
ELOGE DU PAPIER QUADRILLE

Henri LOMBARDI
Irem de Besançon

Résumé : *Nous plaidons ici en faveur d'un usage plus systématique du papier quadrillé comme source d'évidence en géométrie euclidienne. Celui-ci constitue une sorte de pré calcul sur les coordonnées tout en donnant à voir ce qui se passe, au sens fort du mot voir. L'usage systématique du papier quadrillé pourrait constituer ainsi une réalisation visuelle directe du programme de Descartes, lequel voulait dissiper tous les mystères. Sans doute joue en sa défaveur la trop grande simplicité de cette mise en évidence : pourquoi faire simple quand on peut faire compliqué, comme diraient Euclide, Bourbaki et tous les pédants.*

INTRODUCTION

La géométrie de l'espace peut être conçue comme l'étude des dispositions spatiales des objets solides. La géométrie plane est alors une géométrie des puzzles. La pièce de puzzle la plus élémentaire est un triangle. Les deux premiers cas d'égalité des triangles peuvent dans ce cadre être compris comme des axiomes raisonnables que doit vérifier toute géométrie des puzzles. Et ils peuvent servir à fonder aussi bien la géométrie plane euclidienne que ses concurrentes, hyperbolique et sphérique (ou elliptique).

Pour faire le partage entre ces trois géométries, une figure fondamentale est donnée par le carré. Si les carrés ont des angles droits, on peut assembler quatre petits carrés identiques pour en faire un plus grand, deux fois

par le côté, et quatre fois par la surface, ce qui n'échappa pas à Socrate ni à l'esclave admis dans la discussion, qui était donc bel et bien un être humain doué de raison. Ainsi était mise en évidence de manière prémonitoire la fabuleuse carrière à venir du papier quadrillé, assemblage indéfini de carrés tous identiques, un puzzle absolument dingue sur lequel se lit sans effort toute la géométrie euclidienne, avant de devenir le lieu où des générations d'élèves couchent leurs devoirs, leurs angoisses et parfois leurs enthousiasmes. Voir le papier quadrillé en filigrane de la feuille blanche, telle fut la conquête de Descartes, qui réduisit la géométrie à des arguments de comptage, redonnant toute sa dignité à l'esclave convoqué par Socrate.

1 LE QUADRILLAGE DU PLAN EUCLIDIEN

1.1 Libre mobilité des figures

Un déplacement d'une figure dans un plan est caractérisé par l'image d'une demi-droite liée à la figure, laquelle image peut être n'importe quelle demi-droite. Ce fait est un axiome naturel des géométries planes régulières, et correspond à l'idée que l'espace est «le même» en tout point et dans toutes les directions.

Dans ce cadre une translation de A à B peut être décrite comme le déplacement qui envoie la demi-droite d'origine A portée par (AB) et passant par B sur la demi-droite d'origine B portée par (AB) de même orientation : on fait glisser la figure de A à B le long de la droite (AB) .

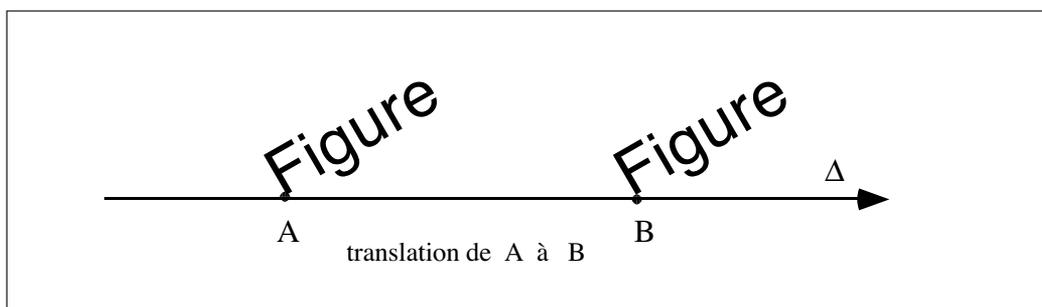
Plus généralement on peut s'intéresser aux déplacements d'une figure dans l'espace. Après avoir fait sortir une figure plane de son plan on peut l'y ramener «à l'envers» et on obtient alors son image par une isométrie indirecte du plan. On peut alors caractériser une isométrie, directe ou indirecte, par l'image

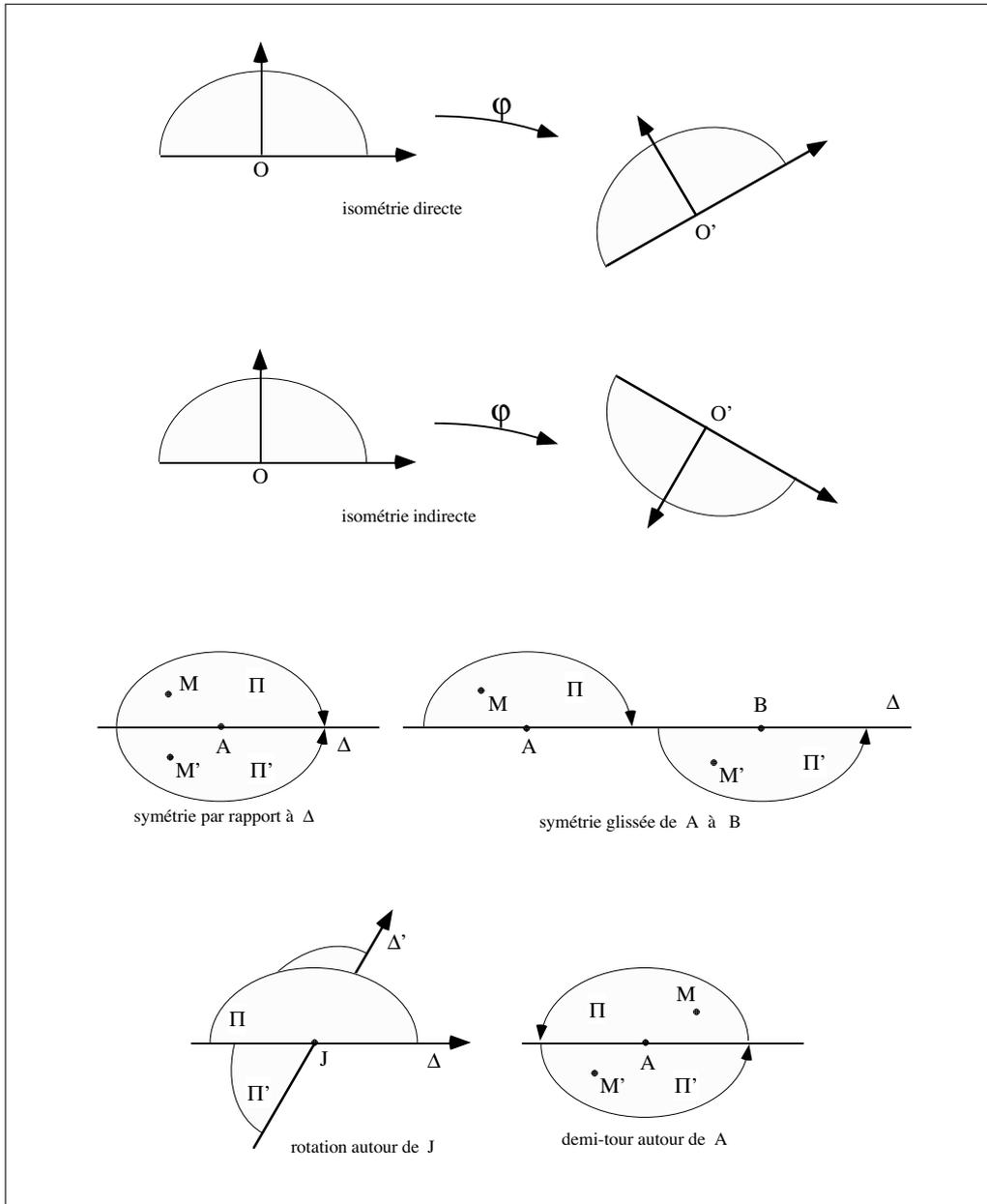
qu'elle donne d'une demi-droite et de l'un des deux demi-plans correspondants. Cela correspond aux dessins suivants

Pour caractériser un demi-tour de centre A , on dira qu'il envoie une demi-droite d'origine A sur la demi-droite opposée. En prenant le carré de cette transformation, on obtient un déplacement qui envoie la demi-droite de départ sur elle-même, ce qui donne bien l'identité. Il y a peut-être cependant un léger mystère : pourquoi le demi-tour construit à partir d'une demi-droite d'extrémité A ne dépend-il que de A et pas de la demi-droite choisie ? Cela a quelque chose à voir avec la structure du groupe des rotations de centre A (il n'y a qu'un demi-tour autour de A). C'est peut-être le sentiment de ce léger mystère (formulé pour les quarts de tours) qui conduisait Euclide à mettre en axiome que tous les angles droits sont égaux.

1.2 Du carré au quadrillage

Lorsqu'on part d'une appréhension intuitive et locale de la géométrie et qu'on cherche la meilleure définition possible du carré, on est sans doute contraint de le définir comme le quadrilatère le plus régulier possible, quatre





cotés égaux et quatre angles égaux. La meilleure manière de générer une telle figure n'est pas de partir d'un coté (car quel angle prendre ?), mais de la considérer comme fabriquée à partir d'un centre de rotation O et d'un sommet A , auquel on fait subir trois fois une rotation d'un quart de tour autour de O pour donner les sommets consécutifs A, B, C et D .

Le carré ainsi construit est invariant par quart de tour, et donc a ses cotés égaux et ses angles égaux. Si par bonheur le carré qu'on obtient a des angles droits, et si on a bien le droit de déplacer librement les figures solides (les pièces de puzzle) alors on peut assembler des carrés en un quadrillage. En supposant par commodité que le prolongement indéfini du quadrillage ne conduit jamais à revenir sur ses pas, on a les bases visuelles de la géométrie euclidienne.

Certains déplacements du plan euclidien laissent globalement invariants le quadrillage ci-dessus, et leur action sur le quadrillage admet une description très simple. Ce sont d'une part les deux translations horizontales ou verticales d'un carreau, d'autre part une rotation d'un quart de tour autour d'un sommet du quadrillage. On peut ensuite rajouter toutes les transformations obtenues en composant les précédentes. La structure du groupe obtenu est déjà très révélatrice de la géométrie euclidienne, mais ce n'est pas notre propos pour le moment.

Le plus important pour nous est qu'on peut toucher du doigt un grand nombre de déplacements de figures liées au quadrillage, et que cela nous donne directement accès aux théorèmes de base de la géométrie des puzzles euclidiens, encore appelée géométrie euclidienne des figures ou géométrie euclidienne tout court.

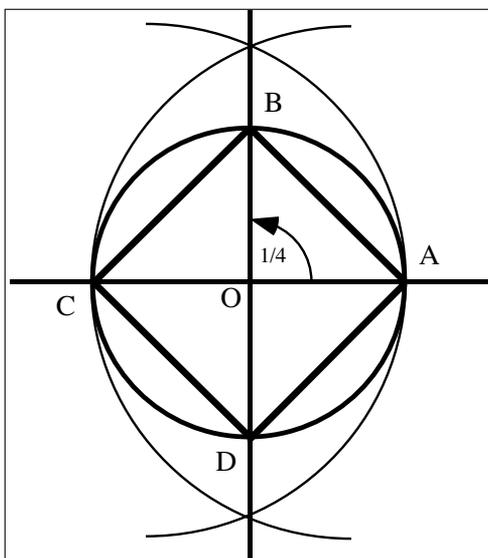


Figure 1. Le carré comme quadrilatère régulier

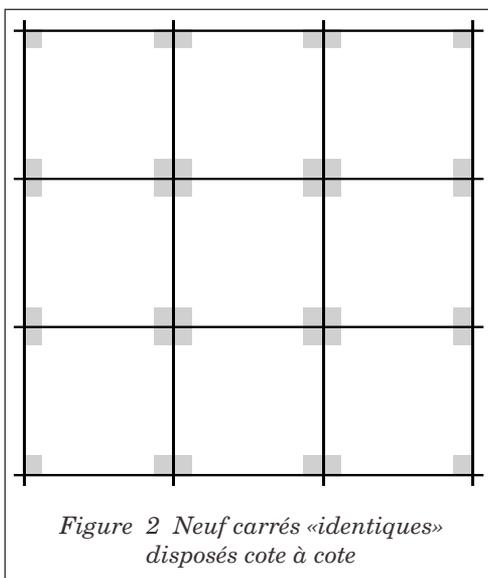
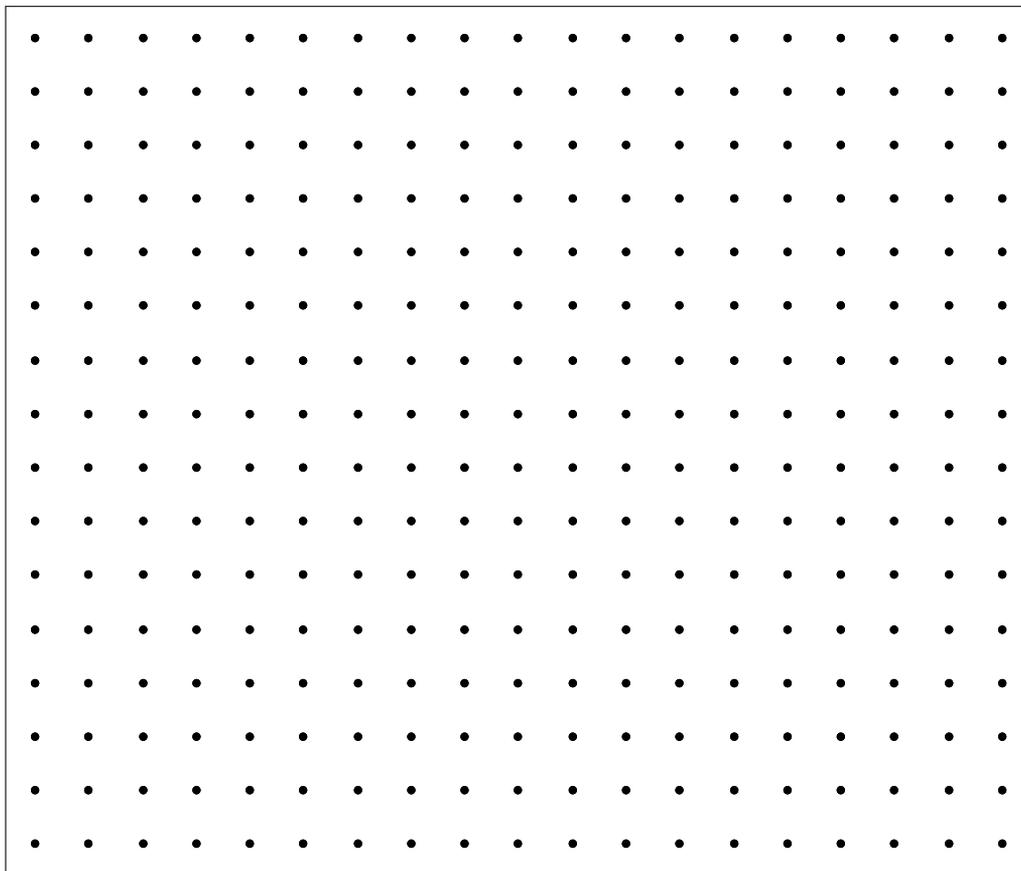


Figure 2 Neuf carrés «identiques» disposés cote à cote

Figure 3 *Quadrillage plus complet : nous ne traçons pas les horizontales et les verticales, mais pensez qu'elles sont bien présentes.*



Nous commencerons par le plus simple à démontrer, le théorème de Pythagore.

1.3 Théorème de Pythagore

Preuve par puzzle soustractif (cf. figure 4 au verso)

Lorsqu'un triangle rectangle a ses cotés de longueurs a et b le long du quadrillage

et ses sommets sur le quadrillage, on peut facilement obtenir l'aire du carré construit sur l'hypoténuse (morceau 1 dans la partie gauche de la figure 4).

Si on veut se convaincre que le cas particulier examiné est général, on peut produire une autre manière de remplir le grand carré de coté $a+b$, ce qui donne une preuve générale «soustractive» du théorème de Pythagore : les deux aires égales sont obtenues en

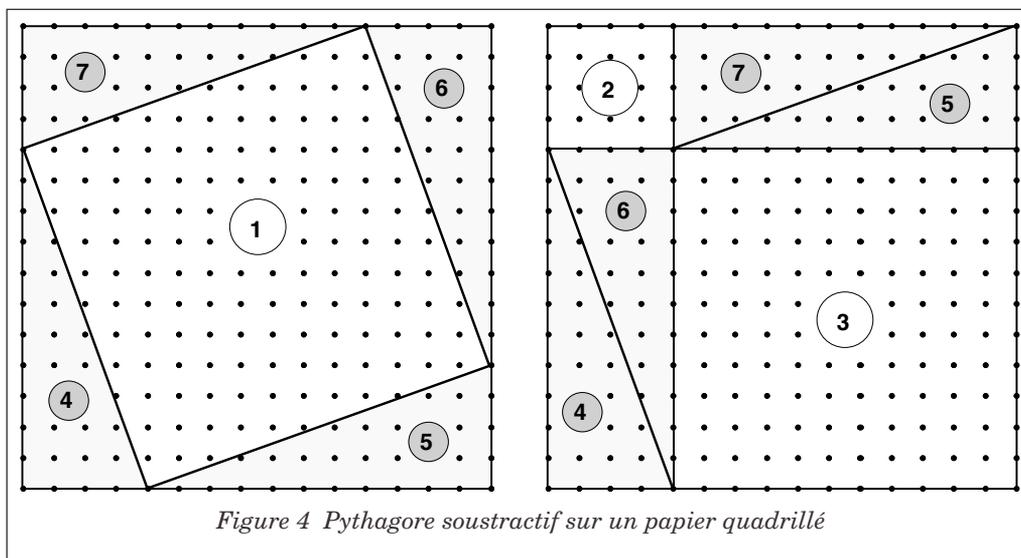


Figure 4 Pythagore soustractif sur un papier quadrillé

soustrayant à l'aire du grand carré quatre fois l'aire du triangle.

Quand on essaye de comprendre pourquoi Euclide a caché cette preuve élémentaire au profit d'une construction obscure, on se perd en conjectures. L'explication la plus plausible est que, voulant faire montre de grande sagacité, il avait imaginé dès le départ ce qu'il pensait être une méthode universelle (la méthode dite des aires), comme cadre de travail incontournable. Le but du traité n'est pas la géométrie, mais la méthode des aires. Dès lors l'important n'était plus de donner une preuve simple du théorème de Pythagore, mais de trouver la manière la plus «élégante» de démontrer ce théorème en utilisant la méthode des aires.

De la même manière, dans Bourbaki, Groupes et Algèbres de Lie, on peut voir une somme finie déguisée sous forme d'une inté-

grale sur un espace fini, de manière à pouvoir faire valoir un théorème d'intégration sur les groupes compacts, ce qui est plus savant que de faire une addition sur un groupe fini. De la même manière que les auteurs de Bourbaki font semblant d'oublier que l'intégrale n'est jamais qu'une addition sophistiquée, de même Euclide fait semblant de ne pas comprendre que sa mirifique méthode des aires est avant tout un jeu de puzzle, présenté de manière un peu sophistiquée.

Preuve par puzzle additif

Il est remarquable que la figure précédente si simple qui prouve Pythagore «par soustraction» ne semble pas avoir eu cours au début de l'histoire de ce théorème. Il y a eu de nombreuses preuves de type puzzle, notamment en Chine et au Japon, mais c'étaient des puzzles additifs. Les deux aires égales doivent être alors obtenues comme deux assemblages,

de deux façons différentes, des mêmes pièces.

Voici l'un de ces puzzles (figure 5), qui fournit une vérification tout aussi convaincante de Pythagore, certainement plus convaincante en fait, mais cependant un peu plus compliquée. Les surfaces des deux petits carrés sont couvertes par $A + e +$ (en grisé) $a + b + c + d$ tandis que la surface du carré sur l'hypoténuse est couverte par $A + e +$ (en blanc) $a + b + c + d$. Les morceaux a, d sont simplement translattés, tandis que les morceaux b, c doivent en outre être tournés d'un quart de tour.

Voici un autre de ces puzzles (figure 6), qui a à la fois le mérite de la simplicité et celui de l'additivité. Le petit carré est placé dans le coin nord est. Les surfaces de ces deux carrés sont couvertes par $A + c +$ (en grisé) $X + Y$ tandis que la surface du carré sur l'hypoténuse est couverte par $A + c +$ (en blanc) $X + Y$. Les morceaux X, Y sont simplement translattés.

1.4 Alignement et parallélisme dans un quadrillage

Si nous considérons des points régulièrement espacés sur le quadrillage, que nous voyons alignés, pour quelle bonne raison sont-ils effectivement alignés ? (par exemple

Figure 5 Pythagore additif sur un papier quadrillé

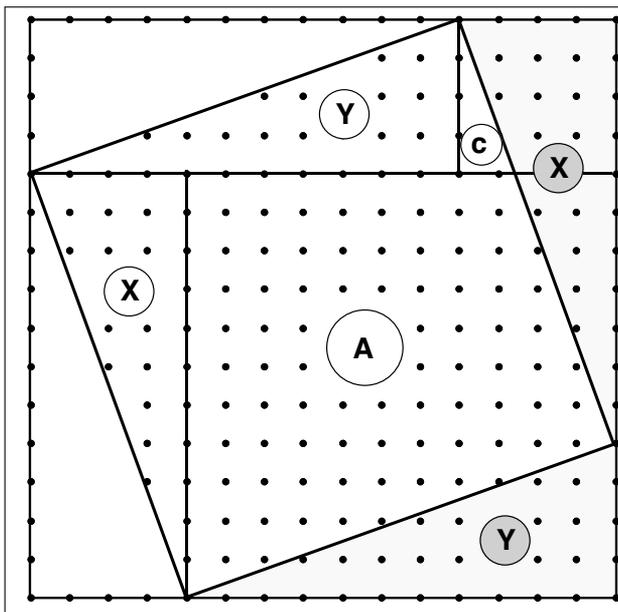
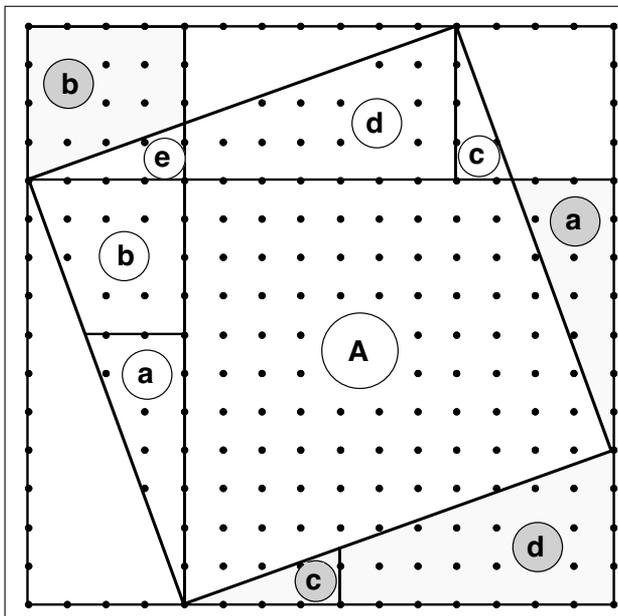


Figure 6 Pythagore additif sur un papier quadrillé (bis)

les points A, B, C, D, E de la figure 7). La raison la plus naturelle serait de voir que la translation de A à B le long de la droite (AB) envoie B sur C . Mais il faudrait savoir comment cette translation opère sur le quadrillage et pour cela commencer par montrer qu'elle opère bien sur le quadrillage.

Il est plus simple d'utiliser les demi-tours. On remarque en effet que le demi-tour autour d'un sommet du quadrillage a une action facile à décrire sur tous les sommets du quadrillage. Par exemple en considérant l'image du rectangle $BMAN$ on voit que le point C est l'image de A par le demi-tour de centre B , donc le point C est bien sur la droite (AB) . En répétant l'argument, les points A, B, C, D, E sont bien alignés.

Sur un papier quadrillé, certaines translations opèrent de manière évidente, ce sont les translations horizontales ou verticales qui envoient un sommet du quadrillage sur un autre sommet. On voit par exemple que la translation de A à N le long de la droite (AN) envoie L en C , et qu'elle peut aussi bien être définie comme la translation de L à C le long de la droite (LC) . Ce résultat est faux en géométrie hyperbolique ou en géométrie sphérique. Il est typique de la géométrie euclidienne, et il est clair sur le quadrillage.

Nous allons maintenant nous assurer que les translations «en biais» opèrent bien comme nous le sentons. Lorsque trois points A, M, B sont dans une position analogue à celle de la figure 7 (M sur la verticale de A et

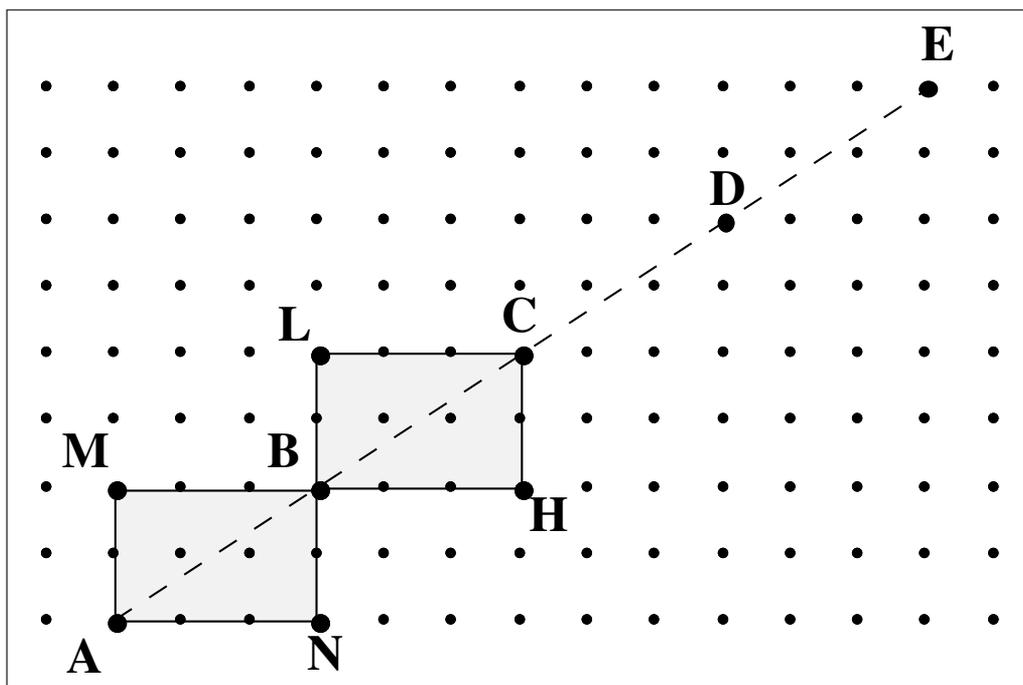


Figure 7 Alignement de points dans un papier quadrillé

sur l'horizontale de B), rien ne dit a priori que la translation de A à M (le long de (AM)) suivie de la translation de M à B soit égale à la translation de A à B. La composée j des deux translations est certainement un déplacement, mais il faut se convaincre que c'est bien la translation t de A à B. Pour cela on remarque que j conserve la droite (AB) et son orientation puisque $j(A) = B$ et $j(B) = C$. Donc les déplacements j et t opèrent de la même manière sur la demi-droite issue de A passant par B. Ils sont bien égaux.

Les translations d'un sommet du quadrillage à un autre opèrent donc bien sur le quadrillage comme nous le ressentons. On obtient alors les conséquences suivantes comme fruits d'une évidence visuelle (voir la

figure 8), et qui ne sont cependant vraies ni en géométrie hyperbolique ni en géométrie sphérique :

primo : si U, V et U' sont trois sommets du quadrillage, et si la translation de U à V le long de (UV) envoie U' en V', alors la translation de U à V le long de (UV) coïncide avec la translation de U' à V' le long de (U'V')

secundo: si U, V et W sont trois sommets du quadrillage, la translation de U à V (le long de la droite (UV)) suivie de la translation de V à W est égale à la translation de U à W, en outre le résultat est le même si les deux translations sont effectuées dans l'ordre inverse.

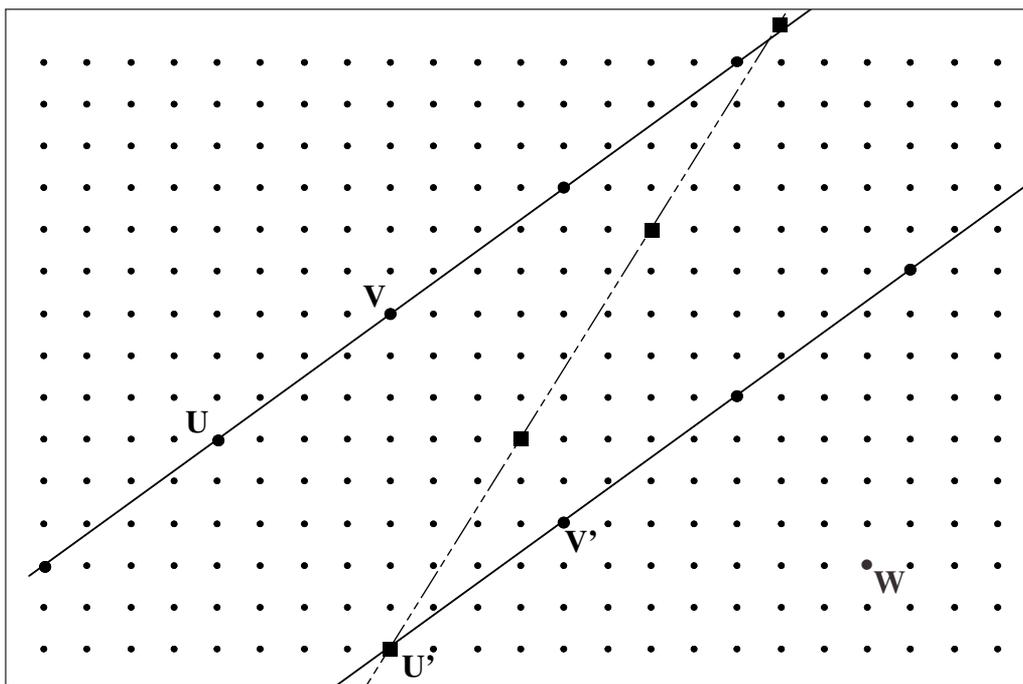


Figure 8 Droites parallèles : existence et unicité

En fait on a aussi comme résultat le postulat des parallèles au moins pour ce qui concerne les droites joignant deux points du quadrillage : la droite ($U'V'$) est parallèle à la droite (UV) (elles ne se coupent jamais) et toute autre droite passant par U' et par un autre sommet du quadrillage se rapproche de la droite (UV) (lorsqu'on se déplace dans le sens convenable) jusqu'à passer de l'autre côté, ce qui implique une intersection, même si elle n'est pas forcément en un sommet du quadrillage. L'intersection peut d'ailleurs être localisée assez précisément, ou calculée à la manière de Descartes.

De la construction des parallèles, on déduit la construction des parallélogrammes et nous obtenons donc des «pavages par des parallélogrammes» du plan à partir de points répartis régulièrement sur le quadrillage. On peut aussi obtenir, en rajoutant les diagonales dans une direction, un «treillage» : pavage du plan par des triangles obtenus par demi-tour ou translations à partir de l'un d'entre eux.

1.5 L'évidence visuelle du théorème de Thalès, réduit au comptage

Une fois que nous avons vu comment construire des parallèles dans le quadrillage, le théorème de Thalès devient assez évident, au moins pour ce qui concerne les droites joignant deux points du quadrillage. Par exemple dans la figure 10 les parallèles régulièrement espacées notées 1, 2, ..., 8 découpent sur la droite (AB) des segments égaux (déduts les uns des autres successivement par la translation de A à B , et le même phénomène se produit sur la droite ($A'B'$).

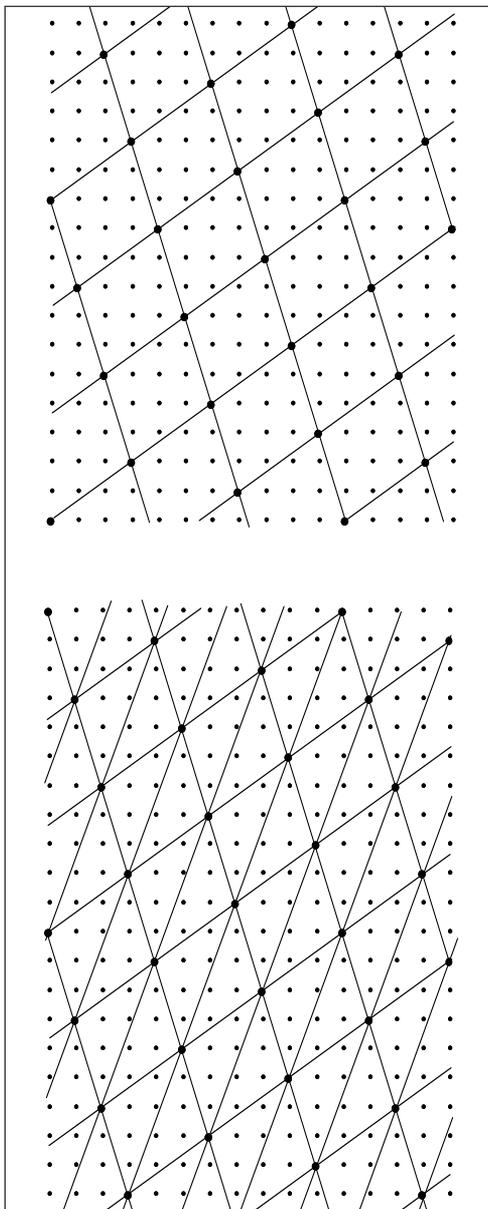


Figure 9 Du pavage par des carrés au pavage par des parallélogrammes ou par des triangles

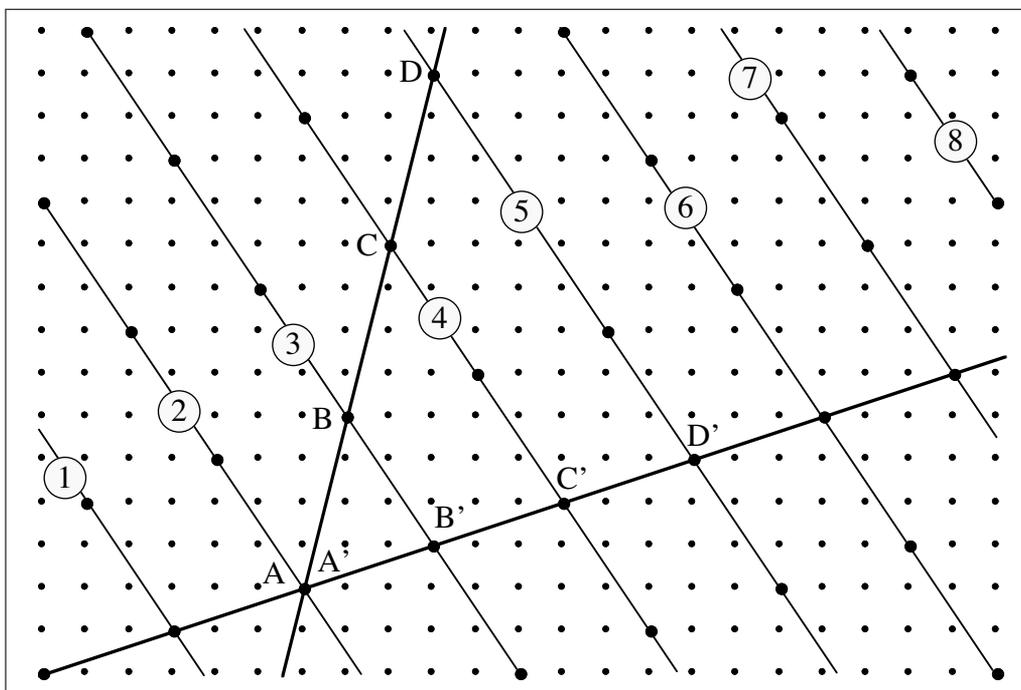


Figure 10 Thalés sans mystère

1.6 Intersection des médianes sur papier quadrillé et sur papier treillé

Si on prend un triangle dont les sommets sont sur le quadrillage espacés par des multiples de 6 carreaux (cf. figure 11 page suivante) les théorèmes de la droite des milieux et de l'intersection des médianes au tiers de leur longueur résultent d'un simple comptage des carreaux.

Sur papier treillé on obtient mieux l'essence du théorème : un triangle peut être vu comme la juxtaposition de 36 petits triangles égaux, obtenus à partir de l'un d'entre eux par demi-tours et translations.

1.7 Quart de tour, droites orthogonales

Avec les pavages par des parallélogrammes, on a en fait l'évidence visuelle de toute la géométrie affine, et l'évidence algébrique si on applique la méthode des coordonnées puisque l'équation d'une droite est clairement de la forme $ax + by + c = 0$ (si on se limite aux droites passant par deux sommets du parallélogramme, il faudra prendre les paramètres a , b et c entiers).

Avec un quadrillage on a un peu mieux puisqu'on voit les quarts de tour, soit autour d'un sommet du quadrillage, soit autour du

Figure 11 Droite des milieux, intersection des médianes en leur tiers, comptez donc les carreaux !

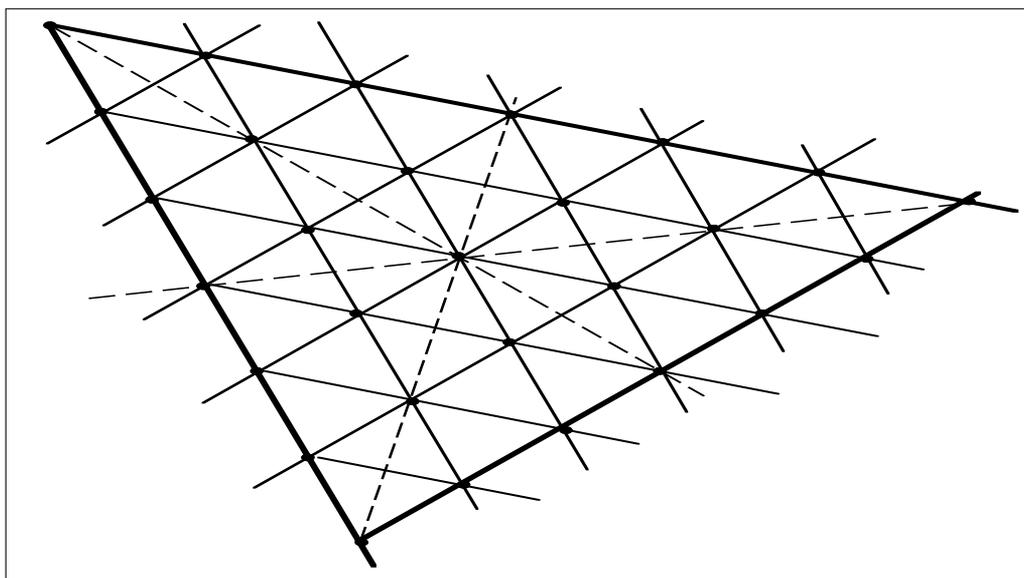
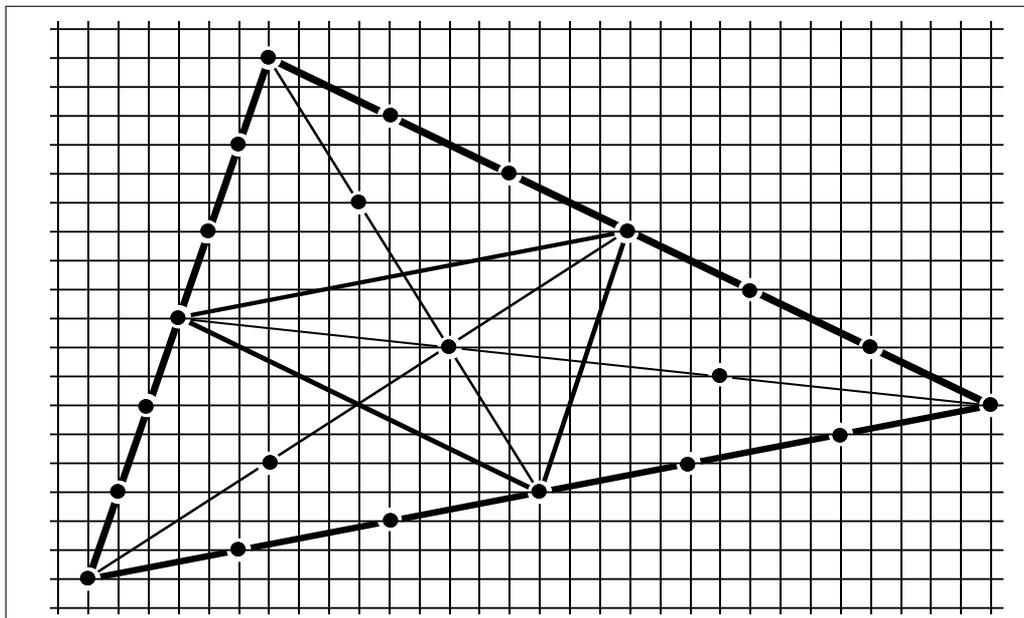


Figure 12 Droite des milieux, intersection des médianes en leur tiers, comptez donc les triangles!

centre d'un carré. On peut donc obtenir directement le tracé de la perpendiculaire à une droite donnée passant par un point donné comme dans la figure 13.

La droite D monte de 2 carreaux chaque fois qu'on se déplace de 5 carreaux vers la droite. La direction perpendiculaire est donc obtenue en descendant de 5 carreaux chaque fois qu'on se déplace de 2 carreaux vers la droite.

On pourra donc «voir» sur un quadrillage suffisamment fin que les hauteurs sont

concurrentes ou voir la droite d'Euler d'un triangle, et réduire le théorème correspondant à un comptage de carreaux, ou à un calcul algébrique élémentaire.

1.8 Quadrillages dans le quadrillage

Nous laissons maintenant le lecteur commenter lui même les figures suivantes...

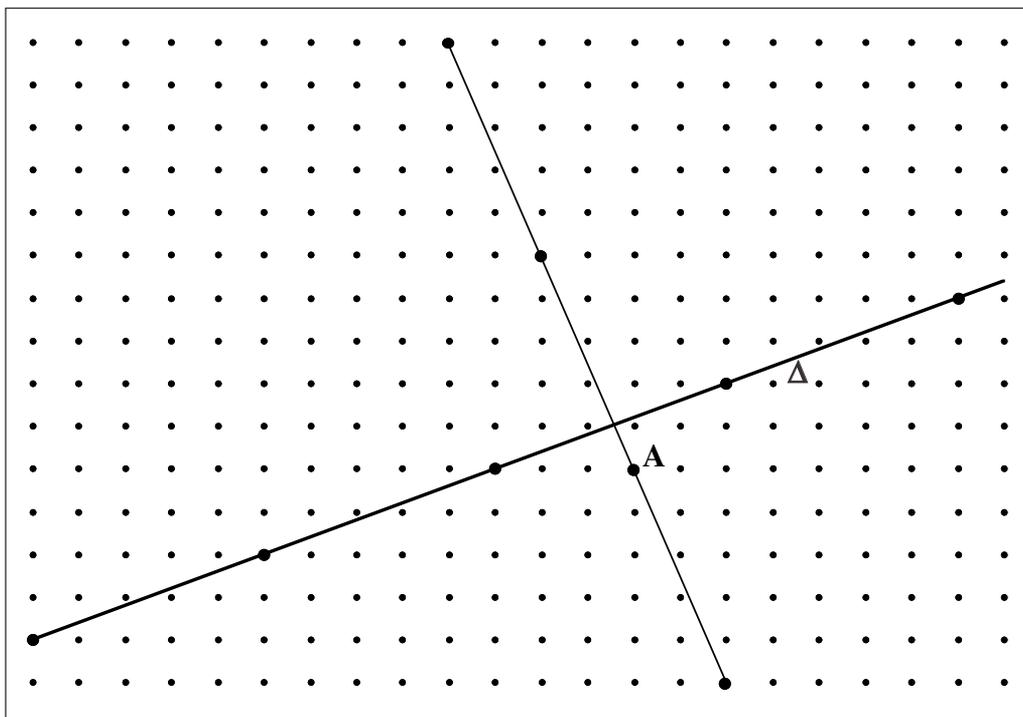
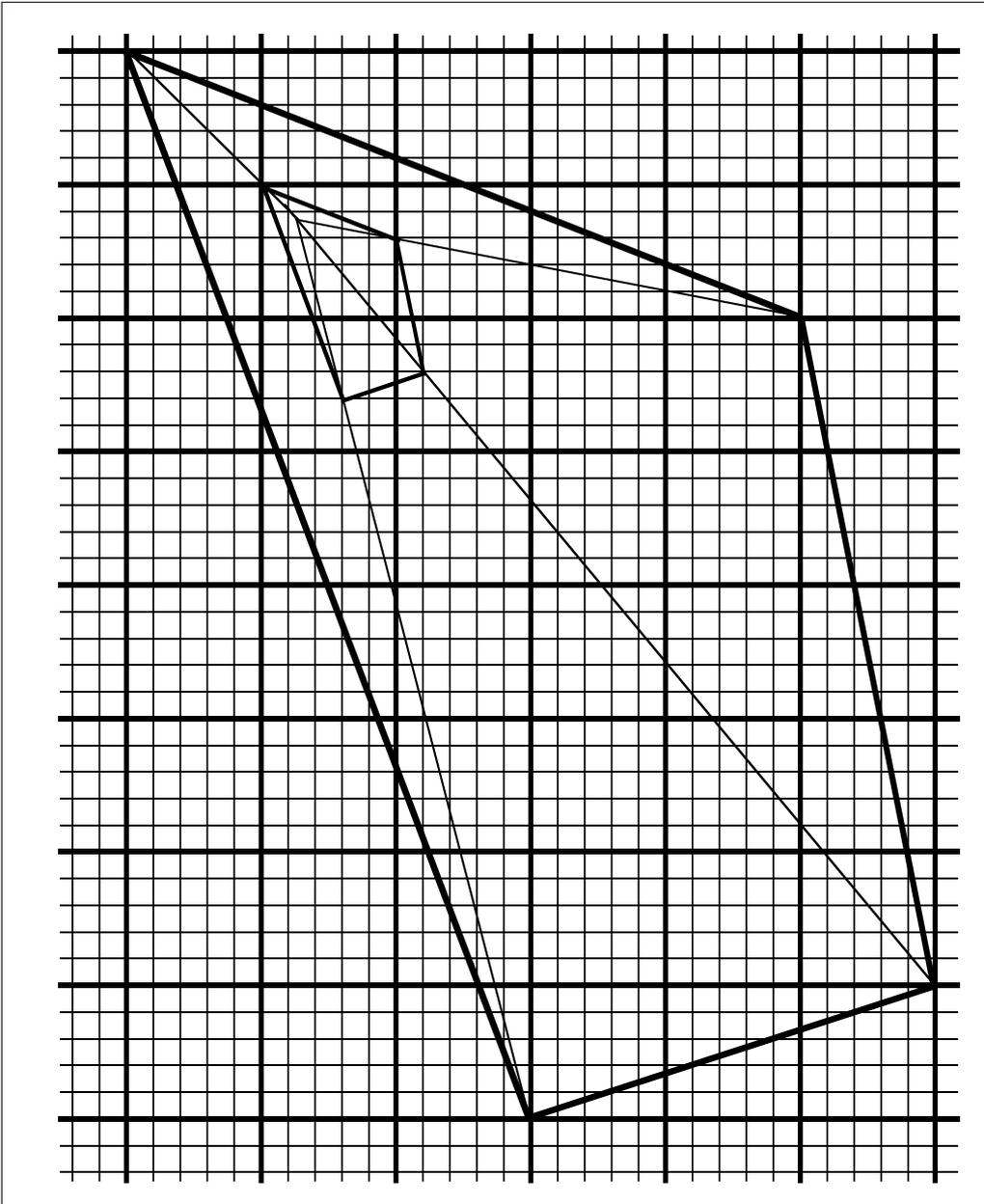


Figure 13 Droites orthogonales dans le quadrillage

Figure 14 Agrandissement



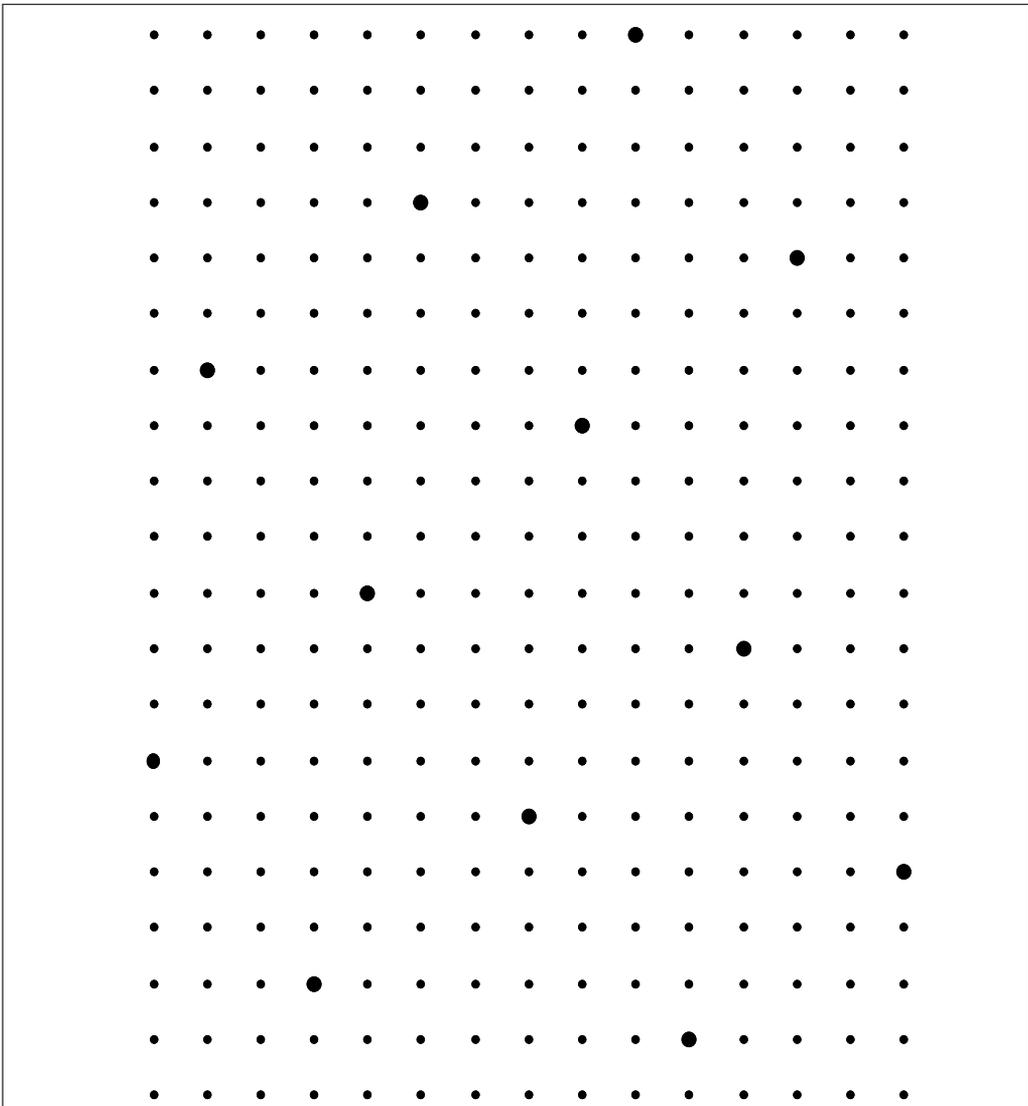
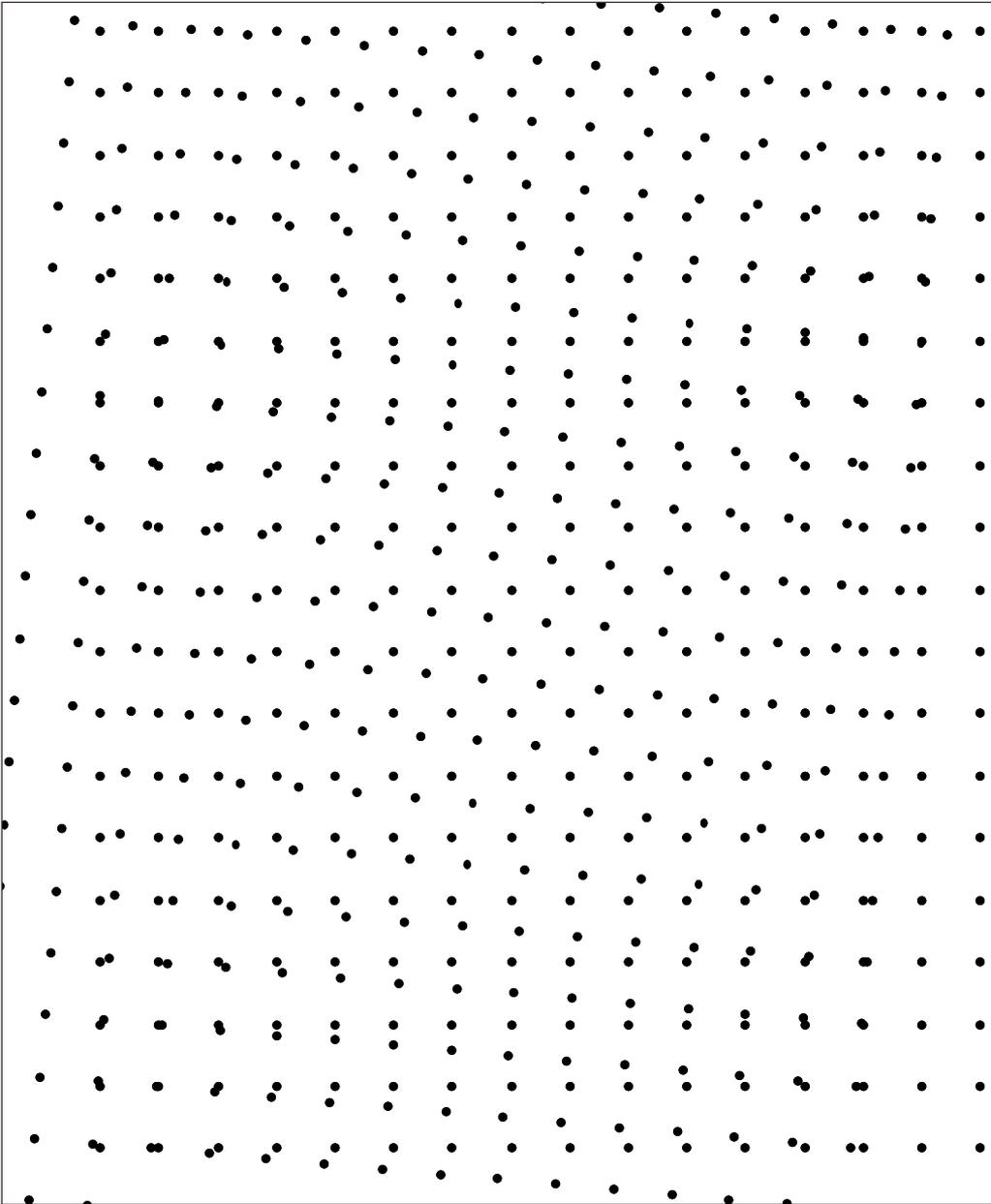


Figure 15 Similitude

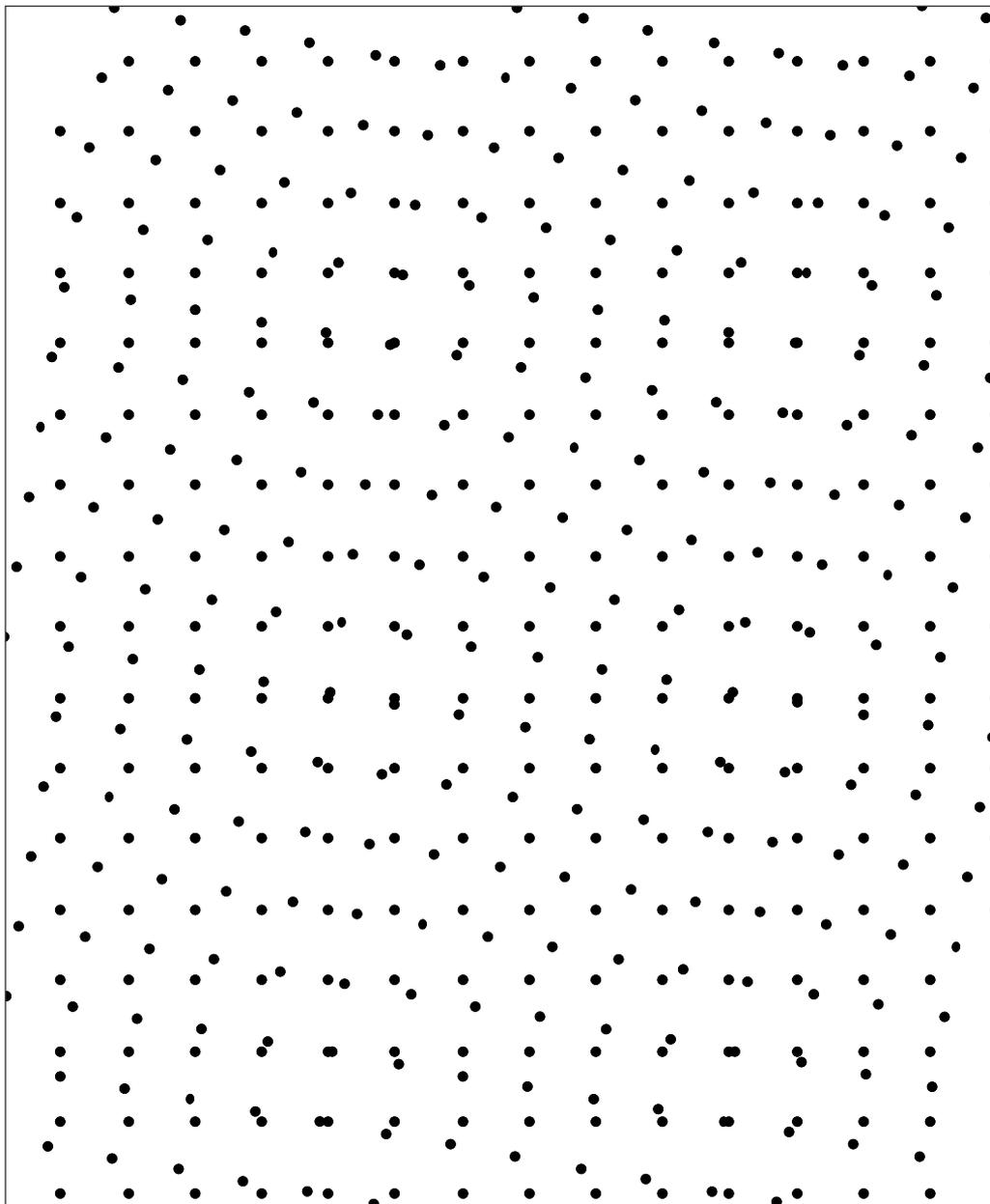
Notez qu'en composant deux similitudes «du quadrillage», on est capable d'additionner deux angles «du quadrillage».

**2 INTERLUDE : SUPERPOSEZ DEUX QUADRILLAGES IDENTIQUES AVEC
UN LÉGER DÉCALAGE**

décalage de 5 degrés



décalage de 10 degrés



3 QUADRILLAGE DU PLAN HYPERBOLIQUE PAR DES PENTAGONES RÉGULIERS À ANGLES DROITS

Les isométries qui conservent un quadrillage du plan euclidien bâti sur un carré ABCD de centre O sont engendrées par trois symétries orthogonales, par rapport au côté (AB), à la médiane (OJ) et à la diagonale (AO) (figure 16). Les produits deux à deux de ces symétries sont trois rotations ρ_A (d'un quart de tour autour de A), ρ_O (d'un quart de tour autour de O), ρ_J (d'un demi tour autour de J). Ces rotations engendrent le groupe G des isométries directes qui conservent le pavage. On a $\rho_J \circ \rho_A \circ \rho_O = \text{Id}$. On peut montrer que toute relation entre ρ_J , ρ_A et ρ_O est une conséquence des quatre relations :

$$\rho_O^4 = \rho_A^4 = \rho_J^2 = \rho_J \circ \rho_A \circ \rho_O = \text{Id}$$

Les propriétés géométriques du quadrillage sont reflétées dans la structure du groupe G, et nous avons vu que les propriétés géométriques du quadrillage reflètent l'essentiel de la géométrie euclidienne.

Il est tentant de faire le travail analogue avec un plan hyperbolique.

Dans le plan hyperbolique, il existe en effet un pentagone régulier à angles droits, et donc

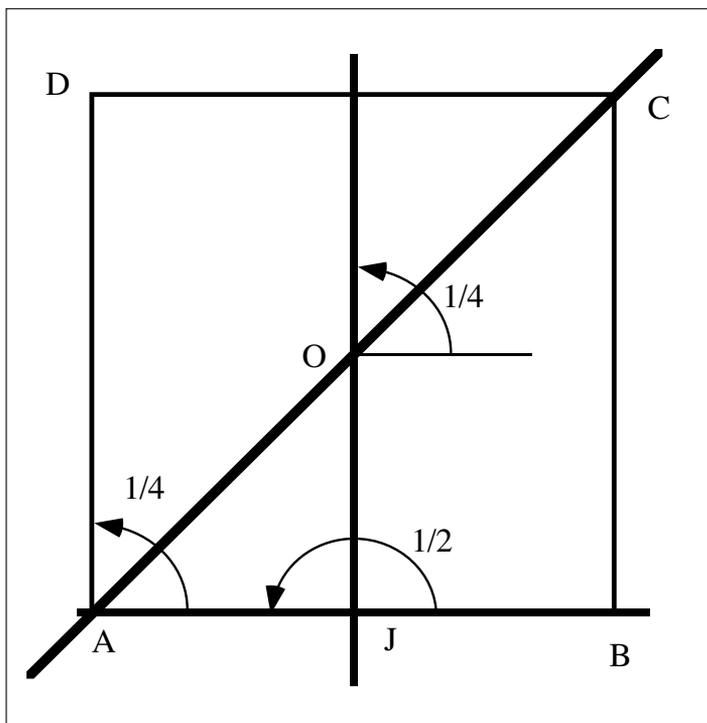


Figure 16 Trois symétries orthogonales qui engendrent le groupe du quadrillage

un pavage du plan par des copies de ce pentagone. Le groupe des isométries qui conservent le pavage bâti sur un pentagone ABCDE de centre O est engendré par trois symétries orthogonales, par rapport au côté (AB), à la médiane (OJ) et à la diagonale (AO) (figure 17). Les produits deux à deux de ces symétries sont trois rotations ρ_A (d'un quart de tour autour de A), ρ_O (d'un cinquième de tour autour de O), ρ_J (d'un demi tour autour de J). Ces rotations engendrent le groupe G des isométries directes qui conservent le pavage. On a $\rho_J \circ \rho_A \circ \rho_O = \text{Id}$. On peut montrer que

toute relation entre ρ_J , ρ_A et ρ_O est une conséquence des quatre relations :

$$\rho_O^5 = \rho_A^4 = \rho_J^2 = \rho_J \circ \rho_A \circ \rho_O = \text{Id}$$

Dans la figure 17, on montre, dans le disque de Poincaré, un pentagone régulier ABCDE de centre O et les dix pentagones adjacents obtenus à partir du premier par symétrie par rapport à un côté ou par demi tour autour d'un sommet..

Il reste donc à développer la géométrie de ce pavage et à en déduire quelques propriétés essentielles du plan hyperbolique. ... une affaire à suivre donc.

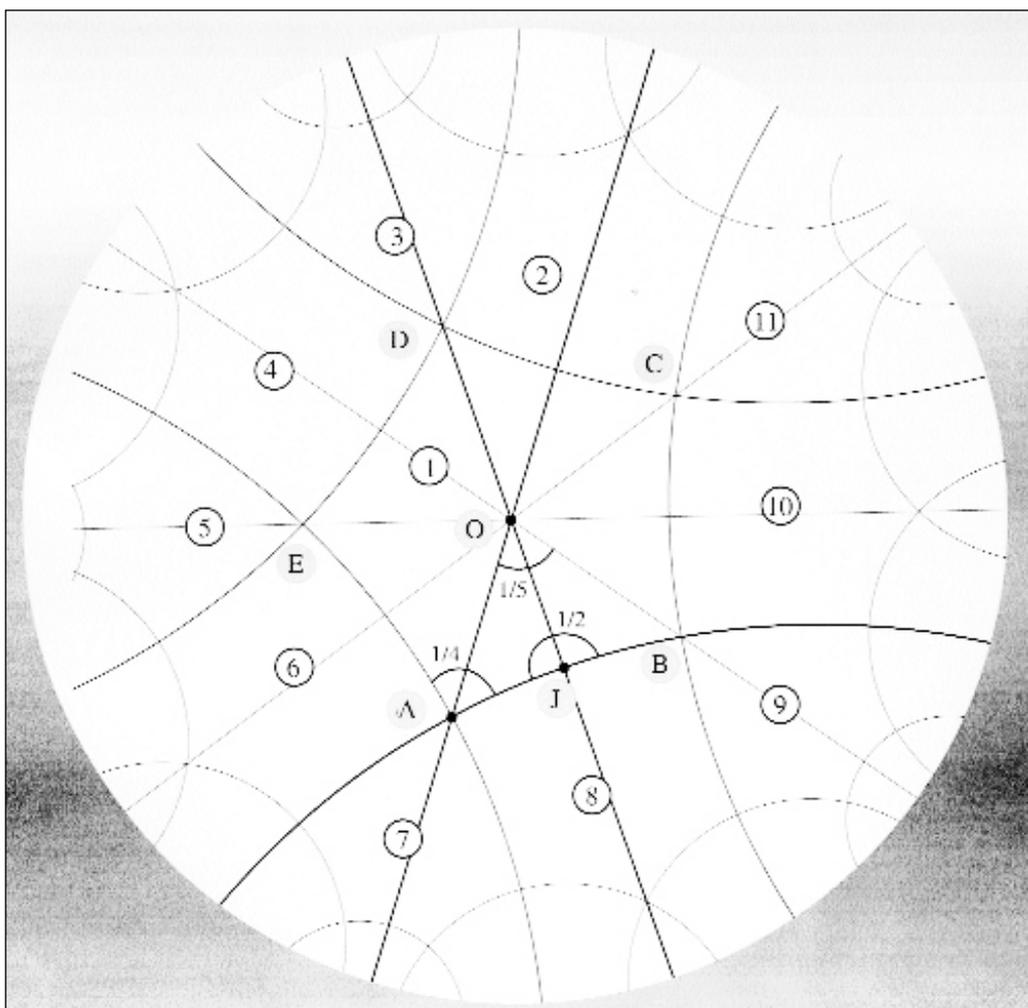


Figure 17 Trois symétries orthogonales qui engendrent le groupe du pavage du plan hyperbolique par des pentagones réguliers à angles droits