce sujet sous forme de question : Peut-on m'accuser de relâchement coupable lorsque j'exploite sans autre forme de procès que le chemin de la figure 24 (à droite), de A à M rencontre la droite Δ' une première fois. Cette figure n'aurait-elle pas l'air de se ficher comme une guigne du théorème de la valeur intermédiaire ?

4.3. Revenons à l'enseignement

Livrée à elle-même, l'algèbre combinatoire seule ne donne pas prise à la compréhension des problèmes de dénombrement et ne fabrique pas non plus de pistes pour les chercher ou les résoudre (sauf cas de solubilité instantanée, nous allons y revenir).

Et l'absence de vision géométrique, ne serait-ce que sous la forme d'images dynamisantes telles celles que nous avons évoquées ou d'autres -l'unicité serait contre-nature- laisse alors inéluctablement plus d'un étudiant, plus d'un élève sur le bord du chemin (non, ce n'est pas voulu).

Prendre cela en compte dans l'Enseignement ? La question pousse loin, car, si vous considérez comme indispensable ce "carburant" d'images dont nous venons de parler, vous devez prendre avec, son balluchon d'incertitudes dans les schémas, de fissures dans raisonnements appuyés sur les dessins, etc. : vous ne pouvez pas balayer sous le tapis.

Sinon — et ceux qui prétendent le contraire mentent comme ils respirent ; et Dieu sait s'ils respirent — , il vous reste les produits "light" ou encore — suivant en cela une expression de Marcel Berger — les problèmes à 0 % de matière grasse (mais cela concernait les problèmes de géométrie). Et justement, à propos de géométrie... : voilà ce que l'on appelle un enchaînement conquis de haute lutte.

PARTIE IV QUELQUES EXEMPLES ISSUS DE LA GÉOMÉTRIE

1. INTRODUCTION

Voilà un "vilain petit moment". La compétence d'un parterre de spécialistes rend en effet délicate à manier une série d'exemples significatifs de certains des aspects de la vision géométrique en... géométrie :

— arpentez les sentiers battus et rabattus et vous prenez le risque de lasser,

— défrichez trop loin et voilà votre affaire marginalisée dans un coin,

— barycentrez un peu des deux et vous perdez l'occasion de débrider un peu plus les esprits subversifs qui vous écoutent.

Tout compte fait, il ne vous reste que l'acrobatie. et donc, sans plus tarder :

2. AVEC L'AIR DE TIRER TROIS FICELLES

2.1. Les problèmes abordés

Les problèmes que je présente ici sont de facture *tout-à-fait classique* en Terminale : ils sont trouvables dans tout manuel de géométrie un peu sérieux.

Problème 1 On considère un parallélogramme ABCD et deux triangles équilatéraux BCE et CDF bâtis à l'extérieur du parallélogramme. Il s'agit de *voir* que le triangle AEF est aussi équilatéral.

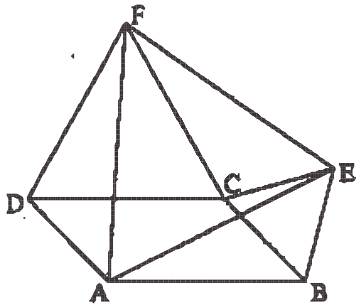
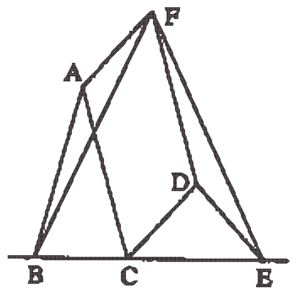


Fig. 28

Problème 2 Les triangles ABC et DCE sont isocèles en A et D. Le point F est tel que DCAF est un parallélogramme. Que dire du triangle BEF ?

Fig. 29



Problème 3 (un standard) Les triangles DAC et QAB sont rectangles isocèles et I est le milieu de [BC] . Etudier le triangle IPQ .

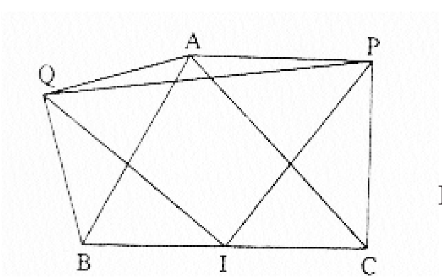


Fig. 30

2.2. La question abordée : Nous le savons : les solutions de ces problèmes se ramassent à la pelle. Mais là n'est pas la question. Voilà plutôt la demande : "Quelle vision de ces figures nous amène à considérer que nous sommes en train de nous occuper du même problème en ayant l'air de tirer trois fic elles différentes ? "

2.3. Vers une solution

Oublions les points, fixons notre attention sur les vecteurs, opérons sur ces vecteurs et le tour est joué. D'autres détails ?

Problème 1 Faisons opérer la rotation vectorielle R d'angle $\pi/3$ sur le « chemin ABE »

(i.e. la somme vectorielle $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$).

Nous avons :

$$R(\overrightarrow{AB}) = R(\overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{DF}$$

et $$R(\overrightarrow{BE}) = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$$

et par suite $R(\overrightarrow{AE}) = \overrightarrow{AF}$, d'où le résultat.

Problème 2 Appelons symétrie vecticale la réflexion vectorielle d'axe orthogonal à la direction de (BE) , notons la S et faisons la opérer sur « le chemin FAB » :

$$S(\overrightarrow{FA}) = S(\overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{DE}$$

et $$S(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{FD}$$

et donc $S(\overrightarrow{FB}) = \overrightarrow{FE}$, ce qui fait voir que le triangle FBE est isocèle de sommet F .

Problème 3 Ayant conjecturé que le triangle IPQ est rectangle isocèle en I (ou peut-être simplement ayant puisé dans nos souvenirs) nous aimerions bien trouver un « chemin » de I à P qui se prêterait agréablement à l'action du quart de tour vectoriel. Ce n'est pas tout à fait immédiat, n'est-ce pas ?

Mais quand même, nous n'avons pas manqué d'observer dans les deux exemples précédents que c'est la présence de *parallélogrammes* qui nous permet de faire tourner (ou symétriser) un morceau de chemin là où nous savons le faire.

Tout est dit maintenant pour peu que l'on soit un familier de la figure suivante :

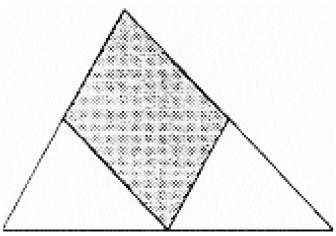


Fig. 31

les trois milieux et un sommet forment un parallélogramme.

D'où la figure ci-après dont une lecture vectorielle livre la solution…

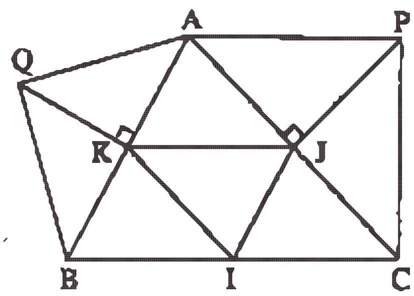


Fig. 32

2.4. Quelques remarques et, pour commencer :

Le même problème

Les illustrations et commentaires qui suivent l'attestent : il s'agit bien du *même problème*…

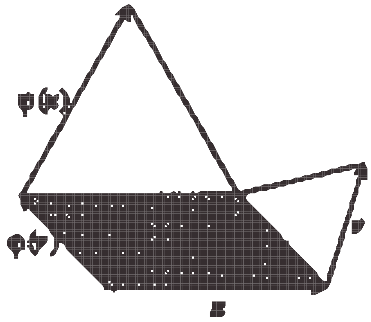


Fig. 33a

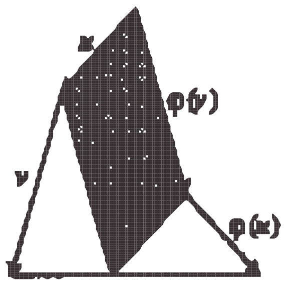


Fig. 33b

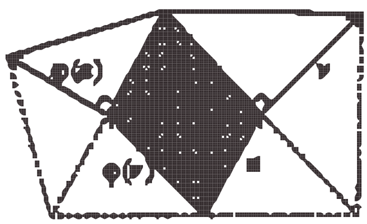


Fig. 33c

Dans chaque cas, c'est une même application vectorielle linéaire f qui opère sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et donc sur $\vec{u} + \vec{v}$ ... ce qui vient résoudre le problème en toute quiétude. Bien sûr, en ce qui concerne le troisième problème, c'est un peu de la triche, mais une certaine malhonnêteté créative peut être efficace quand l'occasion s'y prête.

En prime Modifiez l'application f tout en lui gardant une certain élégance géométrique et vous aurez d'autres problèmes gratis. Voici par exemple ce que l'on obtient avec une similitude convenablement choisie : des carrés étant bâtis sur les côtés du parallélogramme comme l'indique la figure ci-contre, le résultat est que le triangle AEF est rectangle isocèle en E :

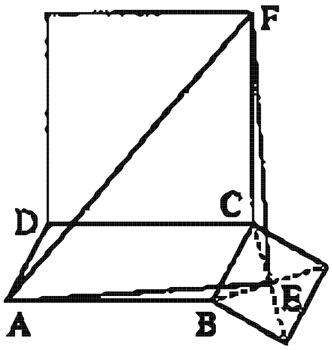


Fig. 34

Quelle vision ? « Voir les bons vecteurs de la figure et comment opérer dessus » sous-tend pour l'instant notre démarche.

Soyons plus précis : notre *promenade visuelle dans la figure s'effectue avec une arrière pensée*, celle de la recherche et de la trouvaille d'un “chemin” (sorte de série de vecteurs mis bout à bout[6] que nous transformons par morceaux, chaque morceau étant *vu* à l'endroit où il est bon de le *voir*.

6 Patientez pour les formulations correctes.

Voici encore un exemple où cette démarche se révèle élégante et pleine d'adresse.

Problème 4 Ces trois triangles OAB , OCD et OEF sont équilatéraux de sens direct et la figure est complétée par des parallélogrammes. Alors, dans ces conditions, UVW est encore un triangle équilatéral de sens direct.

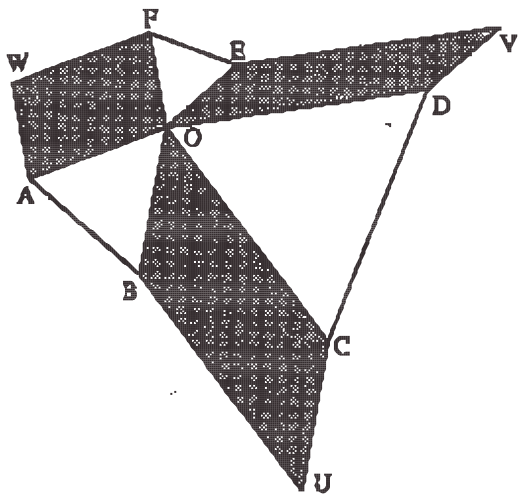


Fig 35

Faisons tourner de $\pi / 3$ le chemin

$W \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow U$:

$$R_{\pi/3} : \begin{cases} \overrightarrow{WA} = \overrightarrow{FO} & \longrightarrow \quad \overrightarrow{FE} \\ \overrightarrow{AB} & \longrightarrow \quad \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{WF} \\ \overrightarrow{BU} = \overrightarrow{OC} & \longrightarrow \quad \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{EV} \end{cases}$$

Il n'y a plus qu'à mettre “bout à bout” ou (si l'on tient pour la version pasteurisée) : il n'y a plus qu'à sommer. Je pourrais exhiber une kyrielle de telles situations qui arracheraient la conviction que voilà du bon pain pour tous... et sans effort. Mais justement, derrière ces cueillettes trop faciles n'y aurait-il pas une pédagogie trompeuse qui masquerait des troubles sur la place ?

3. DES TROUBLES SUR LA PLACE

3.1. Un premier exemple

Problème 5 (Napoléon) Les trois triangles BIC, CJA et AKB sont équilatéraux de sens direct :

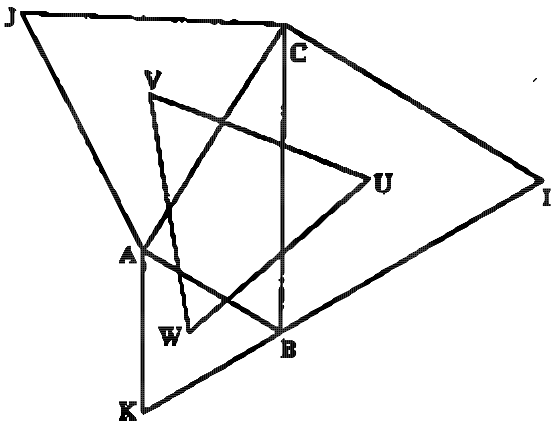


Fig. 36

Alors les centres U , V et W de ces triangles sont aussi les sommets d'un triangle équilatéral.

Une solution Notre objectif sera (par exemple : $R_{\pi/3} : \overrightarrow{UV} \longrightarrow \overrightarrow{UW}$. Quelques essais convaincraient qu'il nous faut renoncer à trouver un chemin de U à V que nous saurions *naturellement* faire tourner de $\pi/3$. Reste alors l'idée de rattacher les vecteurs $\overrightarrow{UV}$ et aux autres vecteurs de la figure (i.e. aux vecteurs *visibles* de la figure).

On obtient sans trop de peine :

$$3\,\overrightarrow{UV} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{IJ} \text{ et } 3\,\overrightarrow{UW} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{IK}\ .$$

Or nous savons faire tourner $\overrightarrow{BA}$ puis $\overrightarrow{IJ}$ en suivant le chemin $I \longrightarrow C \longrightarrow J$. Bref, aux détails de calcul près, $\overrightarrow{UV}$ a pour image $\overrightarrow{UW}$ par la rotation vectorielle d'angle $\pi/3$.

Remarque : L'exemple est instructif : pas de chemin apparent, ni caché (au sens du problème 3, paragraphe 2) que l'on pourrait rendre apparent avec quelques parallélogrammes.

C'est le calcul vectoriel qui fait apparaître ce qui n'est pas vraiment grand chose dans la figure, mais une combinaison linéaire de vecteurs dont on connaît pour chacun l'image par la rotation vectorielle d'angle $\pi/3$, connaissance que nous tirons d'une certaine familiarité avec la vision et le maniement de nos *fameux* chemins.

Et maintenant — mais pas avant — nous pouvons adopter la mathématique sans failles *des combinaisons linéaires de vecteurs* parce que nous comprenons sa signification dans cette manière de voir une figure géométrique qui nous préoccupe depuis quelques instants.

3.2. Un second exemple

Problème 5 Le triangle ABC (cf. figure 37 de la page suivante) est rectangle en A , A' est le milieu de [BC] , H le pied de la hauteur issue de A et I et J les projetés orthogonaux de H sur (AB) et AC). Il s'agit d'établir que (IJ) et (AA') sont orthogonales.

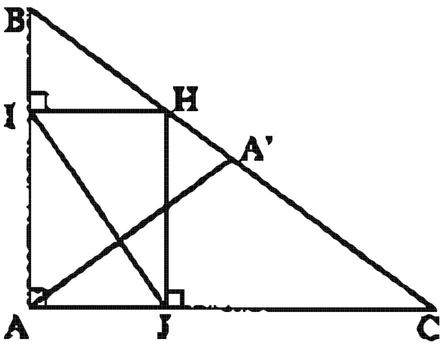


Fig. 37

Une solution : Ce problème très connu admet en général des solutions assez longuettes par le produit scalaire ou les composées de réflexions, etc. Dans le contexte où nous sommes, la clé de l'énigme est de voir en $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AH}$ des vecteurs *symétriquement inclinés par rapport à la verticale* et de même en $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{BA'}$ … Et c'est tout : ce qui suit règle simplement les détails :

Introduisons la réflexion vectorielle S dont l'axe est de direction (AC). Alors :

• S : $\overrightarrow{IJ} \rightarrow \overrightarrow{AH}$, et cela parce que AIHJ est un rectangle (en notant au passage que ce résultat est correct pour tout point H de (AB)) ;

• S : $\overrightarrow{AA'} \rightarrow \overrightarrow{BA'}$ en invoquant — si besoin est — le fait que l'axe de symétrie du triangle isocèle A'AB est dans la direction de AC). De là découle l'équivalence :

$$\overrightarrow{IJ} \perp \overrightarrow{AA'} \Longleftrightarrow \overrightarrow{BA'} \perp \overrightarrow{AH}$$

Une remarque : Il s'agit plutôt d'un constat que d'une explication : dans cette situation où sont en jeu les images de vecteurs par une réflexion, *les repères visuels sont estompés* et notre œil a beaucoup plus de peine à s'exercer que précédemment.

C'est en ce sens que cet exemple fait trouble.

4. VISION GÉOMÉTRIQUE ET ÉTUDE DES FIGURES

4.1. Sur le choix de la vision linéaire

Si j'ai choisi, en ce qui concerne l'étude des figures en Géométrie, d'appuyer sur la vision vectorielle — disons même linéaire — ce n'est évidemment pas pour étaler quelques talents d'acrobate comme j'ai pu le laisser croire tout à l'heure.

Je veux dire qu'il n'est pas dans mon propos de faire de la promotion pour telle ou telle manière d'intervenir sur une figure sous prétexte que l'une d'entre elles conduirait à des résolutions expéditives : ou encore — et j'ai volontairement choisi de passer cela sous silence — parce qu'elle livrerait en prime des solutions d'une autre nature (je songe ici aux composées de transformations ponctuelles que l'on pourrait faire naître comme sous-produits de la résolution linéaire).

La raison de mon choix est que, parce que nous en sommes peut être moins familiers ou moins accoutumés, la vision linéaire des figures est mieux à même de nous faire entendre un certain nombre de choses sur la vision géométrique des figures en général ou, si vous préférez, il y aura moins de bruits de fond dus à notre *savoir-faire trop savant* me semble-t-il... mais rien n'est sûr.

4.2. Sur la vision géométrique des figures en général.

Il y aurait beaucoup à dire, par exemple :

• *comment déceler ou faire apparaître une configuration* **forte** (type configuration de Thalès) pour tirer profit des informations dont elle est porteuse ?

• *comment visualiser ou se donner à voir* — voilà quelque chose d'important — une propriété que l'on aurait conquise ailleurs (par le calcul par exemple ; je suis très malheureux à l'idée de quelqu'un délaissant définitivement au calcul la paternité de certaines "coïncidences" comme le fait que l'angle sous lequel on voit une arête d'un tétraèdre régulier depuis le centre soit le même que celui sous lequel on voit la diagonale d'une face d'un cube, toujours depuis le centre) ?

• comment... etc.

J'arrête là : je sais que dans certains ateliers, au cours de certains exposés ou tables rondes, ces divers aspects seront étudiés et analysés avec beaucoup plus de profondeur que je ne pourrais le faire.

Il n'en reste pas moins que certaines constantes nous sont connues, comme l'ont montré les travaux de l'inter-Irem de Géométrie.

Je les présenterai ainsi :

(1) *Parce que l'objet de la géométrie est l'étude des figures, les notions, concepts, relations, propriétés, etc., ne peuvent participer à cette étude sans empreintes dans le domaine des figures.*

(2) *La participation à l'étude des figures dépend de la force évocatrice de ces empreintes.*

On pourrait disserter longtemps sur l'usage du mot "empreintes" et essayer par exemple de trouver une expression mieux ajustée. Je ne crois pas à l'importance de ce débat : disons simplement que je veux mettre l'accent sur l'idée de "laisser des traces".

Ainsi accordés, nous pouvons maintenant nous tourner vers les deux questions fondamentales :

— évocatrice de quoi ?

— évocatrice pour qui ?

Répondre à de telles questions est moins facile qu'il n'y paraît. Voici un exemple :

Considérons les deux problèmes — très classiques — suivants :

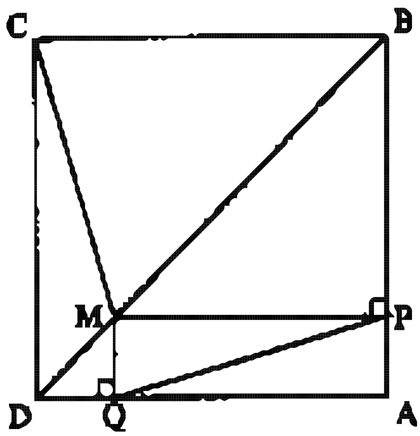


Fig. 38 a

Problème 7

A partir d'un point M de la diagonale (BD) du carré on construit le rectangle APMQ . Il s'agit de montrer que (CM) est orthogonale à (PQ) .

Problème 8 : Les deux triangles rectangles isocèles de la figure ci-dessous déterminent les triangles OBC et OAD .

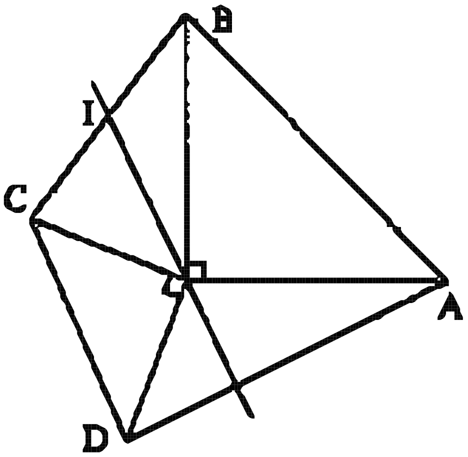


Fig. 38 b

Etablir que la médiane de l'un est la hauteur de l'autre.

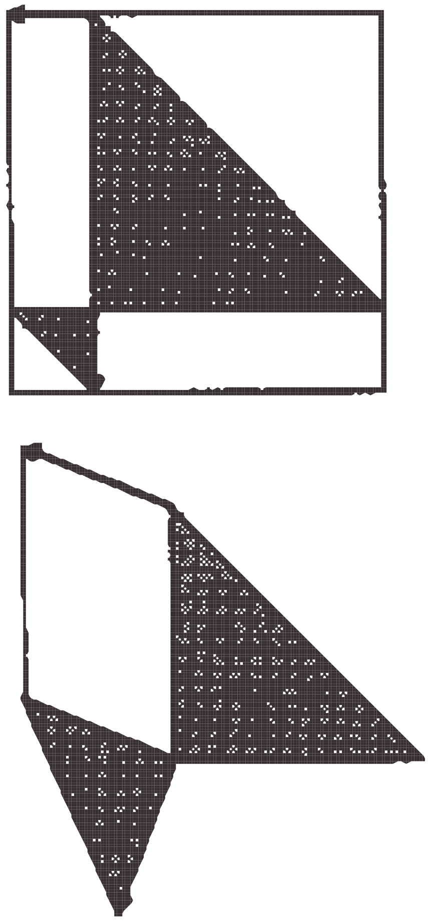


Fig. 39

Comme nous fermentons depuis 10 minutes / un quart d'heure dans le bouillon linéaire, nous devinons dans la coulisse le quart de tour vectoriel : il n'y a pas de quoi s'en vanter. Ni même du fait que nous tirons encore une fois deux ficelles d'un même problème déjà familier comme l'explique la figure 39 de l'encadré ci-contre.

A la vue de ces deux figures, les réponses aux questions posées semblent banales.

En sera-t-il toujours de même maintenant que le premier problème devient un "enfant naturel" du second ? (Cf.Ce que je veux faire toucher du doigt avec ces situations et je vous demande de m'absoudre d'avance de la familiarité du langage c'est que : une figure géométrique, lorsque nous la regardons, nous la prenons en pleine figure et que nos belles empreintes évocatrices, nos stimulateurs d'associations, ils sont un peu cul par dessus la tête et que les pistes sont brouillées et qu'il va nous falloir du temps, de l'incubation, de la macération pour parvenir à cette lucidité qui permet, bribe par bribe, de percer le mys-

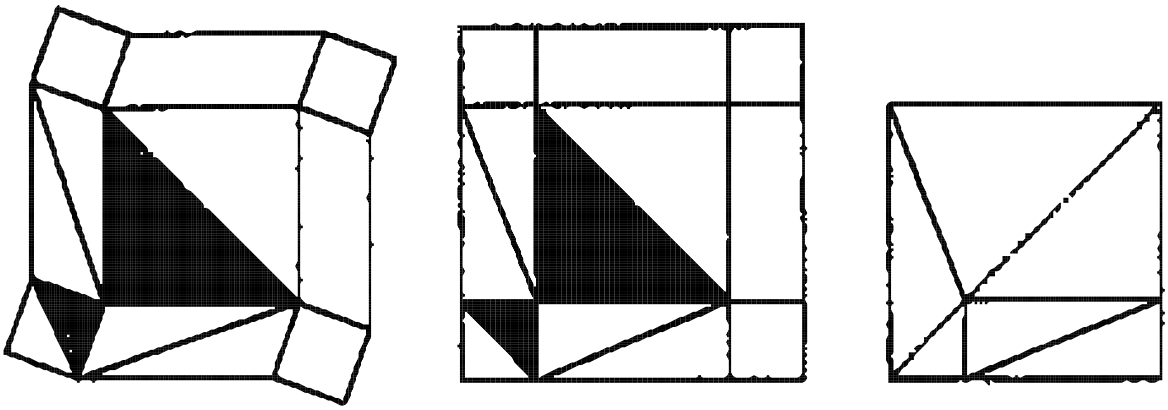


Fig. 40

tère de la figure et pour en trouver cette vision chirurgicale qui nous fait opérer au bon endroit avec le bon instrument.

Et, pour amorcer le retour au calme, j'ajouterai ceci : nous ne savions pas à la vue de ces deux figures, qu'il y avait quelque chose à voir. Nous allons nous en remettre, la géométrie et l'enseignement de la géométrie aussi : il n'y a pas d'affaire à cet endroit.

Mais peut être que cela pourrait nous aider à comprendre pourquoi devant la figure d'un problème de géométrie, nos élèves aussi ne savent pas qu'il y a quelque chose à voir.

Bien.

De nouveau à pieds joints — je veux dire que l'acrobatie est terminée — je vous propose d'achever notre parcours dès maintenant faute de temps à consacrer à l'étude de quelques exemples venus d'ailleurs (Arithmétique, Probabilités, ...)

4. EN GUISE DE CONCLUSION, DONC

J'ai entamé cet exposé en évoquant Henri Matisse et je vais faire appel à un autre passionné pour l'achever.

Une raison pour cela :

Le texte qui suit est le plus à même d'effectuer une sorte de *synthèse* efficace de ce que je viens de produire, ce qui somme toute est d'une logique certaine puisqu'il est à l'origine même de ces travaux. Voici l'extrait ; il tient en une seule phrase :

"J'aborde maintenant cet aspect de la géométrie que j'ai appelé l'aspect métaphorique, savoir la géométrisation considérée comme mode de représentation de phénomènes qui a priori ne relève pas de la géométrie (au sens ou celle-ci est l'étude des structures spatiales) ou comme mode d'expression langagière de ces mêmes phénomènes, qu'elle renvoie à des images ou qu'elle renvoie à un langage, la géométrisation permet une nouvelle approche et par conséquent une compréhension nouvelle des phénomènes étudiés, à la fois sur le plan de la rationalité (c'est-à-dire des modes de raisonnement) et sur le plan de l'intuition (un enrichissement de l'intuition et c'est là le point le plus intéressant de la géométrisation) mais cette nouvelle approche ne prend sens (aussi bien pour ceux qui la construisent que pour ceux qui sont amenés à l'étudier) que parce qu'elle renvoie à cette connaissance première qu'est la géométrie élémentaire, géométrie de la mesure et du dessin dont j'ai parlé plus haut sans cette connaissance première, les métaphores de la géométrisation perdent leur sens et l'on est renvoyé à la simple utilisation formelle de langages et de représentations pour laquelle la seule prise est le respect des règles et des procédures ".

J'ai puisé ce texte dans l'article "Considérations sur l'Enseignement des Mathématiques" de *Rudolph Bkouche*, étant entendu que je précise cela à l'attention exclusive de ceux qui ne l'aurait pas reconnu à travers ces longues phrases qui ne sont pas mises à la portée immédiate des yeux et des neurones — des neurones surtout — et à ces fameuses périodes rédigées dans le semi-secret qui sied à l'écriture des grimoires...

Je termine par où à l'ordinaire commence ce genre de manifestations : *les objectifs*.

Cette conférence avait deux objectifs. Le premier était de vous ouvrir l'appétit sur ce que l'on peut entendre dans l'expression "vision géométrique". Mais considérez comme de simples amuse-gueules les quelques exemples que nous venons de décortiquer et songez aussi que nous n'avons pas galopé dans l'Arithmétique l'Algèbre linaire, les Probabilités continues et que rien n'a été dit sur ce sujet en Topologie ou encore sur le calcul algébrique au collège.

Quant au second objectif — primordial à mes yeux — il s'agissait de vous convaincre que *les diverses facettes sous lesquelles se manifeste la vision géométrique sont des mathématiques et non une technologie didactique* avancée pour élèves en mal de découvertes *et non plus un sucre d'orge pédagogique* qu'un décret administratif rendrait d'utilité publique dans nos classes de France et de Navarre, car — et là je reviens à Henri Matisse — la création se décrète-t-elle ?

Des mathématiques donc, qui traînent — je l'ai déjà dit — leur balluchon d'incertitudes, de fissures, de rapiéçages empiriques et d'opportunismes, — mais des mathématiques toniques — j'allais dire ravageuses et inéluctables.

Mais ce serait appuyer un peu trop sur le pinceau, finir cette conférence démuni dans la nuance et laisser le sentiment que je m'emporte contre l'air du temps.

Ce qui serait dommage, à moins que l'air du temps n'ait tort...