LE PROJECTEUR RHETORIQUE

Ombres et lumières sur les “erreurs ” en algèbre et en géométrie au collège (et ailleurs)

Alain MAGEN
Irem des Antilles et de la Guyane

“Si le langage était parfait, l’homme cesserait de penser”
(K. Valéry)

“C’est que je ne m’émeus pas facilement maintenant et de moins en moins.
Elle a tant sonné, ma sensibilité, que j’ai mis du mastic aux fêlures : c’est ce qui fait qu’elle vibre moins clair.”
(Flaubert)

“La surprise est le grand ressort du nouveau”
(G. Apollinaire)

INTRODUCTION

Les remarques qui suivent sont à prendre simplement comme le témoignage d’un enseignant de collège, usé prématurément par trente ans de lutte contre les mêmes “fautes” ou “erreurs” d’élèves, en calcul algébrique ou en géométrie… des calculs du type : $3x + 2 = 5x$ ou $(x+3)^2 = x^2 + 9$, des hauteurs [AH] qui font un angle de 60° avec [BC], des primitives d’un produit qui sont le produit des primitives, sans parler des volumes de cube qui doublent servilement quand on double le côté.

Je n’ai pas pu me consoler en me disant que mon métier était de corriger ou même de transformer positivement ces erreurs. J’ai cherché à faire le tri entre elles, en distinguant suivant le remarquable conseil de G. Glaeser [11] le fortuit et le significatif, le symptôme et la cause, l’instable et le persistant. Pour la majorité des élèves elles étaient persistantes au moins sur deux ou trois ans (*parfois elles disparaissent momentanément et reviennent en force trois mois après chez le même adolescent*). Et surtout, elles décidaient (c’est 2 ou 18, qu’on le veuille ou non) de l’avenir mathématique de l’élève, de façon tellement brutale (dans la mesure où se jouait là le rapport de l’élève aux maths, sinon au symbolique, sinon au savoir, sinon à l’école, sinon à lui-même) que je peux dire “c’est de l’avenir tout court qu’elles décidaient”. (Je ne culpabilise pas pour autant : je ne suis pas responsable d'une société qui organise ce type de gâchis). La théorie des deux faces de l'erreur est séduisante, mais il faut avoir en permanence deux paires de lunettes, une pour chaque face. De plus, elle m'a toujours fait penser à la définition des parties que donne Flaubert dans son dictionnaire **:**

> PARTIES : *Sont honteuses pour les uns, naturelles pour les autres.*

J'ai donc cherché un projecteur qui me permette d'y voir plus clair par certains côtés et évidemment, moins clair par d'autres (mais c'est le propre de tout projecteur).

UN VIEUX PROBLÈME

Je partirai d'un vieux problème que je donne à mes élèves dans toutes les classes (à partir de la 4ème) et je ferai quelques digressions à l'occasion. Je ne suivrai pas, non plus l'ordre naturel. Ce problème a traversé les siècles et les civilisations. On le trouve dans les traités hindous, arabes, italiens, français du moyen âge...

> *Deux arbres, l'un de 30 m. de hauteur, l'autre de 20 m. sont séparés par une distance de 90 m. Un morceau de viande se trouve en un endroit M sur la ligne joignant les pieds des arbres. Deux oiseaux, de même force, sont au sommet de chacun de ces arbres. Ils partent en même temps des sommets et se jettent sur la viande. Ils arrivent en même temps en M.*
>
> *A quelle distance du plus grand arbre se trouve la viande ? On donnera une solution algébrique, une graphique et une géométrique.*

1. LECTURE DU TEXTE

Je ne m'étendrai pas sur cette question, mais d'emblée on peut remarquer *qu'il faut l'interpréter*. Il ne sert à rien ici de comprendre le vocabulaire, la syntaxe, si le texte ***n'évoque pas*** que :

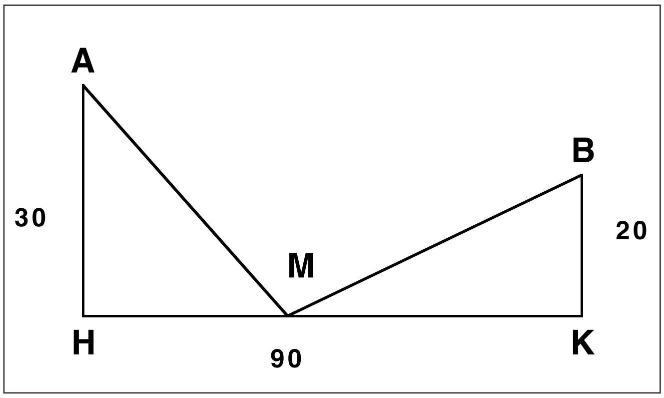
Les arbres sont verticaux
Le sol est horizontal
La ligne qui joint les pieds des arbres est un segment de droite (ou une droite ?)
Les oiseaux "de même force" (vont à la même vitesse)
Il n'y a pas de vent !!
Ils se jettent (ligne droite)

Il faut donc mettre à jour des "présuppositions". Il y en a **toujours** beaucoup en mathématiques et il est très dangereux de faire croire à l'élève qu'il n'y en a pas. Le fait de dire "un endroit M", "en même temps en M" permet de comprendre que M est un point (habitude d'élève). L'élève va donc pouvoir considérer un arbre comme un segment, etc. Il va même peut-être choisir des noms pour d'autres lieux. **Le texte a fabriqué un lecteur modèle.**

Contrairement à ce que l'on pourrait penser, les élèves les plus efficaces ici ne seront pas ceux qui seront les plus prudents dans leurs évocations, mais ceux qui vont délirer le plus : cela se comprend aisément. En effet, *l'aptitude à interpréter* un texte et donc à symboliser dépend de quatre activités :

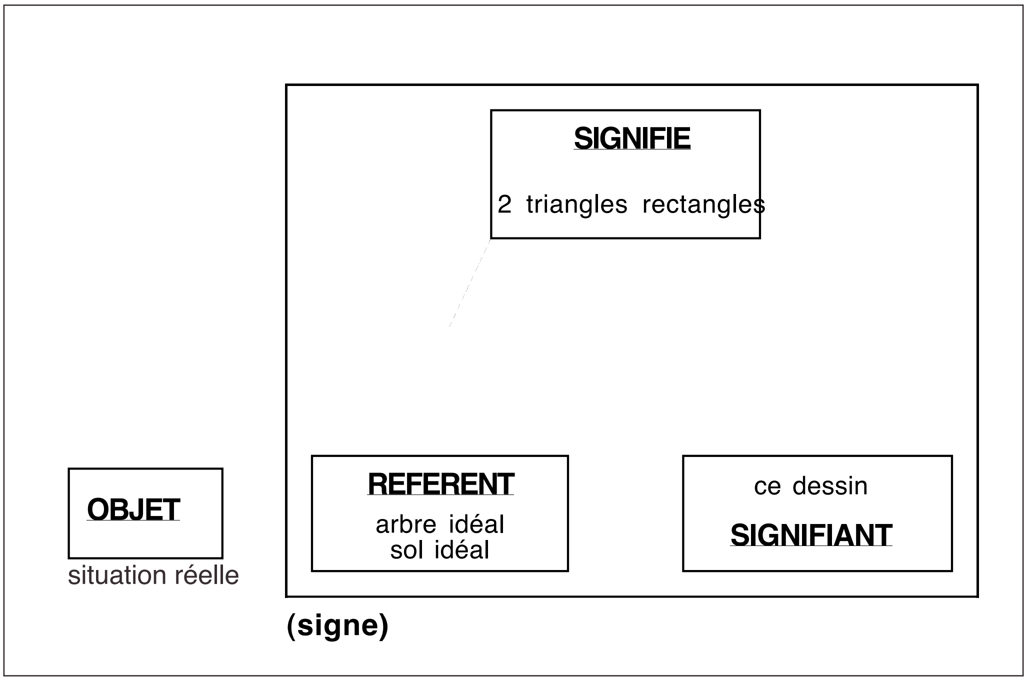
Évoquer
Narcotiser certaines informations réelles ou évoquées
Réactiver des infos "endormies".
Aimanter certaines d'entre elles pour créer des liens stables et pertinents.

C'est cela qui permettra à l'élève de faire une figure **pertinente** d'une part, puis après de faire fonctionner des scenarii opératoires : théorème de Pythagore, théorème de la médiatrice… L'élève construit à partir du texte des mondes possibles qui seraient plus ou moins facilement "mathématisables". On voit tout l'intérêt que le professeur de mathématique peut porter aux théories de la narration.



Nous reviendrons plus tard sur la figure, mais notons qu'ici elle n'est pas là pour elle-même, elle n'est pas là pour une classe de situations, mais elle est là pour représenter la situation géométrisée. Elle serait plutôt de l'ordre iconique (si elle avait été là pour elle-même, elle relèverait plutôt du signe "plastique").

On a donc un fonctionnement qui relève du schéma suivant :



Exemple :
— dans l'objet, l'arbre n'est pas exactement vertical, ni le sol horizontal,
— dans le référent, l'arbre idéal est exactement vertical, le sol exactement horizontal,
— dans le signifié l'angle AHK est droit,
— dans le signifiant, AHK est à peu près droit...

2. LES TROIS SOLUTIONS.

Solution algébrique du "bon élève"

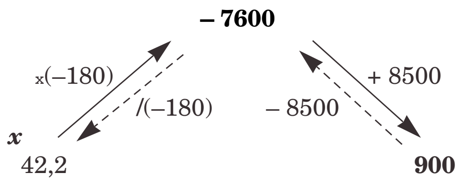
Choix de l'inconnue.

Il y a beaucoup d'inconnues : le nom des oiseaux, les distances MA, MB, le poids des oiseaux, la vitesse des oiseaux … Quatre sont pertinentes (après réflexion) : MA, MB, MH, MK.
J'en choisis une comme principale : la distance MH. Je vais lui donner un nom : x
MH = x
MK = $90 - x$
etc. MA = MB

Mise en équation

$MA^2 = MB^2$
$x^2 + 30^2 = (90 - x)^2 + 20^2$
$x^2 + 900 = 8100 - 180\,x + x^2 + 400$
$x^2 + 900 = 8500 - 180\,x + x^2$
$900 = 8500 - 180\,x$

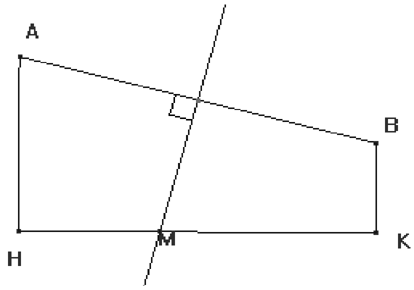
J'interprète l'équation :



La distance cherchée est 42 m.

Solution géométrique

Je trace sur du papier millimétré, à l'échelle $\frac{1}{1000}$, HK = 90 , AH = 30 , BK = 20.
MA = MB
donc M est sur la médiatrice de [AB] : Δ.
M doit être sur [HK].
Δ coupe HK en un point : c'est le point M cherché.
Je mesure HM.



Je trouve 42 mm à peu près.

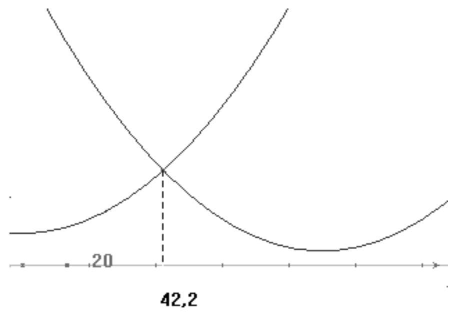
3. AMBIGUÏTÉS ET PREMIÈRES FIGURES DE RHÉTORIQUE

Suivons le conseil de Flaubert : " *Si tu veux des perles, jette-toi à la mer*.". Nous allons en examiner quelques-unes.

Les premières vont nous permettre de chercher un bon projecteur. Nous utiliserons cet outil ensuite. Une difficulté déjà : la distinction entre l'inconnue (la distance de M à H) et le nom de l'inconnue : x. On connaît les conséquences pédagogiques de la confusion. L'enjeu, c'est la distinction entre signifié et signifiant. C'est du côté de la linguistique que

Solution graphique

On dresse deux tableaux numériques pour deux fonctions.
Par exemple : a(x) = $x^2 + 900$
et b(x) = $(90 - x)^2 + 400$.
On trace les graphiques des deux fonctions sur papier millimétré.
Les deux courbes se coupent en un point E.



L'abscisse de E donne la solution , soit environ 42 m.

nous irons chercher : la distinction entre "la **chose**" et "le **nom de la chose**". La confusion est entretenue par nous et par les manuels. Les problèmes n'ont jamais "une seule inconnue", même si on se limite aux pertinentes. Quand je dis "je me ramène à une inconnue", je dis seulement que je vais exprimer le nom de toutes les inconnues pertinentes en fonction du nom d'une de ces inconnues. En fait, je donne au "signe" les propriétés de la chose, comme quand un sot dit : " le croissant étouffera la croix au petit déjeuner" ou "la couronne a rendu la justice". Il s'agit d'une attitude rhétorique, et plus précisément, nous le verrons plus tard, d'une **métonymie du signe.**

Un deuxième exemple. Quand l'élève décide d'interpréter " 8100 – 180 x " comme :
" + 8100 – 180 x ",
il doit restituer d'abord un signe absent (+), c'est-à-dire lire d'abord l'expression comme : " + 8100 – 180 x ", un peu comme quand il entend " 'man " et qu'il sait qu'il s'agit de "maman".

Observons le mécanisme :
1) il a conçu + 8100
2) il a écrit 8100

plus loin

3) il a perçu 8100
4) il a conçu + 8100

Le 1) et le 2) correspondent à la *fabrication* d'une figure de rhétorique particulière (**l'aphérèse**). Le 3) et le 4) correspondent à la *lecture* de cette figure. Liquidons tout de suite l'idée selon laquelle ce comportement serait anodin : on peut formuler l'hypothèse qu'il est à la base d'innombrables erreurs en calcul. La mauvaise gestion de la suppression du " + " a des conséquences incalculables. Voici une dérive fréquente :

+3 $\longrightarrow$ 3 , + n'a pas d'importance, donc a + b est lu ab , donc écrit ab , confusion alors avec la multiplication pour certaines propriétés... etc.

De même : – 7 – 3 = – 4 n'est qu'un refus de voir le + dans (–7) + (–3) ainsi que les parenthèses.

Bien sûr, dans le premier cas, la disparition porte sur un signe prédicatoire, dans le second, sur un signe opératoire.

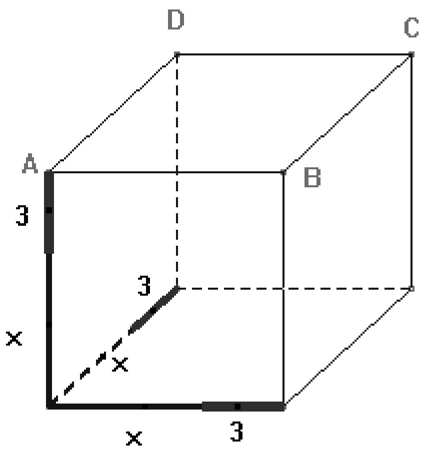
Nous allons faire un mini-inventaire de ces lieux d'ambiguïté en les classant suivant les mécanismes qui y conduisent, puis nous mettrons en évidence deux catégories de règles en mathématiques et en géométrie dont la nature explique la majorité des erreurs d'élèves du point de vue de "l'**application**" de règles. Enfin, nous en déduirons des pistes d'enseignement ou de remédiations. (le vilain mot).

NIVEAUX DE LANGAGE

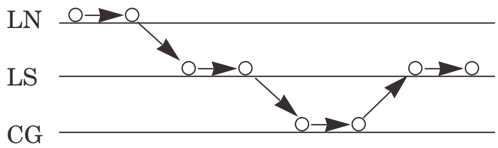
Faisons quelques remarques préalables avant de revenir à notre problème. André Cauty nous invite [17] à concevoir le langage mathématique comme hétérogène. Il distingue plus précisément 3 niveaux :

- La langue naturelle (LN)
- Le langage symbolique (LS)
- Le(s) code(s) graphiques (CG)

Exemple : Avec la phrase : " *La face ABCD de ce cube est un carré d'aire* $(3+x)^2$ ",



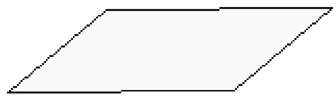
On a un discours et une pensée qui ont de façon grossière ce parcours **:**



Chacun de ces trois "codes", ses règles et leurs transgressions, peut, de façon également très grossière, être examiné de quatre points de vue.

1) Le point de vue de la *forme des signifiants*, c'est-à-dire le point de vue ***morphologique***.

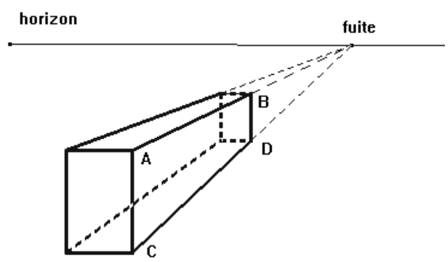
Exemple : écrire "fac" pour *faculté* est une transgression de la forme ;
même chose pour 3 au lieu de + 3 ;
même chose pour ce parallélogramme



mis en géométrie dans l'espace pour un carré.

2) Le point de vue des règles *d'organisation des signifiants* : c'est-à-dire le point de vue ***syntaxique***.

Exemple I : Il a mangé une pomme et un grain de raisin. Il y a là une rupture (légère) syntaxique (ellipse du verbe).
Exemple II : 3 + 2a .Il y a là une grande transgression de syntaxe (double ellipse de parenthèse et de signe x) : 3 + (2 x a).
Exemple III :



Dans ce dessin "(AB) et (CD) sont parallèles" :

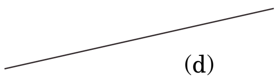
transgression du code graphique “plan” où elles sont concourantes.

3) Le point de vue du *sens des signifiants*, c’est-à-dire de leur *rapport aux signifiés*. C’est le point de vue ***sémantique***.

Exemple I : Face à la crise, Richard est un lion ; rupture de sens pour indiquer “courage”.

Exemple II : $3.(2.\vec{u}) = (3.2).\vec{u}$; les “ . ” ont deux sens différents : il y a une rupture de sens.

Exemple III : une droite (d) ; je dessine en fait un segment pour signifier une droite.

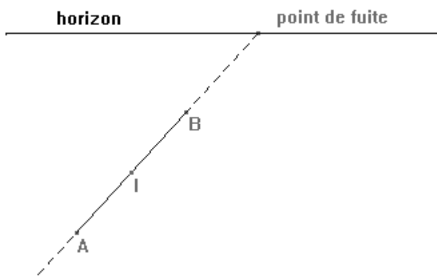


4) Le point de vue du *rapport au réel*, plus précisément du rapport entre *signifiant et référent.* C’est le ***point de vue logique***.

Exemple I : “J’ai la tendresse comme un rasoir, petite...”

Exemple II : $2x = 9$ la transgression réside dans : $x = \dfrac{9}{2}$ l’absence de lien “causal”

Exemple III : Prenons un dessin en perspective à point de fuite.



Avec le double décimètre je m’aperçois que I est le milieu de [AB]… La conclusion est donc que I n’est pas le milieu de [AB] en réalité.

L’analyse des points de vue dans un texte mathématique courant est donc :

- LN
  - morphologique
  - syntaxique
  - sémantique
  - “logique” (/réel) ou *pragmatique*
- LS
  - morphologique
  - syntaxique
  - sémantique
  - “ logique” (/réel) ou *pragmatique*
- CG
  - morphologique
  - syntaxique
  - sémantique
  - “ logique” (/réel) ou *pragmatique*

On peut raffiner en analysant de façon plus précise le signe visuel, parce qu’il y a plusieurs codes graphiques, ce que nous ne ferons pas dans cette étude. L’illusion courante consiste à croire que le travail dans les divers codes se fait en suivant leurs règles (des règles). D’où une vision “déductive”, même si les sauts d’un niveau à un autre tempèrent l’illusion linéaire. Nous formulons l’hypothèse que l’activité “principale”, au sens de “humaine”, par opposition à “automatique”, en mathématiques, consiste à violer les règles des codes, mais de façon “réglée”.

Nous allons auparavant définir la “rhétorique d’un code”, puis nous allons repérer quelques figures rhétoriques fondamentales dans notre activité mathématique et surtout dans celle de l’élève.

FIGURE RHÉTORIQUE.

Pour indiquer tout de suite l’enjeu didactique de cette vision, nous ferons l’hypothèse suivante : *A chaque instant du développement mathématique d'un individu, trois sortes de règles nouvelles apparaissent pour lui.* Certaines règles nouvelles sont dans le **prolongement des anciennes règles**. D'autres arrivent **de façon neutre**, pour s'ajouter aux anciennes. Une troisième catégorie arrive **en violation des codes antérieurs** : nous appelons ces règles des "contre-règles".

Elles ont toujours une dimension subjective et une dimension objective. *Un exemple célèbre :*

— *code oral naturel* : onze, douze, treize, quatorze, quinze, seize, dix-sept. dix-huit, dix-neuf.

— *code symbolique écrit* : 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19.

L'apparition de *dix-sept* marque une première rupture : l'arbitraire du code oral disparaît et une relative concordance avec l'écrit symbolique apparaît. (Essayons d'imaginer le formidable changement que cela représente pour un enfant). Mais il y a plus ! La concordance de *dix-sept* avec 17 laisse apparaître qu'il y a une ellipse de "plus" : deuxième rupture. Enfin, *quatre-vingt* donnera une troisième rupture : ellipse de " x ".

On mesure les enjeux de ces trois violations successives de code. En fait, il y a là-dessous trois figures de rhétorique (Notez que pour les anglais, la rupture est à 13, mais elle n'est pas de même nature, etc.). Je suis convaincu que le réflexe d'écrire " ab " pour " a + b " huit ans plus tard a quelque rapport (avec d'autres facteurs) avec cette première gestion, non négociée, de l'ellipse.

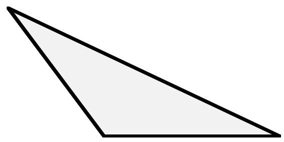
Une dernière remarque théorique : elle concerne ce qu'on appelle ***le degré zéro*** [1], [2]. On appellera "degré ***zéro***" en un lieu donné d'un discours (linguistique, symbolique ou graphique) le fragment de discours qui est *attendu* en ce lieu.

*Exemple : Je bois « **un verre** » ;* ce qui est attendu en est un *liquide buvable* et non pas un contenant.

Exemple : 8500 – 180$\boldsymbol{x}$; j'attends :

$$8500 - (180 \times \boldsymbol{x})$$

*Exemple : H est l'ortho***centre** *du triangle ci-dessous :*



J'attends un point à *l'intérieur* du triangle.

On peut distinguer quatre sortes de degré zéro.

a) Le **degré zéro *général*** : attendu en vertu des lois du code.
17 = 3 x 4 + 5, j'attends (3 x 4) + 5

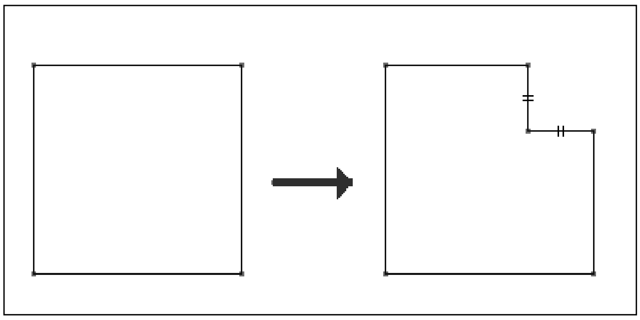
b) Le **degré zéro *local*** : attendu en vertu du contexte. L'écriture $a(x) = x^2 + 400$ pourrait représenter l'équation paramétrique :

$$ax = x^2 + 400 .$$

Dans le cas du problème hindou, le contexte m'assure que "a" est une fonction, pas un nombre.

c) Le **degré zéro *pragmatique*** : attendu en fonction d'expériences antérieures.

Exemple : que devient le périmètre du rectangle quand on enlève le petit carré ?
(cf. figure ci-contre, en haut de page)



Pour l'enfant de CM.2, ce qui est attendu est une diminution, en vertu de travaux antérieurs sur les découpages et les aires.
La vérité sera un grand choc pour lui.

d) Le **degré zéro** que nous appellerons ici ***"importé"*** (ou *transposé*). C'est une notion qui concerne les cas où plusieurs codes interviennent simultanément dans le discours. Ce sera ce qui est attendu dans un code l'est par homologie avec un autre code parallèle qui compose le discours.

Par exemple, quand j'utilise le triple du carré :

$$x \xrightarrow{\text{carré}} x^2 \xrightarrow{\text{triple}} 3x^2$$

J'attendrai *par analogie* l'ordre inverse :

$$\text{LN} \xrightarrow{\textit{Triple}} \quad \textit{du} \quad \xrightarrow{\textit{carré}}$$

$$\text{LS} \xrightarrow{\text{carré}} \qquad \xrightarrow{\text{triple}}$$

Autre exemple : [CD] et [EF] (cf. figure ci-contre)

LN : le segment EF et le segment CD (c'est volontairement que je n'ai pas mis les crochets) ne se rencontrent pas.
CG : plan (habituel) : le segment EF et le segment CD du dessin se rencontrent.

FIGURE RHÉTORIQUE

Je dirai qu'il y a une figure rhétorique en un lieu d'un discours si ***ce qui s'y trouve n'est pas ce qui y est attendu.***

Ou si : *ce fragment du discours ne coïncide pas avec le degré zéro*.

Ou si : *ce qui est "perçu" n'est pas ce qui est "conçu"*.

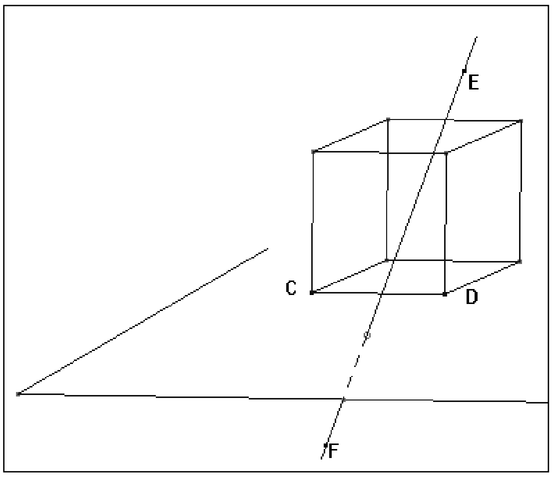
On voit que le mécanisme est double :

— il faut percevoir un écart,

— il faut réduire cet écart.

C'est ce double mouvement qui assure la compréhension. Si un des moments n'est pas maîtrisé :

ou bien on perçoit et on ne peut pas réduire, et c'est le discours qui n'est pas compris, la vision des codes restant intacte ;



ou bien on conçoit, mais sans percevoir réellement l'écart, et, à terme, la cohérence du code sera détruite.

On ne peut pas faire l'économie de ce conflit sans dommages. Mieux, il est capital de le faire émerger pour que l'élève le gère. C'est parce que, la plupart du temps, il reste non conscient et gommé par l'apprentissage d'une nouvelle règle, que de multiples "erreurs" ou conceptions fausses surgissent définitivement.

Suivant que la figure porte sur un ou deux codes, nous dirons qu'il s'agit d'une figure *homogène ou hétérogène.*

Nous appellerons donc contre-règle une règle qui prescrit une transgression, c'est-à-dire qui a pour fondement une figure rhétorique. On peut schématiquement ramener les transgressions à quatre types :

— *Suppression de quelque chose*
— *Adjonction de quelque chose*
— *Suppression de quelque chose et adjonction d'autre chose*
— *Permutation de deux choses.*

TRANSGRESSION PAR SUPPRESSION

" La première fois que j'ai vu une femme nue, j'ai cru qu'il s'agissait d'une erreur". (Woody Allen)

Quelques exemples de figures courantes en mathématiques.

1) *Au niveau* ***morphologique*** d'abord (métaplasmes par suppression)

On a vu **l'aphérèse** : *on supprime la partie avant* d'un mot ou d'un symbole. 8500 au lieu de + 8500, $\sqrt{5}$ au lieu de lecture de gauche à droite, et hors de toute signification, un peu comme "tention !" pour "attention !"

Il y a *la suppression de la partie arrière* d'un mot ou d'un symbole (**apocope**) : écriture de 0,33 pour 1/3, de 3,14 pour pi, ou toute troncature d'usage. Sin pour sinus, log pour logarithme, cos pour cosinus, exp pour exponentielle. d pour droite, f pour fonction, p pour périmètre, a pour aire..., un peu comme en français "fac" pour "faculté"

Il peut y avoir suppression "au milieu" (**syncope**) :
Exemple : tg$x$ pour tangente de x. Il existe une variante *graphique* extrêmement importante pour les petites classes :
$\boxed{3 + 4}$ écrit [3 + 4] (crochets ou parenthèses).

2) *Au niveau* ***syntaxique*** ensuite (grammatical) (donc métataxes par suppression)

Il y a là toute la panoplie des **ellipses**. Ce sont des suppressions d'un mot ou d'un groupe de mots, d'un symbole ou d'un groupe de symboles jouant un rôle : *"Il partagea le pain et le vin"* pour *"il partagea le pain et il partagea le vin".* On en trouve beaucoup et elles sont souvent décisives :

Ellipse en langage symbolique. Par exemples ellipses de :

a mis pour $\frac{a}{1}$. *Exemple* : calcule $\frac{a}{5} + a$

a mis pour $a \times 1$. *Exemple* : factorise $a^2 + a$

a mis pour a^1. *Exemple* : simplifie $\frac{a}{a^5}$.

Voici une ellipse meurtrière, dont la gestion est décisive pour le calcul sur les relatifs :

$3 - 10 + 5$ pour $(+3) + (-10) + (+5)$

Et aussi :

$\frac{a+b}{2}$ pour $\frac{(a+b)}{2}$ (ellipse de parenthèses) ;

a b pour $a \times b$

Dans notre problème :

$-180y$ pour $-180 \times y$

$8500 - 180y$ pour $8500 - (180y)$

$8500 - 180y + y^2$ pour $[8500 - 180y] + y^2$ ou pas à pas de gauche à droite !!

Évidemment, toutes ces "figures" peuvent être ***vues*** comme des *applications* de "nouvelles *règles*" du code, par exemple des règles de priorité. Il reste que ces nouvelles règles se sont, à un moment donné, présentées comme des violations du code antérieur. Elles sont restées comme telles pour certains élèves, à moins que, plus gravement, elles n'aient été acceptées de façon passive et donc aient contribué à la *désagrégation du code tout entier*.

Continuons. Il y a des ellipses au niveau LN (langue naturelle) :

Angle de 45 degrés pour "angle de *mesure* 45"

Bissectrice pour "bissectrice *intérieure*"

Plus terrible : *"racine carrée" pour "racine carrée positive de*". L'impossibilité pour certains de concevoir que $\sqrt{a^2} = -a$ pour a négatif ou que le carré de $-\sqrt{3}$ est 3 peut venir en partie de là. L'arsenal pédagogique (remarquable par ailleurs, mais trop peu connu) consistant à lire "radical de 9" n'est qu'une tentative désespérée de compenser les effets dévastateurs (mais il y a aussi des effets dynamiques) de cette ellipse.

En voici une bien ancienne (mais la raison pédagogique et le souci de démocratisation dans la construction des savoirs la fera revenir) : " $(a + 2)x^2$ est un monôme " !!! pour " $(a + 2)x^2$ est un monôme en x ". La mauvaise gestion de cet écart peut suspendre momentanément la compréhension profonde de ce qu'est un polynôme.

Encore un exemple non anodin : pour certains élèves le passage de $a + (b + c)$ à $a + b + c$ est de même nature que celui de $a(b+c)$ à $ab + ac$ (disparition des parenthèses dans les deux cas). La mauvaise gestion d'un de ces deux cas aura des conséquences perturbatrices en calcul littéral.

Il faudrait bien sûr raffiner sur les diverses ellipses, mais ce n'est pas encore l'objet de notre travail. Remarquons cependant que quand je dis : "Où il y a de la gêne, il n'y a pas de plaisir", il y a une ellipse de *là* (*là* où). Mais ce terme supprimé est associé *couramment* au mot de l'énoncé : *où*. Le terme *là* est associé d'habitude à son "compagnon" *où*. Ce mécanisme doit faire l'objet d'une éducation particulière.

Des exemples en calcul : la somme $2 + \frac{3}{4}$ est écrite $\frac{2}{1} + \frac{3}{4}$, où $\frac{2}{1}$ est associé à 2 ; ou encore $3a + a$ pour $3.a + 1.a$; ici 1. est associé à a.

Ce type d'ellipse est appelé "anacoluthe" (compagnon) : il est réductible par apprentissage d'automatismes.

Il y a en L.N. des ellipses qui jouent un rôle déterminant. Ce sont les *ellipses de conjonction de coordination* dites **asyndètes**. *Exemple* : " hommes, femmes, enfants avançaient en silence", (ellipses de "et"). En algèbre :

$(x-3)(x-2)=0$

$x=3 \quad x=2$

Le *ou* a été supprimé, même si la disposition dans la page le suggère, encore que... !!

Voici un bel exercice témoin *: Place dans un repère l'ensemble des couples (x,y) tels que (x – 3) (y – 2) = 0. 50 % donnent le point (3,2) seul : conséquence de l'habitude de ne pas gérer la précédente ellipse.*

Ou encore :

Résoudre :

$$\begin{cases} x+y=10 \\ x-y=4 \end{cases}$$

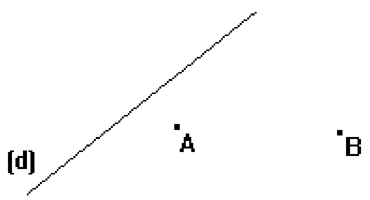
On conclut couramment $x=7$, $y=3$. Le *et* est supprimé.

Voici un bel exercice témoin : Résoudre

$$\begin{cases} 3x+3y=30 \\ x+y=4 \end{cases}$$

et 50 % donnent : x quelconque et y quelconque.

Un dernier cas plus pervers, où la réduction de l'asyndète du "et" est décisive pour la solution : Trouve le point M de (d) équidistant de A et B, c'est-à-dire "point sur (d) **et** point équidistant de A et de B"



Un deuxième groupe d'ellipses décisives en L.N. sont les ***suppressions de la marque de rapport causal.*** **(**suppression de : donc, or, si, comme**).**

En français. *"Les enfants courent, les pigeons s'envolent".*

Cette figure est présente dans notre problème : MH = x , MK = 90 – x . On la trouve aussi "malheureusement" (ou heureusement ?) dans les énoncés de théorèmes. Ainsi *"Tout multiple de 6 est multiple de 3",* ou *"Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse..."* (en fait : SI ...., ALORS......). Dans les démonstrations aussi :

M est équidistant de A et B ;
M est sur la médiatrice de [AB] ;

Ce sont des ***parataxes***.

3) Examinons les suppressions au niveau du **sens**, c'est-à-dire les "métasémèmes" par suppression. Le type le plus important est la "synecdoque **généralisante**" (le destinataire du message est obligé de "généraliser" pour réduire l'écart).
Exemple : " Qui vit par l'épée périra par l'épée".

Si cette phrase est prononcée dans un western, épée doit être remplacée par "arme". Il s'agit bien d'une suppression de sèmes (*éléments* de *sens*). (On passe de épée à arme en supprimant certains "sèmes", certains éléments de signification de "épée" pour ne garder que les éléments qui en font une "arme"). Le mouvement de généralisation est bien une suppression de sèmes, d'appauvrissement de sens, d'abstraction.

Il y a plusieurs sortes de synecdoques généralisantes :

particulier	***donné pour***	le général
partie	***donné pour***	le tout (ce bras qui tant de fois...)
espèce	***donné pour***	le genre.

En mathématiques, les exemples foisonnent :

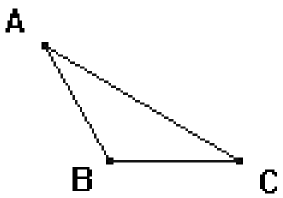
Quand je dis “le rationnel $\frac{2}{3}$ ” je signifie : “ le rationnel dont un représentant est $\frac{2}{3}$ ”.

Dans Q, $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ n’a de sens que par une double synecdoque. On peut garder l’illusion grammaticale en définissant la fraction comme un quotient, mais quel sera le prix à payer plus tard par l’enfant ? De même pour le vecteur $\overrightarrow{AB}$: le vecteur dont un représentant est (A,B) ou encore de même : la translation $A \longmapsto B$. *De façon générale : chaque fois qu’on désigne une classe par un de ses représentants.*

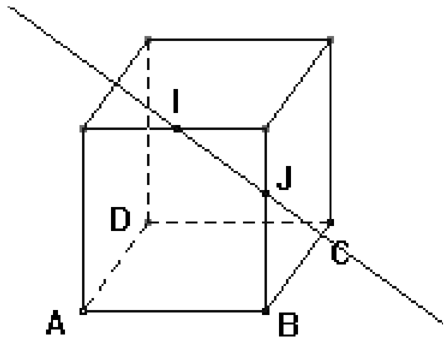
En géométrie, le tracé d’une droite est une synecdoque : je donne la partie pour le tout, puisqu’en fait je trace un segment ; tout enseignant réel sait quelles batailles il faut livrer pour gérer celle-ci.

De même le tracé concret de la courbe d’une fonction est évidemment de ce type (partie pour tout : le problème des asymptotes par exemple). Les élèves qui ne réduisent pas l’écart sont victimes d’incompréhensions durables.

Par exemple l’impossibilité de tracer la hauteur issue de A dans ce triangle



ou encore de trouver l’intersection de (IJ) et de (ABCD) dans la figure ci-dessous relèvent de cette faiblesse.



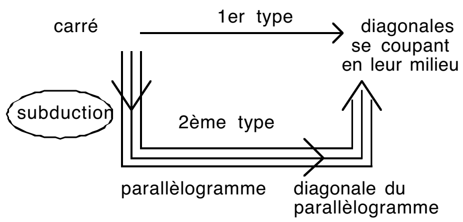
A ce type se rattache aussi la désignation d’une fonction par une image générique : la fonction x^2, la fonction $2x - 3$, au lieu de $x \longmapsto x^2$, ou f telle que $f(x)=x^2$. On connaît toutes les conséquences négatives qu’entraîne une mauvaise gestion de ces écarts. (L’illusion des années 70 portait en partie sur l’idée qu’il était possible de ne pas avoir de tels écarts en ayant un langage suffisamment strict. La tentation puriste est battue en brèche par les machines : touche $\frac{1}{x}$, touche e^x)

Pour sentir toute l’importance de cette activité de l’élève, ailleurs qu’en mathématique, remarquons que le fondement de la réduction d’écart ici est le puissant outil de pensée qu’est la **subduction**, essentiel en heuristique. Ce mouvement de pensée est un processus d’abstraction et d’appauvrissement sémique, courant dans l’activité mathématique. Par exemple quand l’élève interroge “sa *figure concrète*” pour trouver les propriétés de *la figure générale*.

4) Enfin examinons le cas de la **suppression au niveau logique,** c’est-à-dire dans le rapport à la "réalité" (il s'agit donc des métalogismes par suppression). Le plus fréquent est la **litote** : *on dit moins pour dire plus*.

"*La projection parallèle conserve les rapports*" pour la "projection parallèle d'une droite sur une droite conserve les rapports de deux segments de la première" ou "*la somme des angles d'un triangle est 180° "* pour "la somme des angles d'un triangle, en géométrie plane, est 180° ".

Dans notre problème : " le carré de l'hypoténuse" pour "le carré de la mesure de l'hypoténuse". (Pour les Grecs, il n'y avait pas figure). *Un exemple de "trajet de pensée" de ce type : pour un carré et ses diagonales se coupant en leur milieu, il y a deux types d'élèves.*



TRANSGRESSION PAR ADJONCTION

" Jusqu'à 40 ans,
j'ai cru que c'était un os"
(Henry IV).

1) Au niveau morphologique (métaplasmes), ce sont des figures du type *es*quelette ou femm*elette* ou ra*joli*vissant, etc. L'écriture : $+ 8500 - 180x$ au lieu de $8500 - 180x$ pour mettre en évidence la composée " multiplier par (–180) puis ajouter 8500 " :

$$x \longrightarrow -180\,x \longrightarrow -180\,x + 8500$$

est de ce type (on pourrait l'appeler une ***prosthèse***).

2) Au niveau syntaxique, il y a divers métataxes par adjonction. *" Saisissez-**moi** ce petit vaurien"*. " Moi" est inutile : il permet seulement une *mise en valeur*. Cette figure est une **explétion**. Elle joue un rôle capital en technique symbolique.

Exemple : Factoriser $(x + 1)(2x + 3) + 5x + 5$. J'écris $(x + 1)(2x + 3) + (5x + 5)$, etc. Les parenthèses que j'introduis sont explétives.

Ensuite, on peut trouver ***l'incidence*** (ou la parenthèse) : " J'ai compris (*du moins me semble-t'il*) qu'il n'y avait rien à comprendre". Dans la rédaction de raisonnements, elle intervient souvent. Ainsi dans :

$MA^2 = x^2 + 400$ ***(théorème de Pythagore).***

La ligne centrale du texte, du raisonnement, ou du calcul, se brise, parce qu'elle est chargée d'éléments annexes qui s'intercalent entre les parties.

$(90 - x)^2 + 400$

$(8100 - 180x + x^2) + 400$ ("$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$")

$8100 - 180x + x^2 + 400$ ("suppression des parenthèses")

On peut trouver d'autres figures de ce type.

3) Au niveau sémantique, le métasémème par adjonction privilégiée est la **synecdoque particularisante**. (le destinataire du message est obligé de particulariser pour réduire l'écart, donc d'ajouter des sèmes)

On donne le général pour le particulier ou la matière pour l'objet : *" Mourir par le fer", "le quadrumane accéléra...".* Le mécanisme correspondrait à un enrichissement sémique : **général** mis pour **particulier**.

Exemples :
— Voici un rectangle ABCD. Les diagonales de ce *parallélogramme* se coupent en leur milieu.
— M' est la projection de M (au lieu de : image de M par la projection centrale p)
— $(\sqrt{5}+3)^2 = 5+6\sqrt{5}+9$ puisque $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
(Chaque fois qu'on fait appel à une règle générale pour justifier un cas particulier).

4) Au niveau logique
Euphémisme : dire le moins pour dire le plus
Hyperbole : on dit le plus pour le moins.
Au lieu de "(AB) // (CD)", on dit : " ABCD est un carré" dans le cours d'une démonstration.

TRANSGRESSION PAR SUPPRESSION-ADJONCTION

" A toute erreur de sens correspondent d'étranges fleurs de raison".
(Aragon)

Commençons par le niveau des métasémèmes (sémantique)

1) La métonymie : " La solution de l'équation 900 = 8500 – 180x est le zéro de la fonction 7600 – 180x ". Le zéro de la fonction, c'est le nombre qui "annule" cette fonction (ou qui a pour image 0). C'est donc la cause de l'annulation. Quand je désigne ce nombre par "le zéro", je dis l'effet pour parler de la cause. C'est une *métonymie* de l'effet.

De même, *"Cet enfant est ma joie"*.

De manière plus schématique : on a un moyen terme qui englobe les deux autres. Et dans cette totalité, effet et cause sont "contigus". Notons que la métonymie est la composée de deux synecdoques "opposées".

Opération de remplacement et calcul de valeur numérique

Effet	**Cause**
zéro	7600/180

Métonymie du contenant pour le contenu.
Exemple : " je bois un verre". Dans cette totalité qu'est l'action de boire, contenant et contenu sont contigus.

Action de boire

Contenant	**Contenu**
verre	liquide

Autres exemples de métonymie du contenant en mathématique :
Aire du cercle pour "aire du disque", *Volume de la sphère* pour "volume de la boule", *Aire du rectangle* (on voit qu'il y a figure si le rectangle est un polygone et pas une intersection de bandes : quels problèmes pédagogiques ! ! !)

Autre métonymie : la métonymie du ***signe*** *mis pour la fonction.*
" Au Chili, en 74, le ***sabre*** *a pris le pouvoir".*
En maths : x^2 est continue.

Du même type, on peut reconnaître des métonymies de l'image : " f est convexe" pour "la partie du plan située au dessous du graphique de la fonction f est convexe".

Métonymie de l'instrument.

" périr par l'épée"
une cubique, une quadrique...

Métonymie de l'auteur :

un Banach, un Laplacien, etc…

Voyons un aspect de la métonymie qui nous servira plus tard. On peut imaginer des séries :

série *causale* : dérivable, continue, définie.

série *intensive* : glacial, frais, tiède, chaud, brûlant, torride.

série *numérique* : un, deux... cent...

série *matérielle* : biceps, bras, homme, famille.

série *spécifiante* : complexe, réel, décimal, entier relatif, naturel.

série *abstraite* : carré, rectangle, parallélogramme, quadrilatère, polygone.

série *constitutive* : polygone, cotés, angles, sommets, diagonales...

Une des méthodes de fabrication ou de réduction des métonymies et des synécologies consistera à donner un élément d'une série pour un autre élément de la même série. *" La France a besoin de bras", "ce quadrilatère est fier d'exhiber ses quatre axes de symétries".*

On voit que la façon de travailler de la métonymie est liée à une contiguïté de deux termes sur une de ces séries. On peut constituer des chaînes de métonymies possibles. On voit tout l'intérêt que l'on peut tirer de cela pour observer les mécanismes de recherche des élèves, en géométrie ou non, basée en partie sur ces véritables "trajets métonymiques".

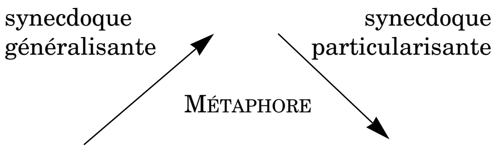
Les passages de l'équation

$(x+ 7)^2 - 2x - 14 = 0$
à $(x+ 7)^2 - (2x + 14) = 0$
à $(x+ 7)^2 - 2(x + 7) = 0$
à $(x + 7)(x + 5) = 0$

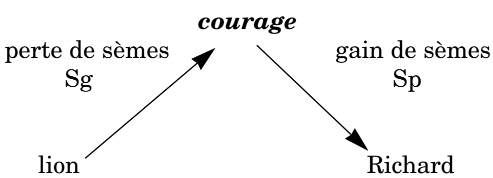
est de l'ordre de la métonymie. Par contre, le passage à $x + 7 = 0$ ou $x + 5 = 0$ relève de la métaphore. Pour les 4 premières lignes, il est même de l'ordre de la synonymie.

2) La métaphore

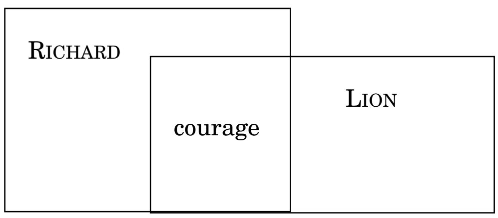
Un deuxième métasémème intervient, composé aussi de deux synecdoques, mais dans l'ordre contraire :



"Richard, le vieux lion licencié, refusait de quitter son usine". Le mécanisme est le suivant (lecture) :



ou :



La **métaphore** est donc la composée de deux *synecdoques* : la première généralisante (perte de sème, abstraction), la seconde particularisante (gain de sèmes, "concrétisation") : c'est l'inverse pour la métonymie.

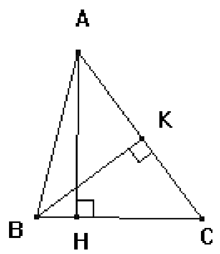
Exemples :
— *erreur, incertitude, troncature, arrondi, moyenne, espérance.*
— *affine par morceau, en escalier, col, filtre, voisinage, base (d'un triangle), d'un solide, de voisinage, d'un espace vectoriel, adhérence (!), frontière, maximum, sommet, raffinement, chaîne, treillis, limite.*

Mon expérience personnelle concernant cette figure en mathématiques me conduit à distinguer par rapport à ces cas extrêmement nombreux, deux attitudes :

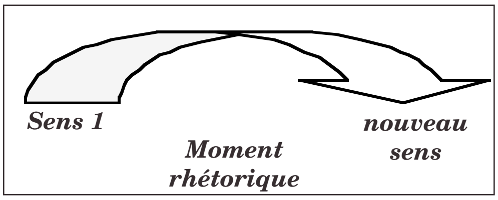
Ou bien j'adopte le point de vue grammatical, c'est-à-dire "définitoire" : j'adopte la définition de la "limite" qu'on me donne par exemple, en considérant le signifiant "limite" comme entièrement nouveau. Cette attitude est généralement adoptée dans 99 % des cas (malheureusement). L'avantage est que l'on peut travailler efficacement à court terme, sans se poser de question, tout de suite, dans un domaine bien délimité des mathématiques (celui où a été introduit la notion).

Ou bien j'adopte de point de vue rhétorique, c'est-à-dire que j'accepte de sentir l'écart entre mon idée usuelle de limite et celle qu'on me donne maintenant. Alors il faut réduire l'écart ! Cela peut être long et douloureux à court terme, la définition donnée n'est pas opérationnelle tout de suite. Je dois passer par des stades divers qui diminuent peu à peu l'amplitude de l'écart "perçu-conçu". Mais le bénéfice est immense ensuite. On gagne en profondeur, en étendue (extension et adaptation plus rapides à d'autres domaines des mathématiques ou d'ailleurs). Les avatars de la définition de limite dans l'enseignement *depuis quarante ans me semblent explicables seulement par une tentative désespérée (et à mon avis illusoire) de faire adopter par l'élève toujours le point de vue grammatical et d'escamoter le point de vue rhétorique pour lui. A long terme, cela me semble inefficace : d'ailleurs, nous enseignants, c'est toujours le point de vue rhétorique que nous avons (heureusement). Seulement est-il honnête de demander à un élève de mettre au congélateur son expérience usuelle de la limite, pour lui éviter de vivre quelque temps un conflit ? Et si c'était justement le conflit qui était le moteur de la compréhension ? Ici et ailleurs ?*

Un exemple plus courant en 6ème ou en primaire : *base d'un triangle* et *hauteur*.



Est-il sain, sous prétexte que plus tard le mot hauteur ne sera pas lié à la verticalité d'apprendre tout de suite à l'élève que [BK] est la hauteur du triangle ? Je dis non ! (C'est un point de vue). Il faut que la hauteur soit d'abord [AH], pendant longtemps. Puis il va être confronté à une métaphore liée à la possibilité de tourner la figure pour que [BK] soit vertical. Il y a là toute une rhétorique du signe iconique ([1] et [2]) qui va nous aider à gérer avec lui ce nécessaire conflit. Ensuite à le dépasser. Ensuite le mot hauteur prendra un nouveau sens, etc.



Escamoter ce long moment conflictuel, c'est faire bon marché des lois de la perception visuelle, du fonctionnement des extracteurs de direction, des mécanismes d'excitation et d'inhibition liés au "vertical" et à "l'horizontal" pour un être humain en état de pesanteur. Ensuite seulement l'élève pourra atteindre le nécessaire point de vue *surréaliste* qu'André Breton caractérise comme "le point d'où le haut et le bas cesse d'être perçus contradictoirement" et qui est peut-être le point de vue mathématique.

Un autre point de vue sur la métaphore peut nous aider. Prenons l'exemple de Saussure, repris par René Thom. *" Au soir de sa vie, il s'aperçut que le créole était une langue".* (Compte rendu fictif de l'Assemblée Nationale en 2010). Parmi les sèmes de soir, il y a *fin* par rapport à *jour*. Parmi les sèmes de vieillesse, il y a *fin* par rapport à *vie.*

Si je décide que par *certains côtés*, ***vie*** équivaut à ***jour***, alors vieillesse équivaudra à soir. Cette correspondance "par certains cotés" assure un "morphisme relationnel" :

Correspondance $\quad$ ***Vie*** ↓ ***Jour*** $\qquad$ ***Vieillesse*** ↓ ***Soir***

C'est une vision commode de la métaphore, liée à des équivalences. Réduire une métaphore peut donc consister à construire et calculer une 4ème proportionnelle. Les travaux sur la proportionnalité comportent ainsi deux approches : une liée à "produit des extrêmes" = "produit des moyens", une autre fondée sur des "métaphores" importées d'un domaine à un autre et faisant intervenir les morphismes. Nous ne développerons pas plus avant, sauf pour signaler que dans les équations, le passage de :

	$6 + 2x = 30$	E_1
à	$3 + x = 15$	E_2
à	$x = 15 - 3$	E_3

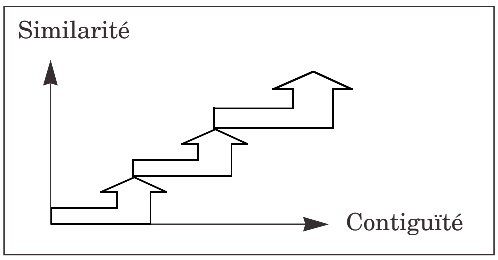
relève de l'équivalence "a le même ensemble de solution que" et donc relève de la métaphore. Le passage de E_3 à E_3, puis à E_3 relève de l'équivalence, de la paraphrase, de la similarité, aussi dans notre problème, le passage de :

$$x^2 + 900 = x^2 - 180x + 8500$$

à $\quad 900 = - 180x + 8500$

est-il de ce type.

On a donc, en tenant compte de ce que nous avons dit plus haut deux axes de travail sur les équations. Un axe lié à la contiguïté, à la synonymie, à la métonymie. Un axe lié à l'équivalence, à la similarité, à la paraphrase, à la métaphore. La résolution d'une équation se présente donc comme un trajet du type suivant :



Remarque : Le passage du problème concret à l'équation est fait sur l'axe de la similarité, dans l'ordre de la métaphore. Or les enfants ne se distribuent pas de la même façon par rapport à ces axes. Devant $2x + 5x - 2 = 3x + 18$, il y a deux types de réactions (persistantes !) :

1) $7x - 2 = 3x + 18$ (contiguïté, métonymie)

2) $2x + 5x - 3x = 2 + 18$ (similarité, métaphore)

Un peu comme devant le mot maison (Jakobson, [12]), on peut observer deux types de réactions

maison ⟶ fenêtre ⟶ porte ⟶ toit ⟶ jardin

ou :

maison ⟶ hutte ⟶ cabane ⟶ palais ⟶ villa…

Le rapport des adolescents à ces types de figures dans les équations mériterait une étude particulière.

TRANSGRESSION PAR PERMUTATION

Terminons par deux figures meurtrières : **l'antimétabole** et **l'attelage**. Dans le problème précédent on a la phrase :

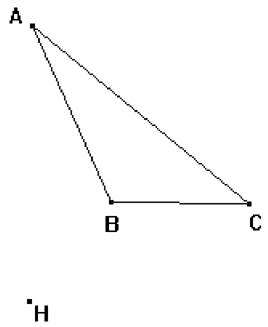
$$(90 - x)^2 = 8100 - 180x + x^2$$

car $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

Il y a *deux occurrences de* ***x*** *qui ont deux sens différents dans la même phrase* : dans la première partie c'est une inconnue tandis qu'ensuite c'est une indéterminée.

Dans le problème de l'encadré ci-contre, le mot *hauteur* a trois occurrences correspondant à 3 sens différents : 1) droite 2) segment 3) nombre. On a là une **antimétabole** (plusieurs occurrences du même mot avec des sens différents dans le même énoncé). De graves incompréhensions résultent d'une mauvaise gestion de cette nécessaire figure.

Exercice : *On donne ce triangle ABC et son orthocentre. Trouve un valeur approchée de son aire.*



Je sais que les trois hauteurs (1) du triangle se coupent en H. Je trace (AH) qui coupe (BC) en M. Je trace la hauteur [AM] (2). Puis, après mesures, je prends le demi produit de la base BC par la hauteur AM (3).

Autre exemple : [OA] et [OB] sont deux **rayons** d'un cercle de 3 cm de **rayon**.

Ou : la première **coordonnée** d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ s'obtient en enlevant la première **coordonnée** de A à celle de B.

Ou encore : pour retrouver l'abscisse du point de $(x'Ox)$ situé sur la droite d'**équation** $y = 2x - 6$, je résous **l'équation** $2x - 6 = 0$.

Voilà pour le langage naturel. Mais en langage symbolique, il y a aussi de nombreuses antimétaboles :

(3.2) **.U**	: deux sens de " **.** "
3.(**U.V**)	: deux sens de " **.** "
[(3.2) **.U**] **.V**	: trois sens de " **.** "

$[f + g]\ (x) = f(x) + g(x)$: deux sens de “ **+** ”
absc. $(\mathbf{U} + \mathbf{V}) = ab(\mathbf{U}) + ab(\mathbf{V})$
: deux sens de “ **+** ”
$f(\mathbf{U}) + f(\mathbf{V}) = f(\mathbf{U} + \mathbf{V})$: deux sens de “ **+** ”
Dans la convention d’Einstein : $({}^i x e_i).e_i = {}^i x$,
“ i ” n’a pas le même sens des deux côtés.
$(2a + 3)^2 = 4a^2 + 12a + 9$,
car $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$: on a deux sens du “ a ”.
Et en analyse réelle quand on étend une fonction f à l’ensemble des parties en écrivant f(A) pour f*(A) !

Un cas particulier plus sophistiqué est **l’attelage**. Cette fois-ci, une même occurrence d’un même mot (symbole) assume deux sens différents. On connaît : *“ En remuant la **cendre** de leur foyer et de leur cœur”*. On connaît moins : Le produit $a\,\vec{u}$ est *nul* si l’un des facteurs est *nul* : $\vec{u} = \vec{0}$ ou $a = 0$ (2 sens).

Ou : *“ le premier nombre premier est 2”.* On peut sourire, mais songeons à une classe “concrète” de 6ème.

“ L ‘aire d’un **carré** est égale au **carré** de son côté” ! !

Il existe un type d’antimétabole qui peut être redoutable pour la compréhension future de l’élève si elle est mal gérée : c’est **l’antanaclase.** *“ Le mot, ou le symbole, est répété dans deux sens différents et **incompatibles**” :* Le cœur a ses *raisons* que la *raison* ignore.

Si deux plans sont *parallèles*, toute droite *parallèle* à l’un est parallèle à l’autre.

Par contre, si d // P et si d’// P, alors on ne peut pas dire d // d’. Il ne s’agit pas de la même relation, mais les mots et les symboles restent les mêmes.

Nous pourrions continuer longtemps, en travaillant sur chaque niveau. Nous ne le ferons pas. La figure est encore plus délicate quand il y a aussi des ellipses :
Exemple : “ brûlée de plus de feux que je n’en allumai”.

Ou : $\alpha\beta\mathbf{UV}$ pour $(\alpha \times \beta).(\mathbf{U.V})$ donc trois produits différents.

Ou encore plus pervers :

$$[3f](2\mathbf{X}) ,$$

Ellipse d’une loi externe — pas de loi — ellipse d’une loi interne

On appellera ce type de figure composée d’une antimétabole et d’une ellipse un “zeugme” : le symbole est supprimé deux fois ou plus, mais dans des sens différents.

Nous allons seulement terminer sur un métalogisme par permutation qui joue un rôle important : **l’inversion.** Rappelons que les métalogismes portent transgression du rapport au réel, mais qu’il n’y a pas altération du code. Dans notre problème : $(90 - x^2)$; il s’agit de prendre *le carré d’une différence*. Exemple : $(8 - 3)^2$.

Dans la réalité, pour prendre le carré d’une différence, il faut d’abord faire la différence, puis prendre le carré. Code parlé : 1) carré, 2) différence. Réel : 1) différence, 2) carré. Il y a renversement dans le discours de l’ordre dans lequel se succèdent les idées dans la pensée.

On pourrait aussi parler du **paradoxe** lié au raisonnement par l’absurde que l’on peut rencontrer couramment. Ou encore, par exemple, en géométrie dans l’espace, des paradoxes qui naissent des visions différentes de l'orthogonalité selon que l'on est dans telle face d'un cube ou dans telle autre.

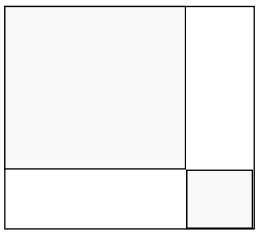
RÔLE DU POINT DE VUE RHÉTORIQUE DANS NOTRE ENSEIGNEMENT

Ainsi, l'étude systématique des figures de rhétorique pourrait permettre une classification des types de contre-règles. Il y aurait des contre-règles de type homogène et d'autres de type hétérogène. Les premiers porteraient sur un des codes LN, LS, ou CG. Chacun des deux premiers à l'un des quatre niveaux : forme des signifiants, organisation des signifiants, sens des signifiants, rapport au mouvement réel. Le troisième à deux niveaux : dessin pour lui-même ou dessin pour un type (iconique). Un deuxième type de contre-règles serait constitué des transgressions par couplage de deux niveaux : rupture dans l'un, redondance dans l'autre. Nous essayons de jeter les bases d'un travail transdisciplinaire sur ces questions. En tout cas, le point de vue rhétorique (au sens de **transgression volontaire des codes** exclusivement) peut jouer le rôle d'amplificateur, de caisse de résonance pour notre enseignement quotidien des mathématiques. Il faut bien sûr rester très prudent, en gardant à l'esprit la remarque de Flaubert :

> *" quand on a chaussé une idée, il est souvent pénible de s'en défaire. C'est pour cela qu'il faut s'habituer à marcher pieds nus".*

Une contre-règle est un stade transitoire pour un individu donné. Il est naturel qu'un enfant intelligent pense à écrire $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ sous la pression de $(a b)^2$, de $2 (a + b)$, d'autres expressions. Il trouve, découvre, redécouvre, apprend que **c'est faux**. $(a + b)^2$ est différent de $a^2 + b^2$ est une contre-règle qu'il formulera $(a + b)^2 = a^2 + 2 ab + b^2$.

Il va vivre quelque temps un stade où existera un conflit entre la tendance à appliquer ce qu'il croyait être la règle et le réflexe d'appliquer la contre-règle. La contre-règle est vécue pendant ce temps comme une figure de rhétorique du type : *" Allons boire un verre"*. On sent toujours l'écart (surtout après !!). Cette contre-règle ne deviendra pour l'élève une règle que lorsque cette figure sera éteinte, c'est-à-dire aura le statut de : *" le pied de la table"* qui est tellement usée qu'on ne sent plus l'écart. (On dit qu'il s'agit d'une *catachrèse*). Autres exemples : la feuille de papier, fraction entière, hauteur... Il y a des moyens artificiels de faire apparaître la rupture et la redondance : ici, le code graphique peut aider.



Une dernière remarque : par rapport à la règle $(a + b)^2$, le point de vue du prof est celui de la règle ; il n'y a pas d'écart, c'est la *déduction* qui spontanément fonctionne pour raisonner. Le point de vue de l'élève est différent : il y un écart à sentir et à réduire : c'est l'induction et l'abduction au sens de Peirce ou le raisonnement plausible de Polya qui spontanément fonctionnent. N'est-il pas négatif pour le développement de l'élève de chercher dès le début à aplanir les conflits et à présenter d'emblée la contre-règle comme une règle, c'est-à-dire comme cohérente, donc à le culpabiliser pour ce moment de doute, qui, lui, est cohérent du point de vue de la responsabilité et de la démarche d'appropriation ? *Exemples* : $-x^2$, règle de priorité, 3 pour + 3, log (ab) = log(a) + log(b).

Est-ce que, à l'échelle de l'humanité, les grandes contre-règles ne sont pas celles qui ont fait faire les plus grands progrès ?

Dans la phase d'apprentissage, une condition pour éviter les erreurs d'origine rhétorique, serait, dans les dizaines de lieux où on les rencontre :

A) le temps du degré zéro : prévoir un temps entre l'apprentissage du degré zéro et l'exposé de la transgression. Par exemple : bannir l'écriture 3 pour + 3 en 6ème, bannir l'écriture 10^{-3} en 4ème (année de la règle des signes et des grands théorèmes en acte sur le signe x).

B) le temps de la contre-règle : ensuite une pratique systématique de la transgression, vécue comme telle (conflit apparent).

C) le temps de la règle : ensuite seulement, le temps d'application de nouvelles règles, apparaîtra.

Dans le processus de «remédiation» des erreurs, celles qui sont d'origine rhétorique (l'appropriation malaisée d'une contre-règle), on peut imaginer quelques «impératifs» :

1) *Retrouver* le caractère «*naturel*» des choses avant l'apparition de la contre-règle («sentir l'écart»).

2) Faire *revivre explicitement* pendant un certain temps la contre-règle comme transgression de l'ordre antérieur (“évaluer l'écart”).

3) *Justifier* en acte la commodité ou la vérité de la transgression.

4) Apprendre à réduire l'écart explicitement et prendre un temps spécifique pour gérer cette réduction.

5) Apprendre à fabriquer soi-même cet écart.

6) (Ré)apprendre à réduire spontanément et implicitement l'écart (essentiel, si on veut éviter le **retour du refoulé**, si caractéristique de ce type d'erreurs).

CONCLUSION

Il est probable qu'il faudra chercher des outils théoriques du côté des travaux de cognitivistes sur le rôle de l'inhibition de routines comme moteur du développement (travaux de O.Houde, [35]) et des confirmations empiriques du côté des transgressions en général en mathématiques (article en préparation). Le rapport au savoir dépend en grande partie du rapport aux règles et donc aux contre-règles.

Celles-ci n'apparaissent bien sûr que dans une perspective de construction/confrontation des savoirs.

Par exemple, *“la pensée géométrique se développe et s'approfondit, en se projetant et s'enroulant à la fois dans un mouvement complexe de va et vient, entre l'exigence de rectitude et de rigueur, incontournable, et l'attrait irrésistible pour les “courbes” multiples qui caractérisent le déviant, le non conforme, non calibré, non mesuré, non encore …ouï ni conçu” (E. Barbin)*

On voit alors comment la gestion de ces conflits dépend du milieu de l'élève, de ses rapports aux transgressions, aux règles sociales et aux interdits, de la place de ***sa langue maternelle*** dans l'expression de ces conflits. (et chez nous le créole est cette langue). Les fondements du travail rhétorique de chaque individu sont probablement installés très tôt de façon privilégiée, dans l'enfance, et à partir de la langue maternelle.

Un groupe de travail de la section guadeloupéenne de l'Irem. travaille en ce moment sur les questions de ce type. Il y a là tout un travail à faire pour élucider tous ces rapports. Le travail dont témoignent ces remarques n'aurait pu commencer et continuer sans la participation de Annie Dick et Nicole Fréjaville, professeurs de lettres, et sans la complicité de Jean Bichara, responsable de la section guadeloupéenne de l'I.R.E.M.A.G.

Enfin, il me semble de notre responsabilité de développer consciemment chez nos élèves l'attitude d'emblée subversive qui caractérise le travail scientifique, même si apparemment, ses phases de repos donnent au non averti, l'impression qu'on applique des règles.

"En refusant le formalisme pur, en exigeant l'intelligible, le futur esprit scientifique va courir, de gaîté de cœur, le risque de l'erreur" (R. Thom).

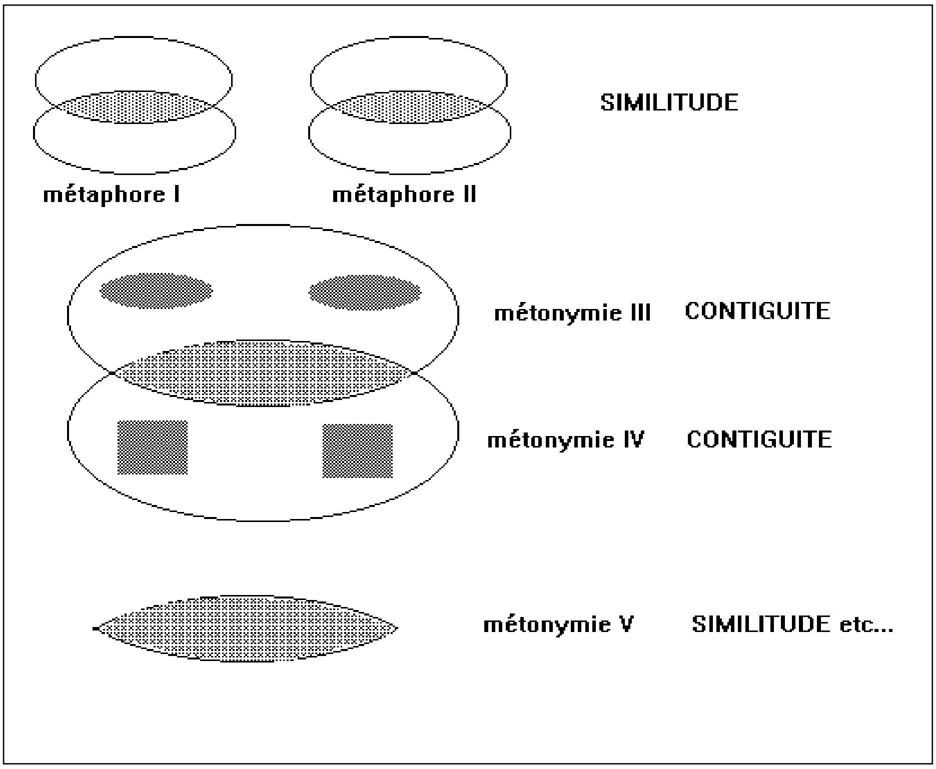
Le point de vue rhétorique en mathématiques me semble favoriser le programme de Leibniz pour qui l'activité mathématique était l'exercice d'une "*logique* de l'imagination". Mon propos court sans doute le risque d'être peu clair, mais comme l'indiquait Cioran,

"Rien ne dessèche tant un esprit que sa répugnance à concevoir des idées obscures".

Annexe 1 : Équations.

Le travail sur les équations par exemple, qui articule des associations de type similarité (ordre de la métaphore) et de contiguïté (ordre de la métonymie), illustre un processus d'association d'idées, et donc de raisonnement, que les psychanalystes désignent sous le nom d'oscillation métaphoro-métonymique.

Son analyse en mathématique serait probablement assez féconde. Si on prend le vers d'Eluard de "Toi seule", *"J'entends les herbes de ton rire"*, la réduction de la figure fera apparaître une chaîne de métaphores et de métonymies du type :



Annexe 2 :
Factorisation et développement.

Les rapports entre similarité et contiguïté peuvent éclairer différemment le problème de factorisation et développement. Il n'y a aucune symétrie dynamique entre a (b + c) = ab + ac et ab + ac = a (b + c) :

$2x^2 + 6x$	
$2xx + 2.3x$	Je *sélectionne* des formes
$2xx + 2x.3$	Je combine additivement
$2x(x + 3)$	Je combine multiplicativement,

au contraire

$2x(x + 3)$	Je *combine* multiplicativement, puis additivement
$2x.x + 2x.3$	
$2x^2 + 6x$	Je *sélectionne*

Dans les premières : *sélection* puis *combinaison*.

Dans les deuxièmes : *combinaison* puis *sélection*.

Le point décisif est le premier : ce n'est pas le même dans les deux cas. Le type de pensée n'est pas le même : les types de réussite ne sont pas les mêmes suivant les élèves : la sélection est plutôt de l'ordre de la similarité, du côté de la métaphore, la combinaison et de l'ordre de la contiguïté, du côté de la métonymie.

Il y aurait aussi un point de vue :

tout $\longrightarrow$ partie

partie $\longrightarrow$ tout,

que nous ne préciserons pas ici.

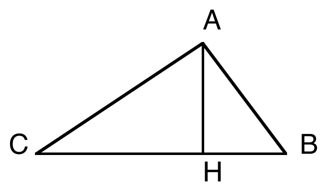
Annexe 3 :
Histoire des mathématiques et épistémologie.

On peut penser que les travaux en Histoire des Mathématiques et en Épistémologie peuvent être regardés de ce point de vue.

Ainsi $\sqrt{2}$ et la diagonale du carré :
CG $\longrightarrow$
LS $\longrightarrow$
rupture

De même pour le concept de tangente (E.Barbin), l'introduction des nombres négatifs, des nombres complexes, etc., le problème des sommes infinies...

On peut utiliser l'approche rhétorique en heuristique, y compris en classe (implicitement bien sûr). Je pense en particulier au texte du père Lamy qu'Évelyne Barbin analyse dans les actes d'un colloque d'histoire des mathématiques.



Par exemple, quand il cherche à comparer (
triangle ABC de hauteur AH les rapports

$$\frac{AB + AC}{BC} \quad \text{et} \quad \frac{HC - HB}{AC - AB}$$

1) Il se laisse *surprendre* : sentir l'écart.
2) Il évalue *l'écart* en notant que les sommes et les différences ne portent *pas sur des segments alignés.*
3) Il *réduit l'écart* en traçant le cercle de centre A et de rayon AB "pour *faciliter*" l'invention, dit-il, cité par E. Barbin.

Notons, pour l'histoire, que le P. Lamy est un des plus grands rhétoriciens français. Il est le père d'un courant moderne de la rhétorique basée sur la théorie des "passions".

Annexe 4 : Théorème en acte.

Un outil puissant pour la gestion du travail quotidien avec les élèves est la notion de **théorème en acte** de G. Vergnaud. Limitons-nous au sens de règles en actes, c'est-à-dire de règles explicites ou non, en tout cas explicitables par l'élève. Ce sont des règles qu'il s'est plus ou moins construit lui-même par réflexion sur ses expériences ou par extension de règles apprises, extension liée à des procédés de morphismes ou d'homologie, ou d'amalgame. On voit qu'une **règle à apprendre** à un instant donné, pour un élève donné, se présente comme une contre-règle si elle entre en conflit avec une "règle en acte" de cet élève, au sens qu'elle amène à mettre à un endroit donné du discours autre chose que ce qui y est attendu en vertu de la règle en acte. Il y aurait donc deux versants pour une contre règle :

Un versant objectif : violation d'une règle antérieurement apprise
Un versant subjectif : violation d'une règle en acte (auto-construite).

On pense un peu à la remarque de Bachelard : *"Les intuitions sont très utiles. Elles servent à être détruites"*. On peut se demander s'il est bien utile, pour un élève donné, d'expliciter une règle qui est déjà un théorème en acte, tant qu'on n'a pas limité son champ d'application par une contre-règle.

Annexe 5 : Changement de cadre.

Une autre approche importante dans nos classes est l'utilisation du changement de cadre théorisée par Régine Douady. Un problème étant donné dans le cadre algébrique, et la solution restant hors d'atteinte, il est souvent décisif de le transposer dans un autre cadre (le géométrique, l'algébrique...) pour tenter de le résoudre. Si on s'interroge sur les raisons de l'efficacité d'une telle stratégie, on peut se demander si ce n'est pas, entre autres, le couplage des deux cadres, et le traitement rhétorique de la correspondance (ruptures dans l'un, continuité dans l'autre, l'attendu de l'un permettant de gérer l'inattendu chez l'autre) qui lui donnent toute sa puissance.

Il serait alors intéressant de faire un début d'inventaire des couplages qui conservent le sens ou le modifient de façon secondaire. L'étude de la rhétorique du signe visuel dans sa dimension icono-plastique (le signe pour autre chose en opposition au signe pour lui-même) pourrait peut être nous aider. Peut être faudrait-il dans un premier temps se limiter aux registres de signifiants, au sens de Duval.

Annexe 6 : Contrat didactique.

Évidemment on ne peut pas oublier les composantes cognitives des contrats “didactiques” de Guy Brousseau. La contre-règle se présente souvent comme un non-respect du contrat. On s’aperçoit ensuite qu’il n’était installé que pour un domaine ou un temps limité. Étant donné que les contre-règles marquent les progrès, on pourrait dire que le contrat n’est installé que pour donner l’occasion de le transgresser, pour progresser. (Regardez la règle de vérification des systèmes d’équation en 3ème).

BIBLIOGRAPHIE

[1] RHÉTORIQUE GÉNÉRALE par le groupe Mû (Points Seuil)
[2] THÉORIE DU SIGNE VISUEL par le groupe Mû (Seuil : La couleur des idées)
[3] LES FIGURES DU DISCOURS par Fontanier (Flammarion : Champs)
[4] STRUCTURE DU LANGAGE POÉTIQUE par Jean Cohen (Flammarion)
[5] LE SIGNE par Umberto Eco (Éditions Labor)
[6] LA STRUCTURE ABSENTE par Umberto Eco
[7] APOLOGIE DU LOGOS par René Thom
[8] MORPHOGENÈSE ET IMAGINAIRE par R. Thom (Les cahiers de l'imaginaire : Circé n°8)
[9] REMARQUES SUR LES FONDEMENTS DES MATHÉMATIQUES par L. Wittgenstein (P.U.F.)
[10] ASPECTS GESTALTISTES DE LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES par Georges Glaeser (Colloque géométrie de Mons, 1982)
[11] INTRODUCTION A UNE ÉTUDE PRÉALABLE DES OBSTACLES par Georges Glaeser, dans l'Ouvert
[12] LANGAGE ENFANTIN ET APHASIE par Roman Jakobson (Flammarion)
[13] LA RELATION D'INCONNU par Guy Rosolato (Connaissance de l'inconscient, NRF)
[14] ÉLÉMENTS DE L'INTERPRÉTATION par Guy.Rosolato (idem)
[15] POUR UNE REDÉFINITION DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHS (les modes d'appropriation) par Henri Bareil (dans la brochure n° 21 de l'APMEP)
[16] SÉMANTIQUE DE LA POÉSIE par Todorov, Cohen et alii.
[17] TROPES ET FIGURES DU DISCOURS MATHÉMATIQUE par André Cauty (RDM, aux éditions "la pensée sauvage") ainsi que l'article paru dans le bulletin de l'APM "la didactique peut-elle casser des briques ?"
[18] L'ANAMORPHOSE par Jacques Lacan (in Le Séminaire, livre 11, collection "Points Seuil")
[19] DE LA PAROLE COMME D'UNE MOLÉCULE par Boris Cyrulnik, (Essais, Seuil)
[20] ÉCRITS SUR LE SIGNE, par Charses Sanders Pierce (Fragments, aux éditions Klindsieck)
[21] LE LANGAGE DU CHANGEMENT par Paul Watlawick (Point Seuil)
[22] VERS UNE ÉCOLOGIE DE L'ESPRIT par Gregory Bateson
[23] LES FIGURES DE STYLE par Patrick Bacry (Belin)

[24] LE COURBE ET LE DROIT par Évelyne Barbin dans “Histoires de problèmes, histoire des mathématiques” (Ellipses)
[25] DICTIONNAIRE DE RHÉTORIQUE par Georges Molinié (Poche)
[26] RECHERCHES SUR L’ORIGINE DU LANGAGE par Trân Duc Thao (Éditions Sociales)
[27] L’ÉROTISME par Georges Bataille (Œuvres, Gallimard)
[28] ÉCLAIRCISSEMENTS par Michel Serres (Flammarion)
[29] LA MATHÉMATIQUE, COMME UNE JEUNE FILLE QUI N’OSE SE MONTRER NUE par Jacques Bonnet, de Montpellier, édition de l’auteur.
[30] JE CHERCHE, DONC J’APPRENDS, par Henri Bassis et le GFEN (Messidor) ainsi que les numéros de la revue “Dialogues”
[31] LE SIGNIFIANT IMAGINAIRE, essai sur la signification au cinéma, par Christian Metz (10-18)
[32] ÉCRITS HÉRÉTIQUES par Pier Paolo Pasolini
[33] ÉROS DANS UN TRAIN CHINOIS par René Depestre (Folio)
[34] GRADUS DES PROCÉDÉS LITTÉRAIRES par Duriez
[35] RATIONALITÉ, INHIBITION, DÉVELOPPEMENT par Olivier Houde (P.U.F.)